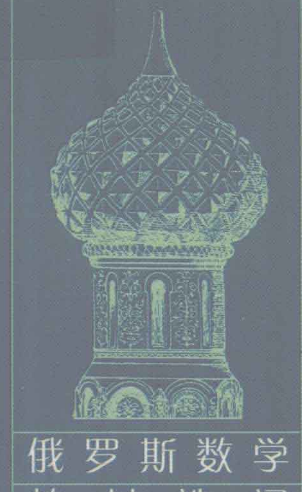


“十一五”国家重点图书

俄罗斯数学教材选译

工科数学分析习题集

（根据2006年俄文版翻译）

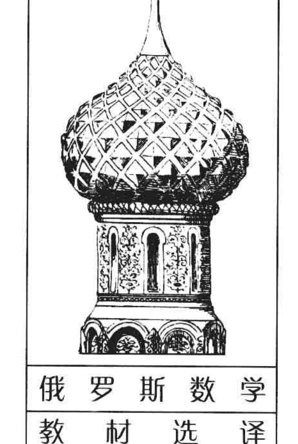
□ Б. П. 吉米多维奇　著

□ 林武忠　倪明康　房浩鑑　蔡天亮　祝长忠　译



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

“十一五”国家重点图书



● 数学天元基金资助项目

工科数学分析习题集

GONGKE SHUXUE FENXI XITIJI

（根据2006年俄文版翻译）

□ Б. П. 吉米多维奇 著

□ 林武忠 倪明康 房浩鑑 蔡天亮 祝长忠 译

高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图字: 01–2005–5740 号

Б. П. Демидовича

Задачи и упражнения по математическому анализу для высших технических учебных заведений (под редакцией Б. П. Демидовича)

Москва, Издательство Астрель, 2006

Originally published in Russian in the title:

B. P. Demidovich

Problems and Exercises in Mathematical Analysis for High Technical Schools

(edited by B. P. Demidovich)

图书在版编目 (CIP) 数据

工科数学分析习题集 / (俄罗斯) 吉米多维奇著; 林武忠等译. — 北京: 高等教育出版社, 2011.11

ISBN 978-7-04-031004-7

I. ①工··· II. ①吉··· ②林··· III. ①数学分析-习题集 IV. ①O17-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 064740 号

策划编辑 赵天夫 责任编辑 蒋 青 封面设计 王凌波 责任印制 田 甜

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http //www hep edu cn
邮政编码	100120		http //www hep com cn
印　　刷	北京民族印务有限责任公司	网上订购	http //www landraco com
开　　本	787 × 1092 1/16		http //www landraco com cn
印　　张	25. 5	版　　次	2011 年 11 月第 1 版
字　　数	450 000	印　　次	2011 年 11 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	39. 00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 31004-00

《俄罗斯数学教材选译》序

从上世纪 50 年代初起, 在当时全面学习苏联的大背景下, 国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密, 论证严谨, 有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础, 培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代, 国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材, 但还在很大程度上保留着苏联教材的影响, 同时, 一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说, 从解放初一直到文化大革命前夕, 苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用, 起了不可忽略的影响, 是功不可没的.

改革开放以来, 通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材, 大家眼界为之一新, 并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中, 尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革, 引进却基本中断, 更没有及时地进行跟踪, 能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少, 事实上已造成了很大的隔膜, 不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初, 在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上, 有数学家提出, 莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材, 建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持, 并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论, 大家一致认为: 在当前着力引进俄罗斯的数学教材, 有助于扩大视野, 开拓思路, 对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要.《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下, 经数学天元基金资助, 由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订, 本系列中所列入的教材, 以莫斯科大学的教材为主, 也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材. 有大学基础课程的教材, 也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书. 有些教材虽曾翻译出版, 但经多次修订重版, 面目已有较大变化, 至今仍广泛采用、深受欢迎, 反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力, 对我们也是一个有益的借鉴. 这一教材系列的出版, 将中俄数学教学之间中断多年的

链条重新连接起来, 对推动我国数学课程设置和教学内容的改革, 对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才, 可望发挥积极的作用, 并起着深远的影响, 无疑值得庆贺, 特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

序　言

在本习题集中选取了适合于高等技术学校中的一般高等数学课程教学大纲的数学分析问题和例子, 全书包含了系统地安排在习题集中第一章到第十章的 3000 个以上问题, 而且涵盖了除解析几何以外的工科高等数学课程的所有章节. 特别关注到要求具有扎实技能的该课程最重要章节 (求解极限、作出函数图形、函数的求导方法、积分技巧、定积分的应用、级数以及微分方程的求解). 此外, 还包括场论、傅里叶方法和近似计算的问题. 正如由教学实践所证明的那样, 编入习题集中问题的数量, 不仅在满足大学生们确实打好该课程相应章节基础的需要绰绰有余, 而且给教师们在这些章节范围内进行多样化问题选择以及为完成总结任务和测验工作从中选择问题时的各种可能性.

在每一章的开头都就有关该课程相应章节给出简要理论介绍以及引进基本定义和公式. 这时还给出特别重要典型问题的求解范例. 这种状况在很大程度上减轻了大学生们在自学时对习题集的依赖. 对于所有的计算问题都给出答案, 对于打上星号 (*) 或者双星号 (**) 的问题, 都给出相应的简单求解提示或者进行求解. 为了直观起见, 部分问题运用了图解说明.

作为莫斯科市高等技术学校老师们多年教学的结果, 编成了这本高等数学习题集, 其中除了原来的问题和例子外, 还放进了众所周知的问题.

目　录

第一章　分析引论

§1. 函数的概念

1°. **实数**. 有理数和无理数统称为**实数**. 所谓实数 a 的**绝对值**是理解为非负数 $|a|$, 它用如下条件确定: 如果 $a \geqslant 0$, 则有 $|a| = a$; 如果 $a < 0$, 则有 $|a| = -a$. 对于任意实数 a 和 b, 有不等式

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|$$

成立.

2°. **函数的定义**. 如果属于某个集合 E 的每一个变量值[①] x, 都对应着一个且只有一个量 y 的有限值, 那么就称 y 为 x 的 (单值) **函数**, 或者称为定义在集合 E 上的**因变量**, x 称为**自变量**或者**独立变量**. 对于 y 为 x 的函数情况, 简单地记作 $y = f(x)$ 或者 $y = F(x)$ 等等.

如果属于某个集合 E 的每个变量 x 的值, 对应着变量 y 的一个或多个值, 那么称 y 为定义在集合 E 上的 x 的**多值**函数. 今后书中如果没有显然相反的声明, "函数" 一词应仅理解为单值函数.

3°. **函数的存在域**. 对于使给定函数有定义的 x 值的集合称为这个函数的**存在域**或者**定义域**.

在最简单的情况下, 函数的存在域或者是**线段** $[a, b]$ (闭区间), 亦即满足 $a \leqslant x \leqslant b$ 的实数 x 的集合, 或者是**开区间** (a, b), 亦即满足 $a < x < b$ 的实数 x 的集合. 但是函数存在域也可能是更为复杂的结构 (见问题 21).

例 1　确定函数

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

的存在域.

---

①今后在所有讨论中的量值, 如果没有明确的不同说明, 都认为是实数.

解 如果

$$x^2-1>0,$$

亦即如果 $|x|>1$, 那么函数有定义. 因此函数的存在域是两个区间 $-\infty<x<-1$ 和 $1<x<+\infty$ 的总和.

4°. **反函数**. 如果方程 $y=f(x)$ 关于变量 x 是唯一可解的, 亦即存在函数 $x=g(y)$ 使得 $y\equiv f[g(y)]$, 或者用标准的记号 $y=g(x)$, 那么就称它为关于 $y=f(x)$ 的**反函数**. 显然有 $g[f(x)]\equiv x$, 亦即函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是**互为反函数**.

在一般情况下, 方程 $y=f(x)$ 确定一个多值的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 使得对函数 $f(x)$ 所有的值 y 有 $y\equiv f(f^{-1}(y))$.

例 2 对于函数

$$y=1-2^{-x}, \tag{1}$$

确定它的反函数.

解 关于 x 求解方程 (1), 我们有

$$2^{-x}=1-y,\quad 从而有\ x=-\frac{\lg(1-y)}{\lg 2},① \tag{2}$$

显然, 函数 (2) 的定义域为 $-\infty<y<1$.

5°. **复合函数和隐函数**. 用一串等式 $y=f(u)$, 其中 $u=\varphi(x)$ 等等给出的 x 的函数 y 称为**复合函数或者函数的函数**.

用关于因变量未解出的方程给出的函数称为**隐函数**. 例如, 方程 $x^3+y^3=1$ 确定 y 作为 x 的隐函数.

6°. **函数的几何解释**. 在平面 XOY 上, 其坐标由方程 $y=f(x)$ 联系起来的点 (x,y) 的集合称为该函数的图形.

1**. 证明: 如果 a 和 b 是实数, 那么有

$$\big||a|-|b|\big|\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|.$$

2. 证明下列等式:

a) $|ab|=|a|\cdot|b|$; b) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}(b\neq 0)$;

c) $|a|^2=a^2$; d) $\sqrt{a^2}=|a|$.

3. 求解不等式:

a) $|x-1|<3$; b) $|2x+1|<1$;

c) $|x+1|>2$; d) $|x-1|<|x+1|$.

4. 如果 $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$, 求出 $f(-1),f(0),f(1),f(2),f(3),f(4)$.

5. 如果 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$, 求出 $f(0),f\left(-\dfrac{3}{4}\right),f(-x),f\left(\dfrac{1}{x}\right),\dfrac{1}{f(x)}$.

6. 假设 $f(x)=\arccos(\lg x)$, 求出 $f\left(\dfrac{1}{10}\right),f(1),f(10)$.

①这里像通常那样, $\lg x=\log_{10}x$ 表示以 10 为底 x 的对数.

7. 假设函数 $f(x)$ 为线性函数, 如果 $f(-1)=2$ 和 $f(2)=-3$, 求出这个函数.

8. 如果 $f(0)=1, f(1)=0$ 以及 $f(3)=5$, 求出这个二次有理整函数.

9. 已知 $f(4)=-2, f(5)=6$, 把函数 $f(x)$ 在闭区间 $4 \leqslant x \leqslant 5$ 上看成是线性的(**线性插值函数**), 求出 $f(4.3)$ 的近似值.

10. 使用量的绝对值符号, 采用一个公式将函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{如果 } x \leqslant 0,\\ x, & \text{如果 } x>0\end{cases}$$

写出.

确定下列函数的存在性区域:

11. a) $y=\sqrt{1+x}$; b) $y=\sqrt[3]{1+x}$.

12. $y=\dfrac{1}{4-x^2}$.

13. a) $y=\sqrt{x^2-2}$; b) $y=x\sqrt{x^2-2}$.

14**. $y=\sqrt{2+x-x^2}$.

15. $y=\sqrt{-x}+\dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$.

16. $y=\sqrt{x-x^3}$.

17. $y=\lg\dfrac{2+x}{2-x}$.

18. $y=\lg\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$.

19. $y=\arccos\dfrac{2x}{1+x}$.

20. $y=\arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$.

21. $y=\sqrt{\sin 2x}$.

22. 假设 $f(x)=2x^4-3x^3-5x^2+6x-10$, 求出函数

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)] \quad \text{和} \quad \psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)].$$

23. 假设函数 $f(x)$ 定义在对称的区域 $-l<x<l$ 中, 如果 $f(x)=f(-x)$, 则称它为**偶函数**; 而如果 $f(-x)=-f(x)$, 则称它为**奇函数**.

在下面列出的函数中, 说明哪些是偶函数, 哪些是奇函数:

a) $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^x+a^{-x})$; b) $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$;

c) $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$; d) $f(x)=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$;

e) $f(x)=\lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

24*. 证明: 定义在区间 $-l<x<l$ 中的一切函数都可以表示成偶函数与奇函数的和.

25. 证明: 两个偶函数或者两个奇函数的乘积是偶函数, 而偶函数乘以奇函数是奇函数.

26. 函数 $f(x)$ 称为**周期函数**, 如果存在正常数 T (**函数的周期**), 使得对一切属于函数 $f(x)$ 存在域的值 x 都有 $f(x+T)\equiv f(x)$.

在下面列出的函数中, 确定哪些函数是周期的, 并对周期函数求出它的最小周期 T:

a) $f(x)=10\sin 3x$; b) $f(x)=a\sin\lambda x+b\cos\lambda x$;

c) $f(x)=\sqrt{\tan x}$;　　d) $f(x)=\sin^2 x$;

e) $f(x)=\sin\left(\sqrt{x}\right)$.

27. 将线段 MN 的长度 y 和三角形 AMN 的面积 S (图 1) 表示成 $x=AM$ 的函数, 并作出这些函数的图形.

28. 杆 $AB=l$ (图 2) 的线密度 (即单位长度的质量) 在线段 $AC=l_1, CD=l_2$ 和 $DB=l_3$ $(l_1+l_2+l_3=l)$ 上分别为 q_1,q_2,q_3. 将这根杆的可变动线段 $AM=x$ 的质量 m 表示成 x 的函数, 并作出这个函数的图形.

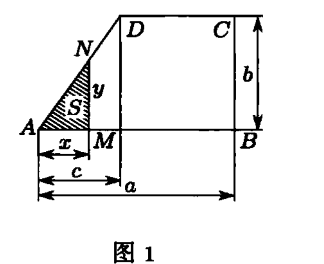


图 1

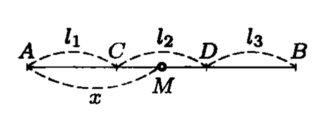


图 2

29. 如果 $\varphi(x)=x^2$ 和 $\psi(x)=2^x$, 求 $\varphi[\psi(x)]$ 和 $\psi[\varphi(x)]$.

30. 如果 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, 求 $f\{f[f(x)]\}$.

31. 如果 $f(x-1)=x^2$, 求 $f(x+1)$.

32. 假设 $f(n)$ 是一个算术级数的 n 项和, 证明:

$$f(n+3)-3f(n+2)+3f(n+1)-f(n)=0.$$

33. 证明: 如果

$$f(x)=kx+b,$$

且数 x_1,x_2,x_3 构成算术级数, 那么 $f(x_1),f(x_2),f(x_3)$ 也构成算术级数.

34. 证明: 如果 $f(x)$ 是指数函数, 亦即 $f(x)=a^x$ $(a>0)$, 且数 x_1,x_2,x_3 构成算术级数, 那么数 $f(x_1),f(x_2),f(x_3)$ 也构成算术级数.

35. 假设

$$f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x},$$

证明:

$$f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

36. 假设 $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}\left(a^x+a^{-x}\right)$ 和 $\psi(x)=\dfrac{1}{2}\left(a^x-a^{-x}\right)$. 证明:

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y)+\psi(x)\psi(y)$$

和

$$\psi(x+y)=\varphi(x)\psi(y)+\varphi(y)\psi(x).$$

37. 如果

$$f(x)=\begin{cases}\arcsin x, & 当\ -1\leqslant x\leqslant 0,\\ \arctan x, & 当\ 0<x<+\infty,\end{cases}$$

求 $f(-1), f(0), f(1)$.

38. 如果:

a) $y=1+x$; b) $y=2+x-x^2$;

c) $y=1-x+x^2$; d) $y=x^3-3x$;

e) $y=\lg\dfrac{2x}{1+x}$,

确定函数 y 的根 (零点)、正值区域和负值区域.

39. 如果:

a) $y=2x+3$; b) $y=x^2-1$;

c) $y=\sqrt[3]{1-x^3}$; d) $y=\lg\dfrac{x}{2}$;

e) $y=\arctan 3x$,

求出函数 y 的反函数以及这些反函数的定义域.

40. 求出函数

$$y=\begin{cases}x, & 如果\ x\leqslant 0,\\ x^2, & 如果\ x>0\end{cases}$$

的反函数.

41. 将下面给出的函数写成一连串等式的形式, 它的每一个环节只包含最简单的初等函数 (幂函数、指数函数、三角函数等等):

a) $y=(2x-5)^{10}$; b) $y=2^{\cos x}$;

c) $y=\lg\tan\dfrac{x}{2}$; d) $y=\arcsin\left(-3^{-x^2}\right)$.

42. 下面用一连串给出了复合函数, 请将它们写成一个等式的形式:

a) $y=u^2,\quad u=\sin x$;

b) $y=\arctan u,\quad u=\sqrt{v},\quad v=\lg x$;

c) $y=\begin{cases}2u, & 如果\ u\leqslant 0,\\ 0, & 如果\ u>0,\end{cases}\quad u=x^2-1.$

43. 将下列用方程给出的函数 y 写成显式:

a) $x^2-\arccos y=\pi$; b) $10^x+10^y=10$;

c) $x+|y|=2y$,

并求出该隐函数的定义域.

§2. 初等函数的图形

函数 $y=f(x)$ 图形的作法大体上采用如下方法进行; 选取充分密集的一系列点 $M_i(x_i, y_i)$, 其中 $y_i=f(x_i)$ $(i=1,2,\cdots)$, 并用线把它们顺序连接起来而画出草图, 连

线的特征要考虑到中间各点的位置.

熟悉基本初等函数图形将简化对一般函数图形的构造 (见附录 VI). 从函数

$$y = f(x) \qquad (\Gamma)$$

的图形出发, 利用简单的几何结构, 我们得到如下函数的图形: 1) $y_1 = -f(x)$ —— 图形 Γ 关于 OX 轴的镜像映射; 2) $y_2 = f(-x)$ —— 图形 Γ 关于 OY 轴的镜像映射; 3) $y_3 = f(x-a)$ —— 图形 Γ 沿 OX 轴平移量值 a; 4) $y_4 = b + f(x)$ —— 图形 Γ 沿 OY 轴平移量值 b (图 3).

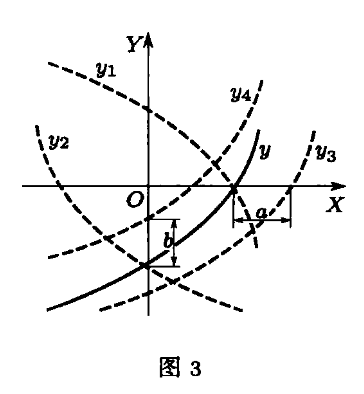


图 3

例　作出函数

$$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

的图形.

解　所求曲线就是将正弦曲线 $y = \sin x$ 沿 OX 轴向右移动 $\frac{\pi}{4}$ 得到的曲线 (图 4).

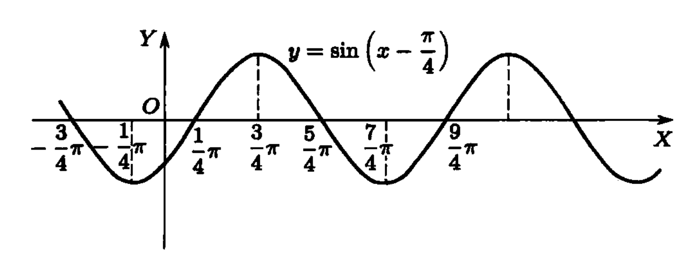


图 4

作出下列线性函数 (直线) 的图形:

44. $y = kx$,　其中 $k = 0, 1, 2, \frac{1}{2}, -1, -2$.

45. $y = x + b$,　其中 $b = 0, 1, 2, -1, -2$.

46. $y = 1.5x + 2$.

作出下列二次整有理函数 (抛物线) 的图形:

47. $y = ax^2$,　其中 $a = 1, 2, \frac{1}{2}, -1, -2, 0$.

48. $y = x^2 + c$,　其中 $c = 0, 1, 2, -1$.

49. $y = (x - x_0)^2$,　其中 $x_0 = 0, 1, 2, -1$.

50. $y = y_0 + (x - 1)^2$,　其中 $y_0 = 0, 1, 2, -1$.

51*. $y = ax^2 + bx + c$,　其中:

1) $a = 1, b = -2, c = 3$;

2) $a=-2, b=6, c=0$.

52. $y=2+x-x^2$. 找出这条抛物线与 OX 轴的交点.

作出下列高于二次整有理函数的图形:

53*. $y=x^3$ (立方抛物线).

54. $y=2+(x-1)^3$.

55. $y=x^3-3x+2$.

56. $y=x^4$.

57. $y=2x^3-x^4$.

作出下列分式线性函数 (双曲线) 的图形:

58*. $y=\dfrac{1}{x}$.

59. $y=\dfrac{1}{1-x}$.

60. $y=\dfrac{x-2}{x+2}$.

61*. $y=y_0+\dfrac{m}{x-x_0}$, 其中 $x_0=1, y_0=-1, m=6$.

62*. $y=\dfrac{2x-3}{3x+2}$.

作出下列分式有理函数的图形:

63. $y=x+\dfrac{1}{x}$.

64. $y=\dfrac{x^2}{x+1}$.

65*. $y=\dfrac{1}{x^2}$.

66. $y=\dfrac{1}{x^3}$.

67*. $y=\dfrac{10}{x^2+1}$ (阿涅西 (Agnesi) 箕舌线).

68. $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$ (牛顿 (Newton) 蛇形线).

69. $y=x+\dfrac{1}{x^2}$.

70. $y=x^2+\dfrac{1}{x}$ (牛顿三叉线).

作出下列无理函数的图形:

71*. $y=\sqrt{x}$.

72. $y=\sqrt[3]{x}$.

73*. $y=\sqrt[3]{x^2}$ (尼尔 (Neil) 抛物线).

74. $y=\pm x\sqrt{x}$ (半立方抛物线).

75*. $y=\pm\dfrac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$ (椭圆).

76. $y=\pm\sqrt{x^2-1}$ (双曲线).

77. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

78*. $y=\pm\sqrt{\dfrac{x}{4-x}}$ (狄奥克莱斯 (Diocles) 蔓叶线).

79. $y=\pm x\sqrt{25-x^2}$.

作出下列三角函数的图形:

80*. $y=\sin x$.

81*. $y=\cos x$.

82*. $y=\tan x$.

83*. $y=\cot x$.

84*. $y=\sec x$.

85*. $y=\csc x$.

86. $y=A\sin x$,　其中 $A=1,\ 10,\ \frac{1}{2},\ -2$.

87*. $y=\sin nx$,　其中 $n=1,\ 2,\ 3,\ \frac{1}{2}$.

88. $y=\sin(x-\varphi)$,　其中 $\varphi=0,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \pi,\ -\frac{\pi}{4}$.

89*. $y=5\sin(2x-3)$.

90*. $y=a\sin x+b\cos x$,　其中 $a=6,\ b=-8$.

91. $y=\sin x+\cos x$.

92*. $y=\cos^2 x$.

93*. $y=x+\sin x$.

94*. $y=x\sin x$.

95. $y=\tan^2 x$.

96. $y=1-2\cos x$.

97. $y=\sin x-\frac{1}{3}\sin 3x$.

98. $y=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x$.

99*. $y=\cos\frac{\pi}{x}$.

100. $y=\pm\sqrt{\sin x}$.

作出下列指数函数和对数函数的图形:

101. $y=a^x$,　其中 $a=2,\ \frac{1}{2},\ e(e=2.718\cdots)$①.

102*. $y=\log_a x$,　其中 $a=10,\ 2,\ \frac{1}{2},\ e$.

103*. $y=\operatorname{sh} x$,　这里 $\operatorname{sh} x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$.

104*. $y=\operatorname{ch} x$,　这里 $\operatorname{ch} x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$.

105*. $y=\operatorname{th} x$,　这里 $\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

106. $y=10^{\frac{1}{x}}$.

107*. $y=e^{-x^2}$ (概率曲线).

108. $y=2^{-\frac{1}{x^2}}$.

109. $y=\lg x^2$.

110. $y=\lg^2 x$.

111. $y=\lg(\lg x)$.

112. $y=\frac{1}{\lg x}$.

113. $y=\lg\frac{1}{x}$.

114. $y=\lg(-x)$.

115. $y=\log_2(1+x)$.

116. $y=\lg(\cos x)$.

117. $y=2^{-x}\sin x$.

作出下列反三角函数的图形:

118*. $y=\arcsin x$.

119*. $y=\arccos x$.

120*. $y=\arctan x$.

121*. $y=\operatorname{arccot} x$.

122. $y=\arcsin\frac{1}{x}$.

123. $y=\arccos\frac{1}{x}$.

124. $y=x+\arctan x$.

---

①关于数 e 的更详细情况参看本书第 12 页.

作出下列函数的图形:

125. $y=|x|$.

126. $y=\frac{1}{2}(x+|x|)$.

127. a) $y= x|x|$; b) $y=\log_{\sqrt{2}}|x|$.

128. a) $y=\sin x+|\sin x|$; b) $y=\sin x-|\sin x|$.

129. $y=\begin{cases}3-x^2, & 当\ |x|\leqslant 1,\\ \frac{2}{|x|}, & 当\ |x|>0.\end{cases}$

130. a) $y=[x]$; b) $y=x-[x]$, 其中 $[x]$ 为 x 的整数部分, 亦即小于或者等于 x 的最小整数.

在极坐系 (r,φ) $(r\geqslant 0)$ 之下作出下列函数的图形:

131. $r=1$ (圆周).

132*. $r=\frac{\varphi}{2}$ (阿基米德 (Archimedes) 螺线).

133*. $r=e^{\varphi}$ (对数螺线).

134*. $r=\frac{\pi}{\varphi}$ (双曲螺线).

135. $r=2\cos\varphi$ (圆周).

136. $r=\frac{1}{\sin\varphi}$ (直线).

137. $r=\sec^2\frac{\varphi}{2}$ (抛物线).

138*. $r=10\sin 3\varphi$ (三叶玫瑰线).

139*. $r=a(1+\cos\varphi)$ $(a>0)$ (心脏线).

140*. $r^2=a^2\cos 2\varphi$ $(a>0)$ (双纽线).

作出下列用参数方程给出的函数图形:

141*. $x=t^3,\quad y=t^2$ (半立方抛物线).

142*. $x=10\cos t,\quad y=\sin t$ (椭圆).

143*. $x=10\cos^3 t,\quad y=10\sin^3 t$ (星形线).

144*. $x=a(\cos t+t\sin t),\quad y=a(\sin t-t\cos t)$ (圆的渐开线).

145*. $x=\frac{at}{1+t^3},\quad y=\frac{at^2}{1+t^3}$ (笛卡儿 (Descartes) 叶形线).

146. $x=\frac{a}{\sqrt{1+t^2}},\quad y=\frac{at}{\sqrt{1+t^2}}$ (半圆周).

147. $x=2^t+2^{-t},\quad y=2^t-2^{-t}$ (双曲线的一支).

148. $x=2\cos^2 t,\quad y=2\sin^2 t$ (直线段).

149. $x=t-t^2,\quad y=t^2-t^3$.

150. $x=a(2\cos t-\cos zt),\quad y=a(2\sin t-\sin 2t)$ (心脏线).

作出下面给出的隐函数图形:

151*. $x^2+y^2=25$ (圆周).

152. $xy=12$ (双曲线).

153*. $y^2=2x$ (抛物线).

154. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ (椭圆).

155. $y^2 = x^2(100 - x^2)$.

156*. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}$ (星形线).

157*. $x + y = 10\lg y$.

158. $x^2 = \cos y$.

159*. $\sqrt{x^2+y^2} = e^{\mathrm{Arctan}\frac{y}{x}}$ (对数螺线).

160*. $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ (笛卡儿叶形线).

161. 如果已知 0°C 对应于 32°F, 100°C 对应于 212°F, 请建立从摄氏度到华氏度的换算公式.

作出所得函数的图形.

162. 在底边 $b = 10$ 和高 $h = 6$ 的三角形中, 内接一个矩形 (图 5).

试将这个矩形的面积 y 表示为其底边 x 的函数.

作出这个函数的图形, 并求出它的最大值.

163. 在三角形 ACB 中, 边 $BC = a$, 边 $AC = b$, 及变动角 $\angle ACB = x$ (图 6).

试将 $\triangle ABC$ 的面积 y 表示为 x 的函数. 作出这个函数的图形, 并求出它的最大值.

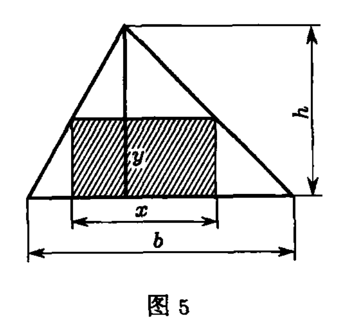


图 5

图 6

164. 用作图法求解下列方程:

a) $2x^2 - 5x + 2 = 0$;

b) $x^3 + x - 1 = 0$;

c) $\lg x = 0.1x$;

d) $10^{-x} = x$;

e) $x = 1 + 0.5\sin x$;

f) $\cot x = x \ (0 < x < \pi)$.

165. 用作图法求解下列方程组:

a) $xy = 10,\ x + y = 7$;

b) $xy = 6,\ x^2 + y^2 = 13$;

c) $x^2 - x + y = 4,\ y^2 - 2x = 0$;

d) $x^2 + y = 10,\ x + y^2 = 6$;

e) $y = \sin x,\ y = \cos x \ (0 < x < 2\pi)$.

§3. 极限

1°. **数列的极限.** 如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在数 $N = N(\varepsilon)$ 使得, 当 $n > N$ 时,

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

就称数 a 为数列 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 的极限.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

例 1 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}=2. \tag{1}$$

解 写出差

$$\frac{2n+1}{n+1}-2=-\frac{1}{n+1}.$$

估计这个差的绝对值, 我们有

$$\left|\frac{2n+1}{n+1}-2\right|=\frac{1}{n+1}<\varepsilon, \tag{2}$$

只要

$$n>\frac{1}{\varepsilon}-1=N(\varepsilon).$$

于是, 对于每一个正数 ε, 存在数 $N=\dfrac{1}{\varepsilon}-1$, 使得当 $n>N$, 就有等式 (2) 成立. 从而, 数 2 就是数列 $x_n=\dfrac{2n+1}{n+1}$ 的极限. 亦即公式 (1) 正确.

2°. **函数的极限**. 如果对任意 $\varepsilon>0$, 总存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

就称当 $x\to a$ 时, $f(x)\to A$ (A 和 a 为常数), 或者

$$\lim_{x\to a}f(x)=A.$$

类似地, 如果当 $|x|>N(\varepsilon)$ 时有 $|f(x)-A|<\varepsilon$, 就记

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A.$$

此外, 还利用约定的记号

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty,$$

它表示当 $0<|x-a|<\delta(E)$ 时有 $|f(x)|>E$, 其中 E 为任意正数.

3°. **单侧极限**. 如果 $x<a$, 且 $x\to a$, 则约定写成 $x\to a-0$; 类似地, 如果 $x>a$, 且 $x\to a$, 则这将写成 $x\to a+0$. 数 (如果这些数存在的话)

$$f(a-0)=\lim_{x\to a-0}f(x) \quad 和 \quad f(a+0)=\lim_{x\to a+0}f(x)$$

分别称为函数 $f(x)$ 在点 a 的**左极限**和函数 $f(x)$ 在点 a 的**右极限**.

为了函数 $f(x)$ 当 $x\to a$ 时极限存在, 当且仅当它在点 a 的左右极限存在且相等, 即等式

$$f(a-0)=f(a+0)$$

成立.

如果 $\lim\limits_{x\to a}f_1(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to a}f_2(x)$ 存在, 那么下列定理成立:

1) $\lim\limits_{x\to a}[f_1(x)+f_2(x)]=\lim\limits_{x\to a}f_1(x)+\lim\limits_{x\to a}f_2(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to a}[f_1(x)\cdot f_2(x)]=\lim\limits_{x\to a}f_1(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}f_2(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a}f_2(x)}\quad\left(\lim\limits_{x\to a}f_2(x)\neq 0\right)$.

在应用中经常遇到下列极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e=2.71828\cdots.$$

例 2 求出当 $x\to 0$ 时, 函数

$$f(x)=\arctan\frac{1}{x}$$

的左极限和右极限.

解 我们有

$$f(+0)=\lim_{x\to+0}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$$

和

$$f(-0)=\lim_{x\to-0}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)=-\frac{\pi}{2}.$$

在这种情况下, 函数 $f(x)$ 当 $x\to 0$ 时的极限显然不存在.

166. 证明: 当 $n\to\infty$ 时, 序列

$$1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\cdots,\frac{1}{n^2},\cdots$$

的极限等于零. 对于怎样的 n 值将满足不等式

$$\frac{1}{n^2}<\varepsilon$$

(ε 为任意正常数)?

如果: a) $\varepsilon=0.1$; b) $\varepsilon=0.01$; c) $\varepsilon=0.001$, 请进行数值计算.

167. 证明: 当 $n\to\infty$ 时, 序列

$$x_n=\frac{n}{n+1}\quad(n=1,2,\cdots)$$

的极限等于 1. 对怎样的值 N, 当 $n>N$ 时将满足不等式

$$|x_n-1|<\varepsilon$$

(ε 为任意正常数)? 如果: a) $\varepsilon=0.1$; b) $\varepsilon=0.01$; c) $\varepsilon=0.001$, 请求出相应的 N.

168. 证明:

$$\lim_{x\to 2}x^2=4.$$

对于给定正数 ε, 如何选取某个正数 δ, 使得从不等式

$$|x-2|<\delta$$

得出不等式

$$|x^2-4|<\varepsilon?$$

如果: a) $\varepsilon=0.1$; b) $\varepsilon=0.01$; c) $\varepsilon=0.001$, 请求出相应的 δ.

169. 说明下列约定记法的确切意义:

a) $\lim\limits_{x\to+0}\lg x=-\infty$; b) $\lim\limits_{x\to+0}2^{x}=+\infty$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

170. 求出下列数列的极限:

a) $1,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{4},\cdots,\dfrac{(-1)^{n-1}}{n},\cdots$;

b) $\dfrac{2}{1},\dfrac{4}{3},\dfrac{6}{5},\cdots,\dfrac{2n}{2n-1},\cdots$;

c) $\sqrt{2},\sqrt{2\sqrt{2}},\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\cdots$;

d) $0.2,0.23,0.233,0.2333,\cdots$.

求极限:

171. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

172. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$.

173. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+3+5+7+\cdots+(2n-1)}{n+1}-\dfrac{2n+1}{2}\right]$.

174. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$.

175. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$.

176. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

177. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\right]$.

178. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$.

179. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

180. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sin n!}{n^2+1}$.

在寻找当 $x\to\infty$ 时关于 x 的两个整多项式商的极限的时候, 将商的两个多项式都预先除以 x^n 是很有效的, 这里 n 是这两个多项式的最高幂次.

在许多情况下也可以应用类似的方法, 特别对于含有无理函数的分式.

例 3

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)(3x+5)(4x-6)}{3x^3+x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2-\dfrac{3}{x}\right)\left(3+\dfrac{5}{x}\right)\left(4-\dfrac{6}{x}\right)}{3+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}=\frac{2\cdot3\cdot4}{3}=8.$$

例 4 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3+10}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+\dfrac{10}{x^3}}}=1.$

181. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$.

182. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1000x}{x^2-1}$.

183. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+1}{3x+7}$.

184. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5}$.

185. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}$.

186. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$.

187. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$.

188. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{10+x\sqrt{x}}$.

189. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$.

190. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.

如果 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 都是整多项式, 且 $P(a)\neq 0$ 或者 $Q(a)\neq 0$, 那么有理分式

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$$

的极限可直接求出.

如果 $P(a)=Q(a)=0$, 那么建议一次或者多次地约去分式 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 的二项式因子 $x-a$.

例 5 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-1}=4.$

191. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$.

192. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-5x+10}{x^2-25}$.

193. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$.

194. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^{-}4x+4}$.

195. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.

196. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$.

197. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$.

198. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

在许多情况下, 用引进新变量的方法把含有无理函数的表达式变成有理函数的形式.

例 6 求

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}.$$

解 令

$$1+x=y^6,$$

我们有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y^3-1}{y^2-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y^2+y+1}{y+1}=\frac{3}{2}.$$

199. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

200. $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$.

201. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.

202. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$.

寻找无理表达式极限的其他方法是把无理式从分子转移到分母，或者反之从分母转移到分子.

例 7

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}\ (a>0).$$

203. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

204. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$.

205. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

206. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$.

207. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

208. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$.

209. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$.

210. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$.

211. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$.

212. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x(x+a)}-x\right]$.

213. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)$.

214. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

215. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)$.

在许多情况下，当计算极限时往往用到公式

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

并假设 $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$ 和 $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$ 是已知的.

例 8 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot 5\right)=1\cdot 5=5.$

216. a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin x}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

217. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

218. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{2x}$.

219. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x}$.

220. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin\dfrac{\pi}{n}\right)$.

221. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

222. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

223. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$.

224. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\tan\pi x}{x+2}$.

225. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$.

226. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{1-\tan x}$.

227. a) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$.

228. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$.

229. $\lim\limits_{x\to 0}\cot 2x\cot\left(\dfrac{\pi}{x}-x\right)$.

230. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\dfrac{x}{2}}{\pi-x}$.

231. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$.

232. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$.

233. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

234. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

235. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan 2x}{\sin 3x}$.

236. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin \pi x}$.

237. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$.

238. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\dfrac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$.

239. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$.

240. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$.

当寻找形如

$$\lim_{x\to a}\left[\varphi(x)\right]^{\psi(x)}=C \tag{3}$$

的极限时, 指的是如下情形:

1) 如果存在有限极限

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=A \text{ 和 } \lim_{x\to a}\psi(x)=B,$$

那么 $C=A^B$.

2) 如果 $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A\neq 1$ 和 $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=\pm\infty$, 那么寻找极限 (3) 的问题就直接得到解决.

3) 如果 $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=1$ 和 $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=\infty$, 那么令 $\varphi(x)=1+\alpha(x)$, 这里当 $x\to a$ 时有 $\alpha(x)\to 0$, 于是有

$$C=\lim_{x\to a}\left\{\left[1+\alpha(x)\right]^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right\}^{\alpha(x)\psi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)\psi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}[\varphi(x)-1]\psi(x)},$$

其中 $e=2.718\cdots$ 为纳皮尔 (Napier) 数[1)].

例 9 求

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}.$$

解 这里

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)=2 \quad \text{以及} \quad \lim_{x\to 0}(1+x)=1,$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}=2^1=2.$$

例 10 求

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}.$$

解 我们有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x}}{2+\dfrac{1}{x}}=\frac{1}{2}$$

1) J. Napier (1550—1617), 英国人, 自然对数创始人, $\log_e a\equiv\ln a$ 就是为了纪念他. —— 译注

和

$$\lim_{x\to\infty} x^2 = +\infty.$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2} = 0.$$

例 11 求

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}.$$

解 我们有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 1.$$

进行上面指出的变换, 我们得到

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left[1+\left(\frac{x-1}{x+1}-1\right)\right]^{x}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left\{\left[1+\left(\frac{-2}{x+1}\right)\right]^{\frac{x+1}{-2}}\right\}^{\frac{2x}{1+x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+1}} = e^{-2}.$$

在这种情况下, 不必采用一般的方法, 可以更简单地求出极限:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}} = e^{-2}.$$

一般来说, 记住公式

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x} = e^{k}$$

是有用处的.

求出下列单侧极限:

241. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x}{3-x}\right)^{x}$.

242. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}$.

243. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}$.

244. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$.

245. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$.

246. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n}$.

247. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$.

248. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x}$.

249. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$.

250. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{n}$.

251. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

252.** a) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

当计算含有下面的极限时, 知道如下事实是有用的: 如果极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在且为正的, 那么

$$\lim_{x\to a}[\ln f(x)] = \ln\left[\lim_{x\to a} f(x)\right].$$

例 12 证明

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \qquad (*)$$

解 我们有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln e = 1.$$

在解题时常常用到公式 (*).

253. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln(2x+1)-\ln(x+2)\right]$.

254. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\lg(1+10x)}{x}$.

255. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$.

256. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\ln(x+1)-\ln x\right]$.

257. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$.

258*. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

259*. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$ $(a>0)$.

260*. $\lim\limits_{x\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$ $(a>0)$.

261. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$.

262. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x}}{\sin x}$.

263. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh} x}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch} x-1}{x^2}$ (见 **103** 和 **104** 题).

求出下列单侧极限:

264. a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

265. a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{th} x$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{th} x$, 这里 $\operatorname{th} x = \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

266. a) $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$; b) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

267. a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$.

268. a) $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{|\sin x|}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{|\sin x|}{x}$.

269. a) $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x-1}{|x-1|}$; b) $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x-1}{|x-1|}$.

270. a) $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{x}{x-2}$; b) $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{x}{x-2}$.

作出下列函数的图形:

271**. $y = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos^{2n} x\right)$.

272*. $y = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{1+x^n}$ $(x\geqslant 0)$.

273. $y = \lim\limits_{\alpha\to\infty}\sqrt{x^2+\alpha^2}$.

274. $y = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\arctan nx\right)$.

275. $y = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}$ $(x\geqslant 0)$.

276. 将混合循环小数

$$\alpha = 0.13555\cdots$$

看成适当的有限小数的极限, 从而把它化成通常的分数.

277. 如果系数 a 趋向于零, 而系数 b 和 c 为常数, 而且 $b \neq 0$, 那么二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0$$

的根将趋向于什么?

278. 求出正 n 边形当 $n \to \infty$ 时其内角的极限.

279. 求出当 $n \to \infty$ 时内接和外切于半径为 R 之圆的正 n 边形周长的极限.

280. 求出曲线

$$y = e^{-x}\cos \pi x$$

在点 $x = 0, 1, 2, \cdots, n$ 处所算出纵坐标的高度之和当 $n \to \infty$ 时的极限.

281. 求出以曲线

$$y = 2^{1-x}$$

的纵坐标为底边 (其中 $x = 1, 2, 3, \cdots, n$) 所构造成正方形面积之和当 $n \to \infty$ 时的极限.

282. 求出内接于对数螺线

$$r = e^{-\varphi}$$

的折线 $M_0M_1\cdots M_n$ 长度当 $n \to \infty$ 时的极限, 其中对应于这条折线顶点的极角坐标为

$$\varphi_0 = 0,\ \varphi_1 = \frac{\pi}{2},\ \cdots,\ \varphi_n = \frac{n\pi}{2}.$$

283. 将线段 $AB = a$ (图 7) 分成相等的 n 部分, 并在得到的每一部分上, 以它作为底边构造等腰三角形, 其底边上的角等于 $\alpha = 45°$. 证明: 所形成折线总长的极限不等于线段 AB 的长度, 尽管折线的极限 “几何上与线段 AB 完全融合起来”.

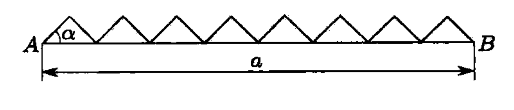


图 7

284. 点 C_1 将线段 $AB = l$ 等分, 点 C_2 将线段 AC_1 等分, 点 C_3 将线段 C_2C_1 等分, 点 C_4 将线段 C_2C_3 等分, 如此等等. 确定当 $n \to \infty$ 时, 点 C_n 的极限位置.

285. 将直角三角形的直角边 a 分成 n 个相等部分, 并在所得部分上构造内接矩形 (图 8). 确定所得到的阶梯状图形面积当 $n \to \infty$ 时的极限.

286. 从方程

$$\lim_{n\to\infty}\left\{kx+b-\frac{x^3+1}{x^2+1}\right\}=0 \qquad (1)$$

求出常数 k 和 b. 说明等式 (1) 的几何意义.

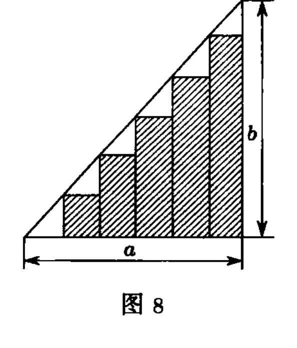


图 8

287*. 某些化学过程是这样进行的, 在长度为 τ 的无限时间区间序列 $(i\tau,(i+1)\tau)$ $(i=0,1,2,\cdots)$ 的每一个区间中, 物质数量的增长量都与该区间初始时刻所具有的物质数量以及区间大小 τ 的乘积成正比. 假设在初始时刻的物质数量为 Q_0, 将时间区间 $[0,t]$ 进行 n 等分, 如果物质数量的增长进行于时间区间长度为 $\tau=\dfrac{t}{n}$ 的每一部分, 试确定在时刻 t 的物质数量 $Q_t^{(n)}$.

求出 $Q_t=\lim\limits_{n\to\infty}Q_t^{(n)}$.

§4. 无穷小和无穷大

1°. **无穷小**. 如果

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0,$$

亦即如果无论 $\varepsilon>0$ 如何小, 总存在 $\delta(\varepsilon)>0$ 使得当 $0<|x-a|<\delta(\varepsilon)$ 时就有 $|\alpha(x)|<\varepsilon$, 那么就称当 $x\to a$ 时函数 $\alpha(x)$ 为**无穷小**. 类似地定义当 $x\to\infty$ 时的无穷小 $\alpha(x)$.

有限多个当 $x\to a$ 时为无穷小函数的和或者积当 $x\to a$ 时还是为无穷小.

如果当 $x\to a$ 时 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 都为无穷小, 而且

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C,$$

其中 C 为某个不为零的数, 那么就称函数 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 为**同阶无穷小**; 如果 $C=0$, 那么就称函数 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ **高阶的无穷小**. 如果

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^n}=C,$$

其中 $0<|C|<+\infty$, 就称函数 $\alpha(x)$ 是函数 $\beta(x)$ 的 n **阶无穷小**.

如果

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1,$$

那么就称函数 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 当 $x\to a$ 时是**等价无穷小**, 并记为:

$$\alpha(x)\sim\beta(x).$$

例如, 当 $x\to 0$ 时我们有:

$$\sin x\sim x,\quad \tan x\sim x,\quad \ln(1+x)\sim x,$$

等等.

两个不同阶无穷小之和等价于其阶数较低的那一项.

如果把两个无穷小之比的项用与之等价的量代替, 那么这个比式的极限不变. 由于这条定理, 当寻找分式

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

的极限时, 其中当 $x \to a$ 时有 $\alpha(x) \to 0$ 和 $\beta(x) \to 0$, 可以在分式的分子和分母中减去 (增加) 高阶无穷小, 使得到的量仍然与先前等价.

例

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x^4}}{\ln(1 + 2x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3}}{2x} = \frac{1}{2}.$$

2°. **无穷大**. 如果对于无论如何大的数 N, 总存在这样的 $\delta(N)$, 使得当 $0 < |x - a| < \delta(N)$ 时就满足不等式

$$|f(x)| > N,$$

那么就称当 $x \to a$ 时函数 $f(x)$ 为**无穷大**.

类似地定义当 $x \to \infty$ 时 $f(x)$ 为无穷大. 完全相似于对无穷小所做的那样, 可以引进无穷大各种阶的概念.

288. 证明函数

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

当 $x \to \infty$ 时是无穷小. 如果 ε 是任意的数, 那么 x 是怎样的值才能满足不等式

$$|f(x)| < \varepsilon\ ?$$

对于 a) $\varepsilon = 0.1$; b) $\varepsilon = 0.01$; c) $\varepsilon = 0.001$ 进行计算.

289. 证明函数

$$f(x) = 1 - x^2$$

当 $x \to 1$ 时是无穷小. 如果 ε 是任意的正数, 那么 x 是怎样的值才能满足不等式

$$|f(x)| < \varepsilon\ ?$$

对于 a) $\varepsilon = 0.1$; b) $\varepsilon = 0.01$; c) $\varepsilon = 0.001$ 进行数值计算.

290. 证明函数

$$f(x) = \frac{1}{x - 2}$$

当 $x \to 2$ 时是无穷大. 如果 N 是任意的正数, 那么在怎样的邻域 $|x - 2| < \delta$ 中才能满足不等式

$$|f(x)| > N\ ?$$

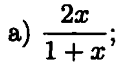
如果 a) $N = 10$; b) $N = 100$; c) $N = 1000$, 求出 δ.

291. 如果球的半径 r 为 1 阶无穷小, 确定下列小量的阶数: a) 球的表面积; b) 球的体积. 球的半径和球的体积相对于这个球的表面积, 其无穷小阶数是什么?

292. 假设半径为 R 的圆扇形 ABO (图 9) 的中心角 α 趋于零. 确定下列无穷小关于无穷小 α 的阶数: a) 弦 AB; b) “指针” CD; c) $\triangle ABD$ 的面积.

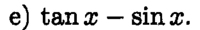
图 9

293. 当 $x \to 0$ 时, 确定下列函数关于 x 的无穷小阶数:



a) $\dfrac{2x}{1+x}$;　　b) $\sqrt{x+\sqrt{x}}$;

c) $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x^3}$;　　d) $1-\cos x$;



e) $\tan x - \sin x$.

294. 证明: 在半径不变的圆中, 其无穷小的弧长等价于连接该圆弧的弦长.

295. 无穷小线段是否等价于以此线段为直径作出的无穷小半圆呢?

利用关于两个无穷小之比的定理, 求出:

296. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x \cdot \sin 5x}{(x-x^3)^2}$.　　**297**. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}$.

298. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1-x}$.　　**299**. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}$.

300. 证明: 当 $x \to 0$ 时, 量 $\dfrac{x}{2}$ 和 $\sqrt{1+x}-1$ 彼此等价. 利用这个结果证明: 当 $|x|$ 很小时有如下近似等式成立:

$$\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{x}{2}. \tag{1}$$

应用公式 (1), 近似地求出:

a) $\sqrt{1.06}$;　b) $\sqrt{0.97}$;　c) $\sqrt{10}$;　d) $\sqrt{120}$,

并把得到的数值与已知数表的值进行比较.

301. 证明: 当 $x \to 0$ 时准确到 x^2 阶的项有下列近似等式成立:

a) $\dfrac{1}{1+x} \approx 1-x$;

b) $\sqrt{a^2+x} \approx a+\dfrac{x}{2a}$ $(a>0)$;

c) $(1+x)^n \approx 1+nx$ (n 为正整数);

d) $\lg(1+x) \approx Mx$, 这里 $M=\lg e = 0.43429\cdots$.

根据这些公式, 进行下列近似计算:

1) $\dfrac{1}{1.02}$;　2) $\dfrac{1}{0.97}$;　3) $\dfrac{1}{105}$;　4) $\sqrt{15}$;　5) 1.04^3;　6) 0.93^4;　7) $\lg 1.1$.

把得到的数值与已知数表的值进行比较.

302. 证明: 当 $x \to \infty$ 时整有理函数

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \ (a_0 \neq 0)$$

是等价于其最高幂次项 a_0x^n 的无穷大量.

303. 设 $x \to \infty$. 取 x 作为 1- 阶无穷大量, 确定下列函数的增长阶数:

a) $x^2 - 100x - 1000$;　　　　b) $\dfrac{x^5}{x+2}$;

c) $\sqrt{x+\sqrt{x}}$;　　　　d) $\sqrt[3]{x-2x^2}$.

§5. 函数的连续性

1°. **连续性定义**. 称函数 $f(x)$ 当 $x=\xi$ 时 (或者 "在点 ξ 处") **为连续的**, 如果: 1) 这个函数在点 ξ 处有定义, 亦即存在数值 $f(\xi)$; 2) 存在有限极限 $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)$; 3) 这个极限等于函数在点 ξ 处的值, 亦即

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi). \tag{1}$$

令

$$x = \xi + \Delta\xi,$$

这里 $\Delta\xi \to 0$, 于是可以将条件 (1) 重新写成:

$$\lim_{\Delta\xi\to 0} \Delta f(\xi) = \lim_{\Delta\xi\to 0} \left[f(\xi+\Delta\xi) - f(\xi)\right] = 0,$$

亦即函数 $f(x)$ 在点 ξ 处连续当且仅当在这点处自变量的无穷小增量对应着函数的无穷小增量.

如果函数在某个区域 (区间、线段等等) 的每一点处都连续, 那么就称它**在这个区域中连续**.

例 1 证明函数

$$y = \sin x$$

对任何自变量 x 都连续.

解 我们有

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \Delta x.$$

由于

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} = 1 \text{ 以及 } \left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant 1,$$

所以对任何的 x 我们有

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0.$$

因而, 函数 $\sin x$ 当 $-\infty < x < +\infty$ 时连续.

2°. **函数的间断点**. 称函数 $f(x)$ 当属于函数定义域或者是这个区域边界的值 $x = x_0$ 时 (或者在点 x_0 处) **受到连续性的间断**, 如果在这一点处, 连续性条件被破坏了.

例 2 函数 $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ (图 10, a) 当 $x=1$ 时间断. 这个函数在点 $x=1$ 处

没有定义, 无论我们怎样选取数 $f(1)$, 添加这个值后的函数 $f(x)$ 当 $x=1$ 时都不会是连续的.

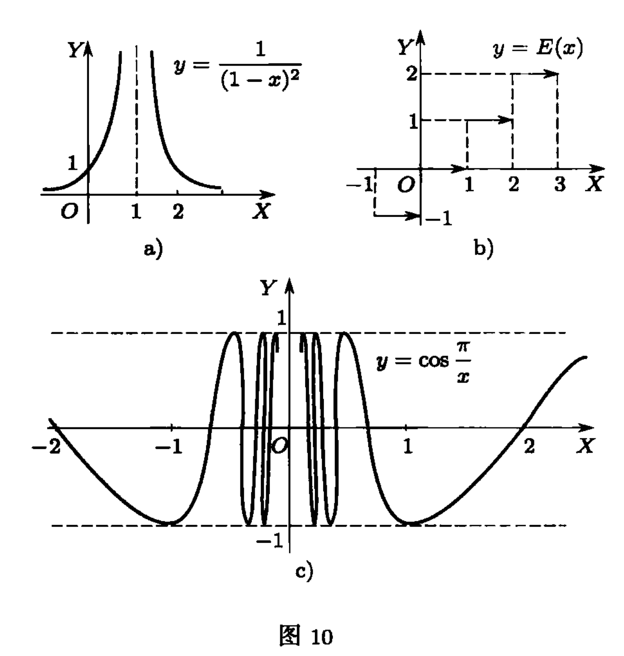


图 10

如果对于函数 $f(x)$ 存在有限极限

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0) \quad 和 \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0),$$

而且不是所有三项 $f(x_0), f(x_0-0), f(x_0+0)$ 都彼此相等, 那么就称 x_0 为**第一类间断点**. 特别, 如果

$$f(x_0-0)=f(x_0+0),$$

则称 x_0 为**可去间断点**.

为了函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 其充分而且必要的条件是

$$f(x_0)=f(x_0-0)=f(x_0+0).$$

例 3 函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$ 当 $x=0$ 时有第一类间断点. 事实上, 这时有

$$f(+0)=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{|x|}=+1,$$
$$f(-0)=\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{|x|}=-1.$$

例 4 函数 $y=E(x)$ 在每一个整数点 $x=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 处都是间断的 (图 10, b), 而且都是第一类间断点, 这里 $E(x)$ 表示数 x 的整数部分 (亦即 $E(x)$ 是满足等式 $x=E(x)+q$ 的整数, 其中 $0\leqslant q<1$).

实际上, 如果 n 为整数, 那么 $E(n-0)=n-1$ 和 $E(n+0)=n$. 这个函数在所有其余的点显然都是连续的.

不是第一类间断的函数的间断点, 就称它为**第二类间断点**.

在第二类间断点中还包括所谓的**无穷间断点**, 亦即这样的点 x_0, 它的两个单侧极限 $f(x_0-0)$ 和 $f(x_0+0)$ 至少有一个等于 ∞ (见例 2).

例 5 函数 $y=\cos\dfrac{\pi}{x}$ (图 10, c) 在 $x=0$ 处有第二类间断点. 因为在这点处两个单侧极限

$$\lim_{x\to-0}\cos\frac{\pi}{x} \quad 和 \quad \lim_{x\to+0}\cos\frac{\pi}{x}$$

都不存在.

3°. **连续函数的性质**. 当研究函数的连续性时, 心目中应当有下列定理:

1) 有限多个在某个区域中连续的函数之和或者乘积也在这个区域中连续;

2) 两个在某个区域中连续的函数相除之商, 当自变量在这个区域中取所有不使得除数变成零的值时是连续的.

3) 如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续, 而且它的值集被包含在区间 (A,B) 内, 以及函数 $\varphi(x)$ 在区间 (A,B) 内连续, 那么复合函数 $\varphi[f(x)]$ 在区间 (a,b) 内连续.

在区间 $[a,b]$ 上连续的函数具有下列性质:

1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 亦即存在某个数 M, 使得当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时有 $|f(x)|\leqslant M$;

2) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最小值和最大值;

3) $f(x)$ 取在两个给定函数值之间的所有中间值, 亦即如果 $f(\alpha)=A$ 和 $f(\beta)=B$ $(a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b)$, 以及 $A\neq B$, 那么对于被包含在数 A 与 B 之间的无论怎样的数 C, 总至少存在一个值 $x=\gamma$ $(\alpha<\gamma<\beta)$, 使得 $f(\gamma)=C$.

特别, 如果 $f(\alpha)f(\beta)<0$, 那么方程

$$f(x)=0$$

在区间 (α,β) 中至少有一个实根.

304. 证明: 函数 $y=x^2$ 当自变量 x 任意值时都连续.

305. 证明: 整有理函数

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

对任意 x 值时都连续.

306. 证明: 分式有理函数

$$R(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$$

除了那些使得分母变成零的自变量外, 对所有 x 值都连续.

307*. 证明: 函数 $y=\sqrt{x}$ 当 $x\geqslant 0$ 连续.

308. 证明: 如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续且非负, 那么函数

$$F(x)=\sqrt{f(x)}$$

也在这个区间内连续.

309*. 证明: 函数 $y=\cos x$ 对任意 x 连续.

310. 函数 a) $\tan x$; b) $\cot x$ 对怎样的 x 值连续呢?

311*. 证明: 函数 $y=|x|$ 连续, 并作出这个函数的图形.

312. 证明: 连续函数的模也是连续函数.

313. 用公式

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{当 } x\neq 2 \text{ 时},\\ A, & \text{当 } x=2 \text{ 时}\end{cases}$$

给出函数. 应该如何选取函数值 $A=f(2)$, 使得这样增补后的函数 $f(x)$ 当 $x=2$ 时是连续的? 作出函数 $y=f(x)$ 的图形.

314. 当 $x=0$ 时, 等式

$$f(x)=1-x\sin\frac{1}{x}$$

的右边没有意义. 为了使得函数 $f(x)$ 当 $x=0$ 时是连续的, 应当怎样选取 $f(0)$ 的值呢?

315. 当 $x=2$ 时函数

$$f(x)=\arctan\frac{1}{x-2}$$

没有意义. 能否确定 $f(2)$ 的值, 使得增补后的函数当 $x=2$ 时是连续的?

316. 函数 $f(x)$ 当 $x=0$ 时没有定义. 确定 $f(0)$ 的值, 使得 $f(x)$ 当 $x=0$ 时连续; 如果:

a) $f(x)=\dfrac{(1+x)^n-1}{x}$ (n 为正整数);　b) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

c) $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$;　d) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$;

e) $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$;　f) $f(x)=x\cot x$.

研究函数的连续性:

317. $y=\dfrac{x^2}{x-2}$.

318. $y=\dfrac{1+x^3}{1+x}$.

319. $y=\dfrac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$.

320. $y=\dfrac{x}{|x|}$.

321. a) $y=\sin\dfrac{\pi}{x}$; b) $y=x\sin\dfrac{\pi}{x}$.

322. $y=\dfrac{x}{\sin x}$.

323. $y=\ln(\cos x)$.

324. $y=\ln\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|$.

325. $y=\arctan\dfrac{1}{x}$.

326. $y=(1+x)\arctan\dfrac{1}{1-x^2}$.

327. $y=e^{\frac{1}{x+1}}$.

328. $y=e^{-\frac{1}{x^2}}$.

329. $y=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}}$.

330. $y=f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{当 } x\leqslant 3 \text{ 时},\\ 2x+1, & \text{当 } x>3 \text{ 时},\end{cases}$ 作出这个函数的图形.

331. 证明: 当 x 为无理数时等于零, 而当 x 为有理数时等于 1 的狄利克雷函数 $\chi(x)$ 对每一个 x 值都是间断的.

研究下面函数的连续性, 并作出其图形:

332. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+x^n}$ $(x \geqslant 0)$.

333. $y = \lim\limits_{n\to\infty} (x \arctan nx)$.

334. a) $y = \operatorname{sgn} x$; b) $y = x \operatorname{sgn} x$; c) $y = \operatorname{sgn}(\sin x)$, 其中函数 $\operatorname{sgn} x$ 用公式

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & \text{如果 } x > 0, \\ 0, & \text{如果 } x = 0, \\ -1, & \text{如果 } x < 0 \end{cases}$$

定义.

335. a) $y = x - E(x)$; b) $y = xE(x)$, 这里 $E(x)$ 是数 x 的整数部分.

336. 引用例子说明: 两个间断函数的和可以是连续函数.

337*. 设 α 是一个趋于零的正的真分数 $(0 < \alpha < 1)$. 是否可以在对一切 α 值都正确的等式

$$E(1+\alpha) = E(1-\alpha) + 1$$

中代入 α 的极限值?

338. 证明: 方程

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

在区间 $(1, 2)$ 内有实根. 近似算出这个根.

339. 证明: 任何奇次幂多项式 $P(x)$ 至少有一个实根.

340. 证明: 方程

$$\tan x = x$$

的实根是一个无穷集合.

第二章　函数的微分法

§1. 导数的直接计算

1°. **自变量的增量和函数的增量**. 如果 x 和 x_1 都是自变量 x 的值, 而 $y=f(x)$ 和 $y_1=f(x_1)$ 是函数 $y=f(x)$ 对应的值, 那么

$$\Delta x = x_1 - x$$

就称为在区间 $[x,x_1]$ 上**自变量 x 的增量**, 而

$$\Delta y = y_1 - y,$$

或者

$$\Delta y = f(x_1) - f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) \tag{1}$$

就称为在同一区间 $[x,x_1]$ 上**函数 y 的增量** (图 11, 其中 $\Delta x = MA$ 和 $\Delta y = AN$). 显然,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\alpha$$

是函数 $y=f(x)$ 图形上割线 MN 的斜率 (图 11), 并称它为函数 y 在区间 $[x,x+\Delta x]$ 上变化的**平均速度**.

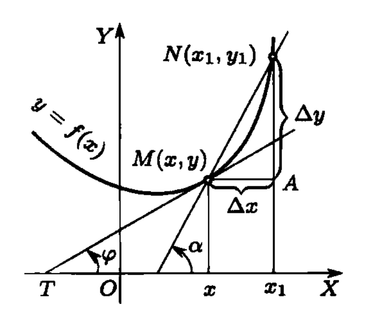


图 11

例 1　对于函数

$$y = x^2 - 5x + 6,$$

算出 Δx 和对应于自变量变化的 Δy:

a) 从 $x=1$ 到 $x=1.1$;

b) 从 $x=3$ 到 $x=2$.

解　我们有

a) $\Delta x = 1.1 - 1 = 0.1$,

$\Delta y = (1.1^2 - 5\cdot 1.1 + 6) - (1^2 - 5\cdot 1 + 6) = -0.29.$

b) $\Delta x = 2 - 3 = -1$,

$$\Delta y = (2^2 - 5\cdot 2 + 6) - (3^2 - 5\cdot 3 + 6) = 0.$$

例 2 对于双曲线 $y = \frac{1}{x}$, 找出通过横坐标为 $x = 3$ 和 $x_1 = 10$ 之点的割线斜率.

解 这时有

$$\Delta x = 10 - 3 = 7; \quad y = \frac{1}{3}, \quad y_1 = \frac{1}{10}, \quad \Delta y = \frac{1}{10} - \frac{1}{3} = -\frac{7}{30},$$

于是

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{30}.$$

2°. **导数**. 当 Δx 趋向于零时, 关系式 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限就称为函数 $y = f(x)$ 对自变量 x 的**导数** $y' = \frac{dy}{dx}$, 亦即

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

如果这个极限存在.

导数的值就是函数 $y = f(x)$ 的图形在点 x 处切线 MT 的**斜率** (图 11):

$$y' = \tan\varphi.$$

导数 y' 的求法就称为**函数的微分法**. 导数 $y' = f'(x)$ 也是在点 x 处**函数的变化速度**.

例 3 求出函数

$$y = x^2$$

的导数.

解 按照公式 (1) 我们得到

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

以及

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

于是

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x + \Delta x) = 2x.$$

3°. **单侧导数**. 表达式

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x\to -0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

和

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x\to +0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

分别称为函数 $f(x)$ 在点 x 处的**左导数**和**右导数**. 为使 $f'(x)$ 存在, 其充要条件是

$$f'_-(x) = f'_+(x).$$

例 4 求出函数

$$f(x) = |x|$$

的 $f'_-(0)$ 和 $f'_+(0)$.

解　按照定义, 我们有

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1, \qquad f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1.$$

4°. **无穷导数**. 如果在某点处我们有

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \infty,$$

那么就称连续函数 $f(x)$ 在点 x 处有无穷导数. 这时函数 $y = f(x)$ 图形的切线垂直于 OX 轴.

例 5　对于函数

$$y = \sqrt[3]{x},$$

求出 $f'(0)$.

解　我们有

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = \infty.$$

341. 求出函数 $y = x^2$ 当自变量做如下变动

a) 从 $x = 1$ 到 $x_1 = 2$;

b) 从 $x = 1$ 到 $x_1 = 1.1$;

c) 从 $x = 1$ 到 $x_1 = 1 + h$

时函数相应的增量.

342. 对于函数 $y = \sqrt[3]{x}$, 如果:

a) $x = 0$, $\Delta x = 0.001$;

b) $x = 8$, $\Delta x = -9$;

c) $x = a$, $\Delta x = h$,

求出 Δy.

343. 为什么对于函数 $y = 2x + 3$ 只要知道增量 $\Delta x = 5$, 就可以确定对应的函数增量 Δy, 而对于函数 $y = x^2$ 就不能这样做呢?

344. 对于下列函数:

a) $y = \dfrac{1}{(x^2-2)^2}$, 当 $x = 1$ 和 $\Delta x = 0.4$ 时;

b) $y = \sqrt{x}$, 当 $x = 0$ 和 $\Delta x = 0.0001$ 时;

c) $y = \lg x$, 当 $x = 100000$ 和 $\Delta x = -90000$ 时,

求出增量 Δy 和比式 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

345. 对于函数:

a) $y = ax + b$;　　b) $y = x^3$;

c) $y = \dfrac{1}{x^2}$;　　d) $y = \sqrt{x}$;

e) $y = 2^x$;　　f) $y = \ln x$,

求出对应于自变量从 x 到 $x+\Delta x$ 时的 Δy 和 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

346. 如果抛物线

$$y = 2x - x^2$$

与割线交点的横坐标为

a) $x_1 = 1,\ x_2 = 2$;

b) $x_1 = 1,\ x_2 = 0.9$;

c) $x_1 = 1,\ x_2 = 1 + h$,

求出割线的斜率. 在最后一种情况下, 如果 $h \to 0$, 割线趋向于怎样的极限呢?

347. 函数 $y = x^3$ 在区间 $1 \leqslant x \leqslant 4$ 上变动的平均速度是多少呢?

348. 点的运动规律为 $s = t^2 + 3t + 5$, 其中距离 s 以厘米 (cm) 给出, 而时间 t 以秒 (s) 计算. 在从 $t = 1$ 到 $t = 5$ 的时间间隔中, 点的平均速度是多少呢?

349. 求出曲线 $y = 2^x$ 在区间 $1 \leqslant x \leqslant 5$ 上的平均升高.

350. 求出曲线 $y = f(x)$ 在区间 $[x, x+\Delta x]$ 上的平均升高.

351. 如何理解曲线 $y = f(x)$ 在给定点 x 处的升高呢?

352. 给出下面概念的定义: a) 平均旋转速度; b) 瞬时旋转速度.

353. 对放在较低温度介质中的热物体进行冷却. 应当如何理解下面概念: a) 冷却的平均速度? b) 在给定时刻的冷却速度?

354. 在化学反应中, 如何理解所谓的物质反应速度呢?

355. 设 $m = f(x)$ 是非均匀杆在区间 $[0, x]$ 上的质量. 应当如何理解下面概念: a) 杆在区间 $[x, x+\Delta x]$ 上的平均线密度? b) 杆在点 x 处的线密度?

356. 如果: a) $\Delta x = 1$; b) $\Delta x = 0.1$; c) $\Delta x = 0.01$, 求出函数 $y = \frac{1}{x}$ 在点 $x = 2$ 处的比式 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. 当 $x = 2$ 时导数 y' 等于什么?

357.** 求出函数 $y = \tan x$ 的导数.

358. 对于函数:

a) $y = x^3$; b) $y = \frac{1}{x^2}$; c) $y = \sqrt{x}$; d) $y = \cot x$,

求出 $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

359. 如果 $f(x) = \sqrt[3]{x}$, 算出 $f'(8)$.

360. 如果 $f(x) = x(x-1)^2(x-2)^3$, 算出 $f'(0), f'(1), f'(2)$.

361. 在怎样的点处, 函数 $f(x) = x^3$ 的导数与函数本身的值在数值上完全一致, 亦即 $f(x) = f'(x)$?

362. 点的运动规律为 $s = 5t^2$, 其中距离 s 以米 (m) 给出, 而时间 t 以秒 (s) 计算. 求出在时刻 $t = 3$ 的运动速度.

363. 求出曲线 $y = 0.1x^3$ 上经过横坐标为 $x = 2$ 点处切线的斜率.

364. 求出曲线 $y = \sin x$ 上经过点 $(\pi, 0)$ 处切线的斜率.

365. 求出函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在点 $x=x_0$ $(x_0\neq 0)$ 处导数的值.

366*. 曲线 $y=\frac{1}{x}$ 和 $y=x^2$ 在它们相交点处切线的斜率等于什么? 求出这两条切线之间的夹角.

367**. 证明: 下列函数在指定点处没有有限导数:

a) $y=\sqrt[3]{x^2}$ 在点 $x=0$ 处;

b) $y=\sqrt[5]{x-1}$ 在点 $x=1$ 处;

c) $y=|\cos x|$ 在点 $x=\frac{2k+1}{2}\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$ 处.

§2. 按基本函数导数公式表求导数

1°. **求导数的基本规则**. 如果 c 是常数, 而 $u=\varphi(x)$, $v=\psi(x)$ 都是有导数的函数, 那么

1) $(c)'=0$;

2) $(x)'=1$;

3) $(u\pm v)'=u'\pm v'$;

4) $(cu)'=cu'$;

5) $(uv)'=u'v+v'u$;

6) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$ $(v\neq 0)$;

7) $\left(\frac{c}{v}\right)'=-\frac{cv'}{v^2}$ $(v\neq 0)$.

2°. **基本函数的导数表**.

Ⅰ. $(x^n)'=nx^{n-1}$.

Ⅱ. $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x>0)$.

Ⅲ. $(\sin x)'=\cos x$.

Ⅳ. $(\cos x)'=-\sin x$.

Ⅴ. $(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$.

Ⅵ. $(\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$.

Ⅶ. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x|<1)$.

Ⅷ. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x|<1)$.

Ⅸ. $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$.

Ⅹ. $(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

Ⅺ. $(a^x)'=a^x\ln a$.

Ⅻ. $(e^x)'=e^x$.

XIII. $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ $(x>0)$.

XIV. $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}=\frac{\log_a e}{x}$ $(x>0,\ a>0)$.

XV. $(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x$.

XVI. $(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x$.

XVII. $(\operatorname{th} x)'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

XVIII. $(\operatorname{cth} x)'=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

XIX. $(\operatorname{Arsh} x)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

XX. $(\operatorname{Arch} x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $(|x|>1)$.

XXI. $(\operatorname{Arth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$ $(|x|<1)$.

XXII. $(\operatorname{Arcth} x)' = -\dfrac{1}{x^2-1}$ $(|x|>1)$.

3°. **复合函数的求导数规则**. 如果 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$, 亦即 $y=f[\varphi(x)]$, 其中 y 和 u 都有导数, 那么

$$y'_x = y'_u u'_x, \tag{1}$$

或者用另一种记法

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

这个规则可以推广到任意一串有限多个可微函数上去.

例 1 求出函数

$$y=(x^2-2x+3)^5$$

的导数.

解 令 $y=u^5$, 其中 $u=x^2-2x+3$, 根据公式 (1) 我们有

$$y'=(u^5)'_u(x^2-2x+3)'_x = 5u^4(2x-2)=10(x-1)(x^2-2x+3)^4.$$

例 2 求出函数

$$y=\sin^3 4x$$

的导数.

解 令

$$y=u^3,\quad u=\sin v,\quad v=4x,$$

我们求得

$$y'=3u^2\cdot\cos v\cdot 4 = 12\sin^2 4x\cos 4x.$$

求出下列函数的导数 (在从第 368 题到第 408 题中不用复合函数求导数规则):

A. 代 数 函 数

368. $y=x^5-4x^3+2x-3$.

369. $y=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}x+x^2-0.5x^4$.

370. $y=ax^2+bx+c$.

371. $y=-\dfrac{5x^3}{a}$.

372. $y=at^m+bt^{m+n}$.

373. $y=\dfrac{ax^6+b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

374. $y=\dfrac{\pi}{x}+\ln 2$.

375. $y=3x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{5}{2}}+x^{-3}$.

376*. $y=x^2\sqrt[3]{x^2}$.

377. $y=\dfrac{a}{\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{b}{x\sqrt[3]{x}}$.

378. $y=\dfrac{a+bx}{c+dx}$.

379. $y=\dfrac{2x+3}{x^2-5x+5}$.

380. $y = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x}$.

381. $y = \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}$.

B. 三角函数和反三角函数

382. $y = 5\sin x + 3\cos x$.

383. $y = \tan x - \cot x$.

384. $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

385. $y = 2t\sin t - (t^2 - 2)\cos t$.

386. $y = \arctan x - \operatorname{arccot} x$.

387. $y = x\cot x$.

388. $y = x\arcsin x$.

389. $y = \frac{(1+x^2)\arctan x - x}{2}$.

C. 指数函数和对数函数

390. $y = x^7 e^x$.

391. $y = (x-1)e^x$.

392. $y = \frac{e^x}{x^2}$.

393. $y = \frac{x^5}{e^x}$.

394. $y = e^x \cos x$.

395. $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$.

396. $y = e^x \arcsin x$.

397. $y = \frac{x^2}{\ln x}$.

398. $y = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3}$.

399. $y = \frac{1}{x} + 2\ln x - \frac{\ln x}{x}$.

400. $y = \ln x \lg x - \ln a \log_a x$.

D. 双曲函数和反双曲函数

401. $y = x \operatorname{sh} x$.

402. $y = \frac{x^2}{\operatorname{ch} x}$.

403. $y = \operatorname{th} x - x$.

404. $y = \frac{3\operatorname{cth} x}{\ln x}$.

405. $y = \arctan x - \operatorname{Arth} x$.

406. $y = \arcsin x \operatorname{Arsh} x$.

407. $y = \frac{\operatorname{Arch} x}{x}$.

408. $y = \frac{\operatorname{Arcth} x}{1-x^2}$.

E. 复 合 函 数

求出下列函数的导数 (在从第 409 题到第 466 题中必须利用带有一个中间变量的复合函数求导数规则):

409.** $y = (1 + 3x - 5x^2)^{30}$.

解 记 $1 + 3x - 5x^2 = u$, 于是 $y = u^{30}$. 我们有

$$y'_u = 30u^{29}, \quad u'_x = 3 - 10x,$$

因此

$$y'_x = 30u^{29} \cdot (3 - 10x) = 30(1 + 3x - 5x^2)^{29} \cdot (3 - 10x).$$

410. $y = \left(\frac{ax+b}{c}\right)^3$.

411. $f(y)=(2a+3by)^2$.

412. $y=(3+2x^2)^4$.

413. $y=\dfrac{3}{56(2x-1)^7}-\dfrac{1}{24(2x-1)^6}-\dfrac{1}{40(2x-1)^5}$.

414. $y=\sqrt{1-x^2}$.

415. $\sqrt[3]{a+bx^3}$.

416. $y=\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

417. $y=(3-2\sin x)^5$.

解 $y'=5(3-2\sin x)^4\cdot(3-2\sin x)'=5(3-2\sin x)^4(-2\cos x)$
$=-10\cos x(3-2\sin x)^4$.

418. $y=\tan x-\dfrac{1}{3}\tan^3 x+\dfrac{1}{5}\tan^5 x$.

419. $y=\sqrt{\cot x}-\sqrt{\cot\alpha}$.

420. $y=2x+5\cos^3 x$.

421*. $x=\csc^2 t+\sec^2 t$.

422. $f(x)=-\dfrac{1}{6(1-3\cos x)^2}$.

423. $y=\dfrac{1}{3\cos^3 x}-\dfrac{1}{\cos x}$.

424. $y=\sqrt{\dfrac{3\sin x-2\cos x}{5}}$.

425. $y=\sqrt[3]{\sin^2 x}+\dfrac{1}{\cos^3 x}$.

426. $y=\sqrt{1+\arcsin x}$.

427. $y=\sqrt{\arctan x}-(\arcsin x)^3$.

428. $y=\dfrac{1}{\arctan x}$.

429. $y=\sqrt{xe^x+x}$.

430. $y=\sqrt[3]{2e^x-2^x+1}+\ln^5 x$.

431. $y=\sin 3x+\cos\dfrac{x}{5}+\tan\sqrt{x}$.

解 $y'=\cos 3x\cdot(3x)'-\sin\dfrac{x}{5}\left(\dfrac{x}{5}\right)'+\dfrac{1}{\cos^2\sqrt{x}}(\sqrt{x})'$
$=3\cos 3x-\dfrac{1}{5}\sin\dfrac{x}{5}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$.

432. $y=\sin(x^2-5x+1)+\tan\dfrac{a}{x}$.

433. $f(x)=\cos(\alpha x+\beta)$.

434. $f(t)=\sin t\sin(t+\varphi)$.

435. $y=\dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$.

436. $f(x)=a\cot\dfrac{x}{a}$.

437. $y=-\dfrac{1}{20}\cos(5x^2)-\dfrac{1}{4}\cos x^2$.

438. $y=\arcsin 2x$.

解 $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\cdot(2x)'=\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$.

439. $y=\arcsin\dfrac{1}{x^2}$.

440. $y=\arccos\sqrt{x}$.

441. $y=\arctan\dfrac{1}{x}$.

442*. $y=\operatorname{arccot}\dfrac{1+x}{1-x}$.

443. $y=5e^{-x^2}$.

444. $y=\dfrac{1}{5^{x^2}}$.

445. $y=x^2 10^{2x}$.

446. $f(t)=t\sin 2^t$.

447. $y=\arccos e^x$.

448. $y=\ln(2x+7)$.

449. $y = \lg \sin x$.

450. $y = \ln(1 - x^2)$.

451. $y = \ln^2 x - \ln(\ln x)$.

452. $y = \ln(e^x + 5\sin x - 4\arcsin x)$.

453. $y = \arctan(\ln x) + \ln(\arctan x)$.

454. $y = \sqrt{\ln x + 1} + \ln(\sqrt{x} + 1)$.

F. 其他各种函数

455**. $y = \sin^3 5x \cos^2 \dfrac{x}{3}$.

456. $y = -\dfrac{11}{2(x-2)^2} - \dfrac{4}{x-2}$.

457. $y = -\dfrac{15}{4(x-3)^4} - \dfrac{10}{3(x-3)^3} - \dfrac{1}{2(x-3)^2}$.

458. $y = \dfrac{x^8}{8(1-x^2)^4}$.

459. $y = \dfrac{\sqrt{2x^2 - 2x + 1}}{x}$.

460. $y = \dfrac{x}{a^2\sqrt{a^2 + x^2}}$.

461. $y = \dfrac{x^3}{3\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

462. $y = \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{18}{7}x\sqrt[6]{x} + \dfrac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x}$.

463. $y = \dfrac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8} - \dfrac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}$.

464. $y = \dfrac{4}{3}\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+2}}$.

465. $y = x^4(a - 2x^3)^2$.

466. $y = \left(\dfrac{a + bx^n}{a - bx^n}\right)^m$.

467. $y = \dfrac{9}{5(x+2)^5} - \dfrac{3}{(x+2)^4} + \dfrac{2}{(x+2)^3} - \dfrac{1}{2(x+2)^2}$.

468. $y = (a + x)\sqrt{a - x}$.

469. $y = \sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}$.

470. $z = \sqrt[3]{y + \sqrt{y}}$.

471. $f(t) = (2t+1)(3t+2)\sqrt[3]{3t+2}$.

472. $x = \dfrac{1}{\sqrt{2ay - y^2}}$.

473. $y = \ln(\sqrt{1 + e^x} - 1) - \ln(\sqrt{1 + e^x} + 1)$.

474. $y = \dfrac{1}{15}\cos^3 x(3\cos^2 x - 5)$.

475. $y = \dfrac{(\tan^2 x - 1)(\tan^4 x + 10\tan^2 x + 1)}{3\tan^3 x}$.

476. $y = \tan^2 5x$.

477. $y = \dfrac{1}{2}\sin(x^2)$.

478. $y = \sin^2(t^3)$.

479. $y = 3\sin x \cos^2 x + \sin^3 x$.

480. $y = \dfrac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x$.

481. $y = -\dfrac{\cos x}{3\sin^3 x} + \dfrac{4}{3}\cot x$.

482. $y = \sqrt{\alpha \sin^2 x + \beta \cos^2 x}$.

483. $y = \arcsin x^2 + \arccos x^2$.

484. $y = \dfrac{1}{2}(\arcsin x)^2 \arccos x$.

485. $y = \arcsin \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$.

486. $y = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

487. $y = \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

488. $y = \frac{1}{\sqrt{b}} \arcsin\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$.

489. $y = \sqrt{a^2 - x^2} + a \arcsin\frac{x}{a}$.

490. $y = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}$.

491. $y = \arcsin(1 - x) + \sqrt{2x - x^2}$.

492. $y = \left(x - \frac{1}{2}\right) \arcsin\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x - x^2}$.

493. $y = \ln(\arcsin 5x)$.

494. $y = \arcsin(\ln x)$.

495. $y = \arctan\frac{x\sin\alpha}{1 - x\cos\alpha}$.

496. $y = \frac{2}{3}\arctan\frac{5\tan\frac{x}{2} + 4}{3}$.

497. $y = 3b^2 \arctan\sqrt{\frac{x}{b - x}} - (3b + 2x)\sqrt{bx - x^2}$.

498. $y = -\sqrt{2}\,\mathrm{arccot}\frac{\tan x}{\sqrt{2}} - x$.

499. $y = \sqrt{e^{ax}}$.

500. $y = e^{\sin^2 x}$.

501. $F(x) = \left(2ma^{mx} + b\right)^p$.

502. $F(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t$.

503. $y = \frac{(\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x)e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2}$.

504. $y = \frac{1}{10}e^{-x}(3\sin 3x - \cos 3x)$.

505. $y = x^n a^{-x^2}$.

506. $y = \sqrt{\cos x}\,a^{\sqrt{\cos x}}$.

507. $y = 3^{\cot\frac{1}{x}}$.

508. $y = \ln(ax^2 + bx + c)$.

509. $y = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$.

510. $y = x - 2\sqrt{x} + 2\ln(1 + \sqrt{x})$.

511. $y = \ln\left(a + x + \sqrt{2ax + x^2}\right)$.

512. $y = \frac{1}{\ln^2 x}$.

513. $y = \ln\cos\frac{x - 1}{x}$.

514*. $y = \ln\frac{(x - 2)^5}{(x + 1)^3}$.

515. $y = \ln\frac{(x - 1)^3(x - 2)}{x - 3}$.

516. $y = -\frac{1}{2\sin^2 x} + \ln\tan x$.

517. $y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)$.

518. $y = \ln\ln(3 - 2x^3)$.

519. $y = 5\ln^3(ax + b)$.

520. $y = \ln\frac{\sqrt{x^2 + a^2} + x}{\sqrt{x^2 + a^2} - x}$.

521. $y = \frac{m}{2}\ln(x^2 - a^2) + \frac{n}{2a}\ln\frac{x - a}{x + a}$.

522. $y = x \cdot \sin\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right)$.

523. $y = \frac{1}{2}\ln\tan\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x}$.

524. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \ln\frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x}$.

525. $y = \frac{1}{3}\ln\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x + 1}$.

526. $y = 2^{\arcsin 3x} + (1 - \arccos 3x)^2$.

527. $y = 3^{\frac{\sin ax}{\cos bx}} + \frac{1}{3}\frac{\sin^3 ax}{3\cos^3 bx}$.

528. $y = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{\tan\frac{x}{2} + 2 - \sqrt{3}}{\tan\frac{x}{2} + 2 + \sqrt{3}}$.

529. $y = \arctan \ln x$.

530. $y = \ln \arcsin x + \frac{1}{2} \ln^2 x + \arcsin \ln x$.

531. $y = \arctan \ln \frac{1}{x}$.

532. $y = \frac{\sqrt{2}}{3} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6} \ln \frac{x-1}{x+1}$.

533. $y = \ln \frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}} + 2 \arctan \sqrt{\sin x}$.

534. $y = \frac{3}{4} \ln \frac{x^2+1}{x^2-1} + \frac{1}{4} \ln \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{2} \arctan x$.

535. $y = \frac{1}{3} \ln(1+x) - \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

536. $y = \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln \sqrt{1-x^2}$.

537. $y = \operatorname{sh}^2 2x$.

538. $y = e^{\alpha x} \operatorname{ch} \beta x$.

539. $y = \operatorname{th}^3 2x$.

540. $y = \ln \operatorname{sh} 2x$.

541. $y = \operatorname{Arsh} \frac{x^2}{a^2}$.

542. $y = \operatorname{Arch} \ln x$.

543. $y = \operatorname{Arth}(\tan x)$.

544. $y = \operatorname{Arctan}(\sec x)$.

545. $y = \operatorname{Arth} \frac{2x}{1+x^2}$.

546. $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1) \operatorname{Arth} x + \frac{1}{2} x$.

547. $y = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\right) \operatorname{Arsh} x - \frac{1}{4} x \sqrt{1+x^2}$.

548. 如果

a) $y = |x|$; b) $y = x|x|$,

求出 y', 并作出函数 y 和 y' 的图形.

549. 如果

$$y = \ln |x| \quad (x \neq 0),$$

求出 y'.

550. 如果

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{当 } x \leqslant 0. \\ e^{-x}, & \text{当 } x > 0, \end{cases}$$

求出 $f'(x)$.

551. 如果

$$f(x) = e^{-x} \cos 3x,$$

算出 $f'(0)$.

解 $f'(x)=e^{-x}(-3\sin 3x)-e^{-x}\cos 3x.$

$f'(0)=e^{0}(-3\sin 0)-e^{0}\cos 0=-1.$

552. $f(x)=\ln(1+x)+\arcsin\frac{x}{2}$, 求出 $f'(1)$.

553. $y=\tan^3\frac{\pi x}{6}$, 求出 $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2}$.

554. 对于函数:

a) $f(x)=\sqrt{\sin(x^2)}$;

b) $f(x)=\arcsin\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$;

c) $f(x)=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}},\ x\neq 0,\ f(0)=0$;

d) $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x},\ x\neq 0,\ f(0)=0$;

e) $f(x)=x\sin\frac{1}{x},\ x\neq 0,\ f(0)=0$;

求出 $f'_+(0)$ 和 $f'_-(0)$.

555. 对于函数 $f(x)=e^{-x}$, 求出 $f(0)+xf'(0)$.

556. 对于函数 $f(x)=\sqrt{1+x}$, 求出 $f(3)+(x-3)f'(3)$.

557. 给定函数 $f(x)=\tan x$ 和 $\varphi(x)=\ln(1-x)$, 求出 $\frac{f'(0)}{\varphi'(0)}$.

558. 对于函数 $f(x)=1-x$ 和 $\varphi(x)=1-\sin\frac{\pi x}{2}$, 求出 $\frac{\varphi'(1)}{f'(1)}$.

559. 证明: 偶函数的导数是奇函数, 而奇函数的导数是偶函数.

560. 证明: 周期函数的导数还是周期函数.

561. 证明: 函数 $y=xe^{-x}$ 满足方程 $xy'=(1-x)y$.

562. 证明: 函数 $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$ 满足方程 $xy'=(1-x^2)y$.

563. 证明: 函数 $y=\frac{1}{1+x+\ln x}$ 满足方程 $xy'=y(y\ln x-1)$.

G. 对数导数

对函数 $y=f(x)$ 取自然对数之后再求导数就称为这个函数的**对数导数**, 亦即

$$(\ln y)'=\frac{y'}{y}=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

采用事先对函数取对数有时可简化求导运算.

例 求出复合指数函数

$$y=u^v$$

的导数, 其中 $u=\varphi(x)$ 和 $v=\psi(x)$.

解 对函数 y 取对数, 我们得到

$$\ln y=v\ln u.$$

将最后这个等式两边对 x 求导数得出

$$(\ln y)' = v' \ln u + v(\ln u)',$$

或者

$$\frac{1}{y}y' = v' \ln u + v\frac{1}{u}u',$$

由此得出

$$y' = y\left(v' \ln u + \frac{v}{u}u'\right),$$

或者

$$y' = u^v\left(v' \ln u + \frac{v}{u}u'\right).$$

564. 如果

$$y = \sqrt[3]{x^2}\frac{1-x}{1+x^2}\sin^3 x \cos^2 x,$$

求出 y'.

解 $\ln y = \frac{2}{3}\ln x + \ln(1-x) - \ln(1+x^2) + 3\ln\sin x + 2\ln\cos x,$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{2}{3}\frac{1}{x} + \frac{-1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + 3\frac{1}{\sin x}\cos x - \frac{2\sin x}{\cos x}.$$

由此得出 $y' = y\left(\frac{2}{3x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + 3\cot x - 2\tan x\right).$

565. 如果 $y = (\sin x)^x$, 求出 y'.

解 $\ln y = x\ln\sin x, \quad \frac{1}{y}y' = \ln\sin x + x\cot x;$

$$y' = (\sin x)^x(\ln\sin x + x\cot x).$$

对函数 $y = f(x)$ 运用对数求导法求出 y':

566. $y = (x+1)(2x+1)(3x+1)$.

567. $y = \frac{(x+2)^2}{(x+1)^3(x+3)^4}$.

568. $y = \sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}}$.

569. $y = x\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}$.

570. $y = \frac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$.

571. $y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}$.

572. $y = x^x$.

573. $y = x^{x^2}$.

574. $y = \sqrt[x]{x}$.

575. $y = x^{\sqrt{x}}$.

576. $y = x^{x^x}$.

577. $y = x^{\sin x}$.

578. $y = (\cos x)^{\sin x}$.

579. $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

580. $y = (\arctan x)^x$.

§3. 非显式给出函数的导数

1°. **反函数的导数**. 如果对于函数 $y=f(x)$ 有 $y'_x \neq 0$, 那么其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的导数就是

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

或者

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}.$$

例 1 如果

$$y = x + \ln x,$$

求出 x'_y.

解 我们有 $y'_x = 1 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x+1}{x}$, 亦即, $x'_y = \dfrac{x}{x+1}$.

2°. **以参数形式给出函数的导数**. 如果函数 y 和自变量 x 的依赖性是利用参数 t 给出的:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

那么

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},$$

或者用另一种记法

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}.$$

例 2 如果

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases}$$

求出 $\dfrac{dy}{dx}$.

解 我们求得 $\dfrac{dx}{dt} = -a\sin t$ 和 $\dfrac{dy}{dt} = a\cos t$. 由此得出

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -\cot t.$$

3°. **隐函数的导数**. 如果在 x 与 y 之间的依赖性是以隐含的形式

$$F(x,y) = 0 \tag{1}$$

给出, 那么在最简单的情况下, 为了求出导数 $y'_x = y'$, 只需: 1) 在方程 (1) 的左边中把 y 看成是 x 的函数后, 计算 (1) 式左边对 x 的导数; 2) 令这个导数为零, 亦即假设

$$\frac{d}{dx}F(x,y)=0, \tag{2}$$

3) 关于 y' 求解所得到的方程.

例 3 如果

$$x^3+y^3-3axy=0, \tag{3}$$

求出导数 y'_x.

解 将等式 (3) 左边对 x 求导数, 并令它等于零, 我们得到

$$3x^2+3y^2y'-3a(y+xy')=0,$$

由此得出

$$y'=\frac{x^2-ay}{ax-y^2}.$$

581. 如果

a) $y=x+x^3$; b) $y=x-\frac{1}{2}\sin x$; c) $y=0.1x+e^{\frac{x}{2}}$,

求出导数 x'_y.

对于用参数给出的函数 y, 确定导数 $y'=\dfrac{dy}{dx}$:

582. $\begin{cases} x=2t-1, \\ y=t^3. \end{cases}$

583. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t+1}, \\ y=\left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2. \end{cases}$

584. $\begin{cases} x=\dfrac{2at}{1+t^2}, \\ y=\dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2}. \end{cases}$

585. $\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$

586. $\begin{cases} x=\sqrt{t}, \\ y=\sqrt[3]{t}. \end{cases}$

587. $\begin{cases} x=\sqrt{t^2+1}, \\ y=\dfrac{t-1}{\sqrt{t^2+1}}. \end{cases}$

588. $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t), \\ y=a(\sin t-t\cos t). \end{cases}$

589. $\begin{cases} x=a\cos^2 t, \\ y=b\sin^2 t. \end{cases}$

590. $\begin{cases} x=\cos^3 t, \\ y=b\sin^3 t. \end{cases}$

591. $\begin{cases} x=\dfrac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}, \\ y=\dfrac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}. \end{cases}$

592. $\begin{cases} x=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y=\arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}. \end{cases}$

593. $\begin{cases} x=e^{-t}, \\ y=e^{2t}. \end{cases}$

594. $\begin{cases} x = a\left(\ln\tan\dfrac{t}{2} + \cos t - \sin t\right), \\ y = a(\sin t + \cos t). \end{cases}$

595. 如果

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

算出当 $t = \dfrac{\pi}{2}$ 时的 $\dfrac{dy}{dx}$.

解 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \dfrac{\sin t}{1-\cos t}$, 因此

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1-\cos\frac{\pi}{2}} = 1.$$

596. 如果

$$\begin{cases} x = t\ln t, \\ y = \dfrac{\ln t}{t}, \end{cases}$$

求出当 $t = 1$ 时的 $\dfrac{dy}{dt}$.

597. 如果

$$\begin{cases} x = e^t\cos t, \\ y = e^t\sin t, \end{cases}$$

求出当 $t = \dfrac{\pi}{4}$ 时的 $\dfrac{dy}{dt}$.

598. 证明: 用参数方程

$$\begin{cases} x = 2t + 3t^2, \\ y = t^2 + 2t^3 \end{cases}$$

给出的函数 y 满足方程

$$y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3.$$

599. 当 $x = 2$ 时, 等式

$$x^2 = 2x$$

是正确的, 由此是否得出: 当 $x = 2$ 时等式

$$(x^2)' = 2x'$$

也是正确呢?

600. 设 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. 是否可以对等式

$$x^2 + y^2 = a^2$$

逐项求导数呢?

求出隐函数 y 的导数 $y' = \dfrac{dy}{dx}$:

601. $2x-5y+10=0$.

602. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

603. $x^3+y^3=a^3$.

604. $x^3+x^2y+y^2=0$.

605. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$.

606. $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$.

607. $y^3=\dfrac{x-y}{x+y}$.

608. $y-0.3\sin y=x$.

609. $a\cos^2(x+y)=b$.

610. $\tan y=xy$.

611. $xy=\arctan\dfrac{x}{y}$.

612. $\arctan(x+y)=x$.

613. $e^y=x+y$.

614. $\ln x+e^{-\frac{y}{x}}=c$.

615. $\ln y+\dfrac{x}{y}=c$.

616. $\arctan\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.

617. $\sqrt{x^2+y^2}=c\arctan\dfrac{y}{x}$.

618. $x^y=y^x$.

619. 如果

$$2y=1+xy^3,$$

求出在点 $M(1,1)$ 处的 y'.

解 两边求导数后, 我们有 $2y'=y^3+3xy^2y'$. 令 $x=1, y=1$, 即得 $2y'=1+3y'$, 由此推出 $y'=-1$.

620. 求出给定函数 y 的导数在指定点处的值 y':

a) $(x+y)^3=27(x-y)$, 当 $x=2$ 和 $y=1$;

b) $ye^y=e^{x+1}$, 当 $x=0$ 和 $y=1$;

c) $y^2=x+\ln\dfrac{y}{x}$, 当 $x=1$ 和 $y=1$.

§4. 导数的几何和力学应用

1°. **切线和法线的方程**. 从导数的几何意义得出, 曲线 $y=f(x)$ 或者 $F(x,y)=0$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处的**切线方程**为

$$y-y_0=y_0'(x-x_0),$$

其中 y_0' 是导数 y' 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处的值. 通过切点且垂直于切线的直线称为**曲线的法线**. 对于法线我们有方程

$$x-x_0+y_0'(y-y_0)=0.$$

2°. **曲线之间的夹角**. 所谓曲线

$$y=f_1(x)$$

与

$$y=f_2(x)$$

之间在它们公共点 $M_0(x_0, y_0)$ 处的夹角 (图 12), 是理解为这两条曲线在点 M_0 处的切线 M_0A 和 M_0B 之间的夹角 ω.

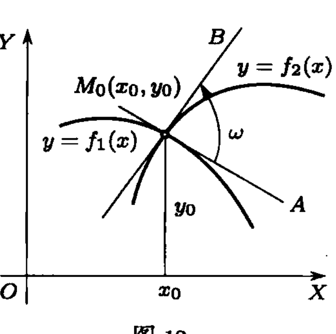


图 12

根据解析几何的已知公式, 我们得到

$$\tan\omega = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0)f_2'(x_0)}.$$

3°. **在直角坐标系情况下, 与切线和法线有关的线段**. 切线和法线决定了下列四条线段 (图 13):

$t = TM$ —— 这称为**切线段**,

$S_t = TK$ —— **次切距**,

$n = NM$ —— **法线段**,

$S_n = KN$ —— **次法距**.

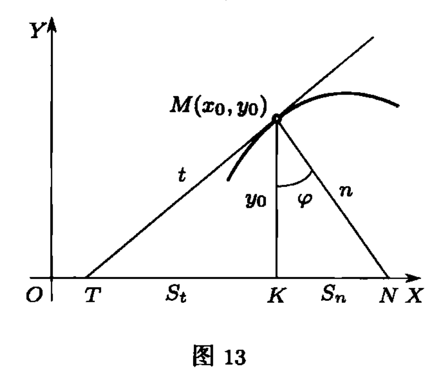


图 13

因为 $KM = |y_0|$ 和 $\tan\varphi = y_0'$, 所以

$$t = TM = \left|\frac{y_0}{y_0'}\sqrt{1 + (y_0')^2}\right|,$$

$$n = NM = \left|y_0\sqrt{1 + (y_0')^2}\right|,$$

$$S_t = TK = \left|\frac{y_0}{y_0'}\right|,$$

$$S_n = \left|y_0 y_0'\right|.$$

4°. **在极坐标系情况下, 与切线和法线有关的线段**. 如果在极坐标下, 曲线由方程 $r = f(\varphi)$ 给出, 那么由切线 MT 和极径 $r = OM$ 组成的角 μ 用如下公式确定:

$$\tan\mu = r\frac{d\varphi}{dr} = \frac{r}{r'}.$$

切线 MT 和法线 MN, 以及与切点 M 的极半径和通过极点 O 垂直于极半径的直线一起, 确定了下列四条线段 (见图 14):

$t = MT$ —— **极切线段**,

$n = MN$ —— **极法线段**,

$S_t = OT$ —— **极次切距**,

$S_n = ON$ —— **极次法距**.

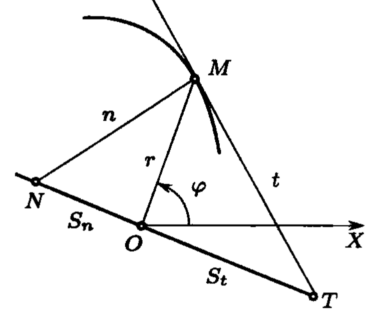


图 14

这些线段用下列公式表示:

$$t = MT = \frac{r}{|r'|}\sqrt{r^2 + (r')^2}, \quad S_t = OT = \frac{r^2}{|r'|},$$

$$n = MN = \sqrt{r^2 + (r')^2}, \quad S_n = ON = |r'|.$$

621. 曲线 $y = x - x^2$ 在横坐标为: a) $x = 0$; b) $x = \frac{1}{2}$; c) $x = 1$ 处的切线与 OX 轴组成怎样的角 φ 呢?

解　我们有 $y' = 1 - 2x$. 由此得出: a) $\tan\varphi = 1, \varphi = 45°$; b) $\tan\varphi = 0, \varphi = 0°$; c) $\tan\varphi = -1, \varphi = 135°$ (图 15).

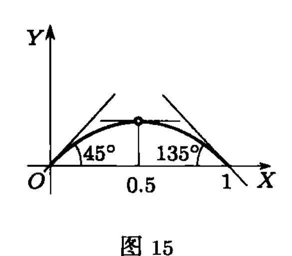
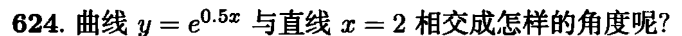


图 15

622. 正弦曲线 $y = \sin x$ 和 $y = \sin 2x$ 在坐标原点分别与横坐标轴相交成怎样的角度呢?

623. 正切曲线 $y = \tan x$ 在坐标原点与横坐标轴相交成怎样的角度呢?



624. 曲线 $y = e^{0.5x}$ 与直线 $x = 2$ 相交成怎样的角度呢?

625. 求出曲线

$$y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$$

上这样的一些点使得过这些点的切线与横坐标轴相切.

626. 抛物线

$$y = x^2 - 7x + 3$$

在哪一点的切线与直线 $5x + y - 3 = 0$ 平行?

627. 求出在点 $(1, 1)$ 处与直线 $x = y$ 相切的抛物线方程 $y = x^2 + bx + c$.

628. 确定曲线 $x^3 + y^3 - xy - 7 = 0$ 在点 $(1, 2)$ 处切线的斜率.

629. 在曲线 $y^2 = 2x^3$ 上求一点, 使过该点的切线与直线 $4x - 3y + 2 = 0$ 相垂直.

630. 写出抛物线

$$y = \sqrt{x}$$

在横坐标为 $x = 4$ 的点处的切线和法线方程.

解　我们有 $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, 由此得出切线的斜率为 $k = (y')_{x=4} = \dfrac{1}{4}$. 因为切点有坐标 $x = 4, y = 2$, 因此切线方程是 $y - 2 = \dfrac{1}{4}(x - 4)$, 或者写成 $x - 4y + 4 = 0$.

根据垂直性条件, 法线的斜率为

$$k_1 = -4,$$

由此得出法线方程是 $y - 2 = -4(x - 4)$, 或者写成 $4x + y - 18 = 0$.

631. 求出曲线 $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ 在点 $(-2, 5)$ 处的切线和法线方程.

632. 求出曲线

$$y = \sqrt[3]{x - 1}$$

在点 $(1, 0)$ 处的切线和法线方程.

633. 求出下列曲线在指定点处的切线和法线方程:

a) $y = \tan 2x$ 在坐标原点;

b) $y = \arcsin \dfrac{x - 1}{2}$ 在与 OX 轴的交点;

c) $y = \arccos 3x$ 在与 OY 轴的交点;

d) $y = \ln x$ 在与 OX 轴的交点;

e) $y=e^{1-x^2}$ 在与直线 $y=1$ 的交点.

634. 写出曲线

$$\begin{cases} x=\dfrac{1+t}{t^3}, \\ y=\dfrac{3}{2t^2}+\dfrac{1}{2t} \end{cases}$$

在点 $(2,2)$ 处的切线和法线方程.

635. 写出曲线

$$x=t\cos t, \quad y=t\sin t$$

在坐标原点和点 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切线方程.

636. 写出曲线

$$x^3+y^2+2x-6=0$$

在纵坐标为 $y=3$ 的点处的切线和法线方程.

637. 写出曲线 $x^5+y^5-2xy=0$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程.

638. 写出曲线 $y=(x-1)(x-2)(x-3)$ 在它与横坐标轴相交点处的切线和法线方程.

639. 写出曲线 $y^4=4x^4+6xy$ 在点 $(1,2)$ 处的切线和法线方程.

640*. 证明: 双曲线 $xy=a^2$ 位于坐标轴之间的切线段被切点所平分.

641. 证明: 星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 位于坐标轴之间的切线段有等于 a 的不变长度.

642. 证明: 圆的渐开线

$$x=a(\cos t+t\sin t), \quad y=a(\sin t-t\cos t)$$

的法线就是圆 $x^2+y^2=a^2$ 的切线.

643. 求出抛物线 $y=(x-2)^2$ 与 $y=-4+6x-x^2$ 的夹角.

644. 抛物线 $y=x^2$ 与 $y=x^3$ 相交成怎样的角度呢?

645. $y=4x^2+2x-8$ 与 $y=x^3-x+10$ 在点 $(3,34)$ 处彼此相切. 在点 $(-2,4)$ 处是否也一样呢?

646. 证明: 双曲线

$$xy=a^2 \quad 和 \quad x^2-y^2=b^2$$

以直角相交.

647. 给定抛物线 $y^2=4x$. 算出在点 $(1,2)$ 处的切线段、法线段、次切距和次法距的长度.

648. 求出曲线 $y=2^x$ 在其任意点处的次切距.

649. 证明: 等轴双曲线 $x^2-y^2=a^2$ 在任意点处的法线段长度等于该点的极半径.

650. 证明: 双曲线 $x^2-y^2=a^2$ 在任意点处的次法距等于该点的横坐标.

651. 证明: 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 和圆 $x^2+y^2=a^2$ 在有相同横坐标点的次切距彼此相等. 由此得出用怎样的方法来构造椭圆的切线呢?

652. 求出摆线

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(t - \cos t) \end{cases}$$

在任意点 $t = t_0$ 处的切线段、法线段、次切距和次法距的长度.

653. 求出对数螺线

$$r = ae^{k\varphi}$$

在切点处的切线与极半径之间的夹角.

654. 求出双纽线 $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ 在切点处的切线与极半径之间的夹角.

655. 求出阿基米德螺线

$$r = a\varphi$$

在极角 $\varphi = 2\pi$ 之点处的极切线段、极法线段、极次切距和极次法距的长度, 以及在切点的切线与极半径之间的夹角.

656. 求出双曲螺线 $r = \dfrac{a}{\varphi}$ 在任意点 $\varphi = \varphi_0, r = r_0$ 处的极次切距、极次法距、极切线段和极法线段的长度, 以及切线与极半径之间的夹角.

657. 一点沿 OX 轴的运动规律为

$$x = 3t - t^3.$$

求出该点在时刻 $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ 和 $t_2 = 2$ 的运动速度 (x 以厘米 (cm) 计算, 而 t 以秒 (s) 计算).

658. 两个点沿 OX 轴运动, 它们有运动规律

$$x = 100 + 5t$$

和

$$x = \frac{1}{2}t^2,$$

其中 $t \geqslant 0$. 这两个点在相遇时刻以怎样的速度彼此分开 (x 以厘米 (cm) 计算, 而 t 以秒 (s) 计算) 呢?

659. 线段 $AB = 5$ m 的两端沿着相互垂直的直线 OX 和 OY 滑动 (图 16). 端点 A 的移动速度为 2 m/s, 而距离 $OA = 3$ m; 当端点 A 移动到坐标原点的那个时刻, 端点 B 的移动速度是多少呢?

660*. 质点在平面 XOY (图 17) 中以初始速度 v_0、与水平线成角度 α 抛出, 其运动规律用公式 (不计空气阻力)

$$x = v_0 t \cos\alpha, \qquad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$$

给出, 其中 t 表示时间, 而 g 为自由落体的加速度. 求出质点的运动轨道和飞行距离, 并确定质点的运动速度及其方向.

661. 一点沿着双曲线 $y = \dfrac{10}{x}$ 如此运动, 使得它的横坐标 x 以每秒 1 单位长度的速度均匀增大. 当质点通过位置 $(5, 2)$ 时, 它的纵坐标是以怎样的速度进行呢?

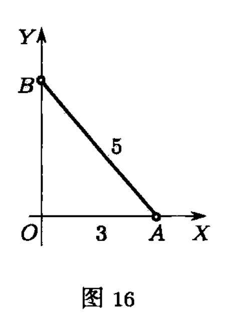


图 16

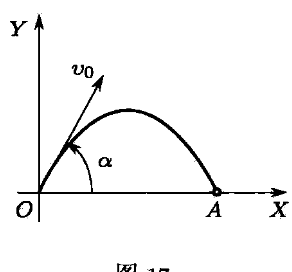


图 17

662. 在抛物线 $y^2 = 18x$ 上求一点, 使它纵坐标的增长速度比横坐标的增长速度快一倍.

663. 矩形的一条边 $a = 10$ cm 为常量, 而另一条边 b 以 4 cm/s 的不变速度增大. 求矩形的对角线长度及其面积当 $b = 30$ cm 的那一时刻的增长速度.

664. 球的半径以 5 cm/s 的速度均匀增大. 求球的表面积和球的体积在它的半径等于 50 cm 的那一时刻的增大速度.

665. 质点沿着阿基米德螺线

$$r = a\varphi$$

($a = 10$ cm) 如此运动, 使得其极半径旋转角速度不变且等于每秒 6 度. 确定极半径 r 在当 $r = 25$ cm 那个时刻的伸长速度.

666. 非均匀杆 AB 的长度为 12 cm. 其 AM 部分的质量是随着流动点 M 到端点 A 的距离平方成正比地增长, 且当 $AM = 2$ cm 时它的质量等于 2 g. 求出整根杆 AB 的质量和在它的任意点 M 处的线密度. 求杆在点 A 和 B 处的线密度.

§5. 高阶导数

1°. **高阶导数的定义**. 对函数 $y = f(x)$ 的导数再求导数就得到该函数的**二阶导数**, 亦即

$$(y')'.$$

我们将这样来表示二阶导数:

$$y'', \quad \text{或者} \ \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \text{或者} \ f''(x).$$

如果 $x = f(t)$ 是点的直线运动规律, 那么 $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ 就是这个运动的加速度.

一般来说, 对函数 $y = f(x)$ 的 $(n-1)$ 阶导数再求导数就得到该函数的 n **阶导数**. 对于 n 阶导数, 一般采用记号

$$y^{(n)}, \quad \text{或者} \ \frac{d^ny}{dx^n}, \quad \text{或者} \ f^{(n)}(x)$$

来表示.

例 1 求出函数

$$y=\ln(1-x)$$

的二阶导数.

解 $y'=\dfrac{-1}{1-x}$, $\quad y''=\left(\dfrac{-1}{1-x}\right)'=\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

2°. **莱布尼茨 (Leibniz) 公式**. 如果函数 $u=\varphi(x)$ 和 $v=\psi(x)$ 有直到包括 n 阶的导数, 那么为了计算这两个函数乘积的 n 阶导数, 可以利用**莱布尼茨公式**

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v''+\cdots+uv^{(n)}.$$

3°. **以参数形式给出函数的高阶导数**. 如果

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}$$

那么导数 $y'_x=\dfrac{dy}{dx}$, $y''_{xx}=\dfrac{d^2y}{dx^2},\cdots$, 它们可以顺序地用公式

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t},\quad y''_{xx}=(y'_x)'_x=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t},\quad y'''_{xxx}=\frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t},\ \text{等等}$$

来进行计算.

对于二阶导数有公式

$$y''_{xx}=\frac{x'_ty''_{tt}-x''_{tt}y'_t}{(x'_t)^3}$$

成立.

例 2 如果

$$\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t,\end{cases}$$

求出 y''.

解 我们有

$$y'=\frac{(b\sin t)'_t}{(a\cos t)'_t}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a}\cot t,$$

以及

$$y''=\frac{\left(-\dfrac{b}{a}\cot t\right)'_t}{(a\cos t)'_t}=\frac{-\dfrac{b}{a}\dfrac{-1}{\sin^2 t}}{-a\sin t}=-\frac{b}{a^2\sin^3 t}.$$

A. 显函数的高阶导数

求出下列函数的二阶导数:

667. $y=x^8+7x^6-5x+4$.

668. $y=e^{x^2}$.

669. $y=\sin^2 x$.

670. $y=\ln\sqrt[3]{1+x^2}$.

671. $y=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$.

672. $f(x)=(1+x^2)\arctan x$.

673. $y=(\arcsin x)^2$.

674. $y=a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$.

675. 证明: 函数 $y=\dfrac{x^2+2x+2}{2}$ 满足微分方程 $1+y'^2=2yy''$.

676. 证明: 函数 $y=\dfrac{1}{2}x^2e^x$ 满足微分方程 $y''-2y'+y=e^x$.

677. 证明: 对于任意常数 C_1 和 C_2, 函数 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$ 满足方程 $y''+3y'+2y=0$.

678. 证明: 函数 $y=e^{2x}\sin 5x$ 满足方程 $y''-4y'+29y=0$.

679. 如果 $y=x^3-5x^2+7x-2$, 求出 y'''.

680. 如果 $f(x)=(2x-3)^5$, 求出 $f'''(3)$.

681. 求出函数 $y=\ln(1+x)$ 的 $y^{(5)}$.

682. 求出函数 $y=\sin 2x$ 的 $y^{(6)}$.

683. 证明: 函数 $y=e^{-x}\cos x$ 满足微分方程 $y^{(4)}+4y=0$.

684. 如果

$$f(x)=e^x\sin x,$$

求出 $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ 和 $f'''(0)$.

685. 点沿着 OX 轴的运动方程为

$$x=100+5t-0.001t^2,$$

求出点在时刻 $t_0=0$, $t_1=1$, $t_2=10$ 的速度和加速度.

686. 点 M 以不变的角速度 ω 沿着圆周 $x^2+y^2=a^2$ 运动. 如果在时刻 $t=0$ 时该点处于点 $M_0(a,0)$ (图 18) 的位置, 求出它在 OX 轴上的投影点 M_1 的运动规律. 求出点 M_1 的运动速度和加速度.

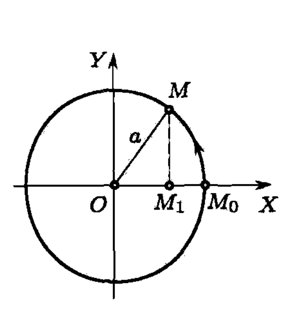


图 18

点 M_1 在初始时刻和在通过坐标原点时的速度和加速度等于什么?

点 M_1 的速度和加速度的最大值又是什么?

687. 求出函数 $y=(ax+b)^n$ 的 n 阶导数 (n 为正整数).

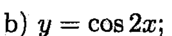
688. 求出函数

a) $y=\dfrac{1}{1-x}$; b) $y=\sqrt{x}$

的 n 阶导数.

689. 求出下列函数的 n 阶导数:

a) $y=\sin x$; b) $y=\cos 2x$;



c) $y=e^{-3x}$; d) $y=\ln(1+x)$;

e) $y=\dfrac{1}{1+x}$; f) $y=\dfrac{1+x}{1-x}$;

g) $y=\sin^2 x$; h) $y=\ln(ax+b)$.

690. 如果:

a) $y=xe^x$; b) $y=x^2e^{-2x}$;

c) $y=(1-x^2)\cos x$;　　d) $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{x}}$;

e) $y=x^3\ln x$;

利用莱布尼茨公式求出 $y^{(n)}$.

691. 如果 $f(x)=\ln\dfrac{1}{1-x}$, 求出 $f^{(n)}(0)$.

B. 参数给出的函数和隐函数的高阶导数

求出下列函数的 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

692. a) $\begin{cases} x=\ln t, \\ y=t^3; \end{cases}$　b) $\begin{cases} x=\arctan t, \\ y=\ln(1+t^2); \end{cases}$　c) $\begin{cases} x=\arcsin t, \\ y=\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

693. a) $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t; \end{cases}$　b) $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t); \end{cases}$　d) $\begin{cases} x=a(\sin t-t\cos t), \\ y=a(\cos t+t\sin t). \end{cases}$

694. a) $\begin{cases} x=\cos 2t, \\ y=\sin^2 t; \end{cases}$　b) $\begin{cases} x=e^{-at}, \\ y=e^{at}; \end{cases}$

695. a) $\begin{cases} x=\arctan t, \\ y=\dfrac{1}{2}t^2; \end{cases}$　b) $\begin{cases} x=\ln t, \\ y=\dfrac{1}{1-t}. \end{cases}$

696. 如果 $\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=e^t\sin t, \end{cases}$ 求出 $\dfrac{d^2x}{dy^2}$.

697. 如果 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=t^2, \end{cases}$ 求出当 $t=0$ 时的 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

698. 证明: 对于任意的常数 a 和 b, 由 $x=\sin t$, $y=ae^{t\sqrt{2}}+be^{-t\sqrt{2}}$ 所确定的作为 x 的函数 y, 满足微分方程

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=2y.$$

求出下列函数的 $y'''=\dfrac{d^3y}{dx^3}$:

699. $\begin{cases} x=\sec t, \\ y=\tan t. \end{cases}$　**700**. $\begin{cases} x=e^{-t}\cos t, \\ y=e^{-t}\sin t. \end{cases}$　**701**. $\begin{cases} x=e^{-t}, \\ y=t^3. \end{cases}$

702. 如果 $\begin{cases} x=\ln t, \\ y=t^m, \end{cases}$ 求出 $\dfrac{d^ny}{dx^n}$.

703. 已知函数 $y=f(x)$, 求出反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的导数 x'', x'''.

704. 如果 $x^2+y^2=1$, 求出 y''.

解 根据复合函数的求导法则, 我们有 $2x+2yy'=0$. 由此得出 $y'=-\dfrac{x}{y}$ 以及 $y''=-\left(\dfrac{x}{y}\right)'_x=-\dfrac{y-xy'}{y^2}$. 用 y' 的表达式代替它本身之后, 最后得到

$$y''=-\frac{y^2+x^2}{y^3}=-\frac{1}{y^3}.$$

确定下列给出的隐函数 $y=f(x)$ 的导数 y'':

705. $y^2=2px$.

706. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

707. $y=x+\arctan y$.

708. 已知方程 $y=x+\ln y$, 求出 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 和 $\dfrac{d^2x}{dy^2}$.

709. 如果

$$x^2+5xy+y^2-2x+y-6=0,$$

求出在点 $(1,1)$ 处的 y''.

710. 如果

$$x^4-xy+y^4=1,$$

求出在点 $(0,1)$ 处的 y''.

711. a) 函数由隐式方程

$$x^2+2xy+y^2-4x+2y-2=0$$

给出, 求出在点 $(1,1)$ 处的 $\dfrac{d^3y}{dx^3}$.

b) 如果 $x^2+y^2=a^2$, 求出 $\dfrac{d^3y}{dx^3}$.

§6. 一阶微分和高阶微分

1°. **一阶微分**. 函数 $y=f(x)$ 的增量的主要部分称为它的**一阶微分**, 它关于自变量 x 的增量 $\Delta x=dx$ 是线性的. 函数的微分等于它的导数与自变量微分的乘积:

$$dy=y'dx.$$

由此得出

$$y'=\frac{dy}{dx}.$$

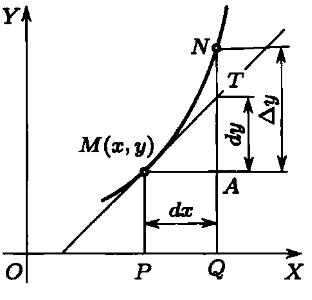


图 19

如果 MN 为函数 $y=f(x)$ 图形上的弧长 (图 19), MT 为在点 $M(x,y)$ 处的切线, 以及

$$PQ=\Delta x=dx,$$

那么切线纵坐标的增量

$$AT = dy,$$

以及线段 $AN = \Delta y$.

例 1　求出函数 $y = 3x^2 - x$ 的增量和微分.

解　第一种方法.

$$\Delta y = 3(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x) - 3x^2 + x,$$

或者

$$\Delta y = (6x - 1)\Delta x + 3(\Delta x)^2.$$

亦即

$$dy = (6x - 1)\Delta x = (6x - 1)dx.$$

第二种方法.

$$y' = 6x - 1, \quad dy = y'dx = (6x - 1)dx.$$

例 2　计算函数 $y = 3x^2 - x$ 当 $x = 1$, $\Delta x = 0.01$ 时的 Δy 和 dy.

解　$\Delta y = (6x - 1) \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2 = 5 \cdot 0.01 + 3 \cdot (0.01)^2 = 0.0503$,

以及

$$dy = (6x - 1)\Delta x = 5 \cdot 0.01 = 0.0500.$$

2°. **微分的基本性质**.

1) $dc = 0$,　这里 c 为常数.

2) $dx = \Delta x$,　这里 x 为自变量.

3) $d(cu) = cdu$.

4) $d(u \pm v) = du \pm dv$.

5) $d(uv) = udv + vdu$.

6) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$ $(v \neq 0)$.

7) $df(u) = f'(u)du$.

3°. **微分对近似计算的应用**. 如果自变量 x 的增量 Δx 按模很小, 那么函数 $y = f(x)$ 的微分 dy 与函数的增量 Δy 就彼此近似相等:

$$\Delta y \approx dy,$$

亦即

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x.$$

由此得出

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \tag{1}$$

例 3　如果正方形的面积从 9 m^2 增加到 9.1 m^2, 那么它的边长大致有多少改变?

解 如果 x 表示正方形的面积, y 表示这个正方形的边, 那么

$$y=\sqrt{x}.$$

根据问题的条件, $x=9$, $\Delta x=0.1$. 于是我们近似地算出正方形边的增量 Δy:

$$\Delta y\approx dy=y'\Delta x=\frac{1}{2\sqrt{9}}\cdot 0.1=0.016(\mathrm{m}).$$

4°. **高阶微分**. 一阶微分的微分称为**二阶微分**:

$$d^2y=d(dy).$$

类似地定义**三阶微分**等等.

如果 $y=f(x)$, x 为自变量, 那么

$$d^2y=y''(dx)^2,$$
$$d^3y=y'''(dx)^3,$$
$$\vdots$$
$$d^ny=y^{(n)}(dx)^n.$$

如果 $y=f(u)$, 这里 $u=\varphi(x)$, 那么

$$d^2y=y''(du)^2+y'd^2u,\qquad d^3y=y'''(du)^3+3y''du\cdot d^2u+y'd^3u$$

等等 (其中撇号表示对 u 的求导).

712. 求出函数 $y=5x+x^2$ 当 $x=2$, $\Delta x=0.001$ 时的增量 Δy 和微分 dy.

713. 不计算导数, 求出当 $x=1$, $\Delta x=-\dfrac{1}{3}$ 时的

$$d(1-x^3).$$

714. 边长等于 x 的正方形面积 S 用公式 $S=x^2$ 表示. 求出这个函数的增量和微分, 并说明后者的几何意义.

715. 给出下列函数的增量和微分的几何解释:

a) 圆的面积 $S=\pi x^2$;　　b) 立方体的体积 $V=x^3$.

716. 证明: 对应于 x 以 Δx 为增量的函数 $y=2^x$ 的增量, 当 $\Delta x\to 0$ 时, 对一切 x 都等价于表达式 $2^x\Delta x\ln 2$.

717. 在 x 为何值时, 函数 $y=x^2$ 的微分当 $\Delta x\to 0$ 时才不等价于这个函数的增量呢?

718. 函数 $y=|x|$ 当 $x=0$ 时是否有微分呢?

719. 利用导数, 求出函数 $y=\cos x$ 当 $x=\dfrac{\pi}{6}$, $\Delta x=\dfrac{\pi}{36}$ 时的微分.

720. 求出函数

$$y=\frac{2}{\sqrt{x}}$$

当 $x=9$, $\Delta x=-0.01$ 时的微分.

721. 算出函数

$$y=\tan x$$

当 $x=\dfrac{\pi}{3}$, $\Delta x=\dfrac{\pi}{180}$ 时的微分.

求出下列函数对于自变量及其增量的任意值时的微分:

722. $y=\dfrac{1}{x^m}$. **723.** $y=\dfrac{x}{1-x}$.

724. $y=\arcsin\dfrac{x}{a}$. **725.** $y=\arctan\dfrac{x}{a}$.

726. $y=e^{-x^2}$. **727.** $y=x\ln x-x$.

728. $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$. **729.** $r=\cot\varphi+\csc\varphi$.

730. $s=\operatorname{arccot}e^t$.

731. 如果 $x^2+2xy-y^2=a^2$, 求出 dy.

解 利用微分形式的不变性, 我们得到 $2xdx+2(ydx+xdy)-2ydy=0$, 由此得出

$$dy=-\frac{x+y}{x-y}dx.$$

求出下列隐式给出函数的微分:

732. $(x+y)^2(2x+y)^3=1$.

733. $y=e^{-\frac{x}{y}}$.

734. $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$.

735. 如果 $y^3-y=6x^2$, 求出在点 $(1,2)$ 处的 dy.

736. 求出 $\sin 31^\circ$ 的近似值.

解 令 $x=\operatorname{arc}30^\circ=\dfrac{\pi}{6}$ 和 $\Delta x=\operatorname{arc}1^\circ=\dfrac{\pi}{180}$. 于是由公式 (1) (见 3°) 我们有

$$\sin 31^\circ\approx\sin 30^\circ+\frac{\pi}{180}\cos 30^\circ=0.500+0.017\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=0.515.$$

737. 用微分代替函数的增量, 近似计算:

a) $\cos 61^\circ$; b) $\tan 44^\circ$; c) $e^{0.2}$; d) $\lg 0.9$; e) $\arctan 1.05$.

738. 如果半径 $R=15$ cm 增长了 2 mm, 那么球的体积大约增加多少?

739. 推导出近似公式 (对于与 x 相比 $|\Delta x|$ 为很小的情况)

$$\sqrt{x+\Delta x}\approx\sqrt{x}+\frac{\Delta x}{2\sqrt{x}},$$

并利用这个公式求出 $\sqrt{5},\sqrt{17},\sqrt{70},\sqrt{640}$ 的近似值.

740. 推导出近似公式

$$\sqrt[3]{x+\Delta x}\approx\sqrt[3]{x}+\frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}},$$

并求出 $\sqrt[3]{10},\sqrt[3]{70},\sqrt[3]{200}$ 的近似值.

741. 求出下列函数的近似值:

a) $y=x^3-4x^2+5x+3$, 当 $x=1.03$;

b) $f(x)=\sqrt{1+x}$, 当 $x=0.2$;

c) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$, 当 $x=0.1$;

d) $y=e^{1-x^2}$, 当 $x=1.05$.

742. 求出 $\tan 45°3'20''$ 的近似值.

743. 近似地求出 $\arcsin 0.54$.

744. 近似地求出 $\sqrt[4]{17}$.

745. 根据欧姆 (Ohm) 定律的公式 $I=\dfrac{E}{R}$ 证明: 只要电阻的改变很小, 就可以用公式

$$\Delta I=-\frac{I}{R}\Delta R$$

近似地求出对应电流的小改变量.

746. 证明: 当确定半径长度时产生 1% 的相对误差, 将导致在计算圆的面积和球的表面积时产生 2% 的相对误差.

747. 如果 $y=\cos 5x$, 计算 d^2y.

解 $d^2y=y''(dx)^2=-25\cos 5x(dx)^2$.

748. $u=\sqrt{1-x^2}$, 求出 d^2u.

749. $y=\arccos x$, 求出 d^2y.

750. $y=\sin x\ln x$, 求出 d^2y.

751. $z=\dfrac{\ln x}{x}$, 求出 d^2z.

752. $z=x^2e^{-x}$, 求出 d^3z.

753. $z=\dfrac{x^4}{2-x}$, 求出 d^4z.

754. $u=3\sin(2x+5)$, 求出 d^nu.

755. $y=e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha)$, 求出 d^ny.

§7. 中值定理

1°. **罗尔 (Rolle) 定理.** 如果函数 $f(x)$ 在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上连续, 且在这个区间的每一个内点处都有导数 $f'(x)$, 以及

$$f(a)=f(b),$$

那么对自变量 x 来说, 至少存在一个值 ξ, 这里 $a<\xi<b$, 使得

$$f'(\xi)=0.$$

2°. **拉格朗日 (Lagrange) 定理.** 如果函数 $f(x)$ 在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上连续, 且在这个区间的每一个内点处都有导数, 那么有

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),$$

其中 $a<\xi<b$.

3°. **柯西 (Cauahy) 定理.** 如果函数 $f(x)$ 和 $F(x)$ 在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上连续, 且当 $a<x<b$ 时还有不同时为零的导数, 此外, $F(a)\neq F(b)$, 那么有

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)},\quad 其中\ a<\xi<b.$$

756. 证明: 函数 $f(x)=x-x^3$ 在区间 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 和 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上满足罗尔定理条件. 并求出对应的 ξ 值.

解 函数 $f(x)$ 对一切 x 值是连续和可微的. 此外, $f(-1)=f(0)=f(1)=0$. 亦即, 罗尔定理在区间 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 和 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上可用. 为了求得数 ξ, 我们写出方程 $f'(x)=1-3x^2=0$. 由此得出 $\xi_1=-\sqrt{\dfrac{1}{3}}$, $\xi_2=\sqrt{\dfrac{1}{3}}$, 而且有 $-1<\xi_1<0$, $0<\xi_2<1$.

757. 函数 $f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2}$ 在区间 $[0,4]$ 的端点处取同样的值:

$$f(0)=f(4)=\sqrt[3]{4}.$$

对于在区间 $[0,4]$ 上的这个函数, 罗尔定理是否成立呢?

758. 对于在区间 $[0,\pi]$ 上的函数

$$f(x)=\tan x,$$

是否满足罗尔定理的条件呢?

759. 令

$$f(x)=x(x+1)(x+2)(x+3).$$

证明: 方程

$$f'(x)=0$$

有三个实根.

760. 显然, 方程

$$e^x=1+x$$

有根 $x=0$. 证明: 这个方程不可能有其他的实根.

761. 验证函数

$$f(x)=x-x^3$$

在区间 $[-2,1]$ 上满足拉格朗日定理条件, 并求出对应的中间值 ξ.

解 函数 $f(x)=x-x^3$ 对一切 x 的值都连续和可微, 而且有 $f'(x)=1-3x^2$. 按照拉格朗日公式, 由此我们得出 $f(1)-f(-2)=0-6=[1-(-2)]f'(\xi)$, 亦即 $f'(\xi)=-2$. 于是, $1-3\xi^2=-2$, 从而 $\xi=\pm1$, 其中只有值 $\xi=-1$ 可用, 因为只有它适合不等式 $-2<\xi<1$.

762. 验证函数

$$f(x)=x^{\frac{4}{3}}$$

在区间 $[-1,1]$ 上满足拉格朗日定理条件, 并求出对应的点 ξ.

763. 找出一个位于点 $A(1,1)$ 与 $B(3,9)$ 之间的抛物线 $y=x^2$ 线段上的点, 使得在该点处的抛物线切线平行于弦 AB.

764. 利用拉格朗日定理, 证明公式

$$\sin(x+h)-\sin x=h\cos\xi,$$

其中 $x < \xi < x+h$.

765. a) 对于函数 $f(x)=x^2+2$ 和 $F(x)=x^3-1$, 验证在区间 $[1,2]$ 上满足柯西定理条件, 并求出 ξ.

b) 同样对于在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的函数 $f(x)=\sin x$ 和 $F(x)=\cos x$ 验证此事.

§8. 泰勒公式

如果函数 $f(x)$ 在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ (或者 $b\leqslant x\leqslant a$) 上连续, 且有直到包括 $(n-1)$ 阶在内的连续导数, 而且在这个区间的每一个内点处, 都存在着有限的导数 $f^{(n)}(x)$, 那么在这个区间上有**泰勒 (Taylor) 公式**

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a)+\cdots$$
$$+\frac{(x-a)^{(n-1)}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(\xi)$$

成立, 其中 $\xi=a+\theta(x-a)$, 而 $0<\theta<1$.

特别, 当 $a=0$ 时有**麦克劳林 (Maclaurin) 公式**

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\xi),$$

其中 $\xi=\theta x$, 而 $0<\theta<1$.

766. 将多项式 $f(x)=x^3-2x^2+3x+5$ 按二项式 $x-2$ 的正整数幂展开.

解 $f'(x)=3x^2-4x+3$, $f''(x)=6x-4$, $f'''(x)=6$, 对于 $n\geqslant 4$ 有 $f^{(n)}(x)\equiv 0$. 由此得出

$$f(2)=11,\quad f'(2)=7,\quad f''(2)=8,\quad f'''(2)=6.$$

于是

$$x^3-2x^2+3x+5=11+(x-2)\cdot 7+\frac{(x-2)^2}{2!}\cdot 8+\frac{(x-2)^3}{3!}\cdot 6,$$

或者

$$x^3-2x^2+3x+5=11+7(x-2)+4(x-2)^2+(x-2)^3.$$

767. 将函数 $f(x)=e^x$ 按二项式 $x+1$ 的幂展开到包含 $(x+1)^3$ 的项.

解 对于一切 n 有 $f^{(n)}(x)=e^x$, 从而 $f^{(n)}(-1)=\frac{1}{e}$. 于是

$$e^x=\frac{1}{e}+(x+1)\frac{1}{e}+\frac{(x+1)^2}{2!}\frac{1}{e}+\frac{(x+1)^3}{3!}\frac{1}{e}+\frac{(x+1)^4}{4!}e^\xi,$$

其中 $\xi=-1+\theta(x+1), 0<\theta<1$.

768. 将函数 $f(x)=\ln x$ 按 $x-1$ 的幂次展开到 $(x-1)^2$ 项.

769. 将函数 $f(x)=\sin x$ 按 x 的幂次展开到 x^3 项和 x^5 项.

770. 将函数 $f(x)=e^x$ 按 x 的幂次展开到 x^{n-1} 项.

771. 证明: $\sin(a+h)$ 与 $\sin a+h\cos a$ 的差不比 $\frac{1}{2}h^2$ 大.

772. 说明下列近似公式的来源:

a) $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2, \quad |x|<1;$

b) $\sqrt[3]{1+x} \approx 1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2, \quad |x|<1,$

并估计它们的误差.

773. 估计公式

$$e \approx 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}$$

的误差.

774. 具有质量的线状物体在其本身质量的作用下, 中间下垂形成了悬链线 $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$. 证明: 对于很小的 $|x|$, 线的形式可近似地表示成抛物线

$$y = a+\frac{x^2}{2a}.$$

775*. 证明: 当 $|x| \ll a$ 时, 近似等式

$$e^{\frac{x}{a}} \approx \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$$

达到 $\left(\frac{x}{a}\right)^2$ 的精确度.

§9. 求解不定式的洛必达 – 伯努利法则

1°. **$\frac{0}{0}$ 和 $\frac{\infty}{\infty}$ 类型的不定式求解**. 假设单值函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 当 $0<|x-a|<h$ 时可微, 而且导数 $\varphi'(x)$ 不为零.

如果当 $x \to a$ 时, $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 两个都是无穷小量, 或者两个都是无穷大量, 亦即如果商 $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ 在点 $x=a$ 处表示 $\frac{0}{0}$ 型或者 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的不定式, 那么在下式右端导数之比的极限存在的条件下有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

(洛必达 – 伯努利 (L'Hospital-Bernoulli) 法则). 这条法则也可应用到当 $a=\infty$ 的情形.

若商还是给出在点 $x=a$ 处上述类型之一的不定式, 以及 $f'(x)$ 和 $\varphi'(x)$ 也满足上面对 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 提出的所有要求, 则就可以转移到对二阶导数的比式求极限等等.

但是应当记住, 比式 $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ 的极限可以存在, 可是导数的比式却不趋向于任何极限 (见第 809 题).

2°. **其他类型的不定式**. 对于 $0\cdot\infty$ 型不定式的求解, 我们将对应的乘积 $f_1(x)\cdot f_2(x)$, 这里 $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=0$ 和 $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=\infty$, 变换为商

$$\frac{f_1(x)}{\dfrac{1}{f_2(x)}}\ \left(\frac{0}{0}\text{ 型}\right)\quad\text{或者}\quad\frac{f_2(x)}{\dfrac{1}{f_1(x)}}\ \left(\frac{\infty}{\infty}\text{ 型}\right).$$

在不定式为 $\infty-\infty$ 类型的情况下, 应当把对应的差 $f_1(x)-f_2(x)$ 变换成乘积 $f_1(x)\left[1-\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}\right]$, 并先求解不定式 $\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}$. 如果 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}=1$, 那么我们就要将表达式写成

$$\frac{1-\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}}{\dfrac{1}{f_1(x)}}\ \left(\frac{0}{0}\text{ 型}\right).$$

在求解 $1^\infty, 0^0, \infty^0$ 型不定式时需要利用预先求对数, 即先求函数的函数幂 $[f_1(x)]^{f_2(x)}$ 的对数, 再求出它们的极限 (亦即需要求解 $0\cdot\infty$ 型的不定式).

在某些情况下, 洛必达 – 伯努利法则与寻找极限的初等方法联合起来是很有效的.

例 1 计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\cot x}\ \left(\frac{\infty}{\infty}\text{ 型的不定式}\right).$$

解 应用洛必达 – 伯努利法则, 我们有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\cot x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(\cot x)'}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}.$$

于是得到了 $\dfrac{0}{0}$ 型的不定式, 但是没有必要再利用洛必达 – 伯努利法则, 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x=1\cdot 0=0.$$

因此, 最后求出

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\cot x}=0.$$

例 2 计算

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)\ (\infty-\infty\text{ 型的不定式}).$$

解 把分式通分后, 我们得到

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}\ \left(\frac{0}{0}\text{ 型的不定式}\right).$$

首先应用洛必达 – 伯努利法则. 为此, 用与之等价的无穷小量 (第一章 §4) 来代替最后分式的分母 $x^2\sin^2 x\sim x^4$, 我们得到

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\ \left(\frac{0}{0}\text{ 型的不定式}\right).$$

于是按照洛必达 – 伯努利法则有

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{12x^2}.$$

其次, 我们用初等方法求得

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{6x^2}=\frac{1}{3}.$$

例 3 计算

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} \quad (1^\infty \text{ 型的不定式}).$$

解 求对数并应用洛必达 - 伯努利法则, 我们得到

$$\lim_{x\to 0}\ln(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{3\ln\cos 2x}{x^2}=-6\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{2x}=-6.$$

因此, $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}=e^{-6}$.

求出给定函数的极限:

776. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$.

解 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x-1}{3x^2-7}=\dfrac{1}{2}$.

777. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$.

778. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}$.

779. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch} x-1}{1-\cos x}$.

780. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x-\sin x}$.

781. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sec^2 x-2\tan x}{1+\cos 4x}$.

782. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 5x}$.

783. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^x}{x^5}$.

784. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

785. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\pi}{x}}{\cot\dfrac{\pi x}{2}}$.

786. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin mx)}{\ln\sin x}$.

787. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cot x$.

解

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\cot x=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cos x}{\sin x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}\lim_{x\to 0}\cos x=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}\cdot 1=0.$$

788. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$.

789. $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x\cot x$.

790. $\lim\limits_{x\to 0}(x^n e^{-x}),\ n>0$.

791. $\lim\limits_{x\to \infty} x\sin\dfrac{a}{x}$.

792. $\lim\limits_{x\to \infty} x^n\sin\dfrac{a}{x},\ n>0$.

793. $\lim\limits_{x\to 1}\ln x\ln(x-1)$.

794. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\cdot\dfrac{1}{x}+\ln x-1}{\ln x+\dfrac{1}{x}(x-1)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{\ln x-\dfrac{1}{x}+1}=\lim_{x\to1}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

795. $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$.

796. $\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right]$.

797. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\cot x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.

798. $\lim\limits_{x\to0}x^x$.

解 我们有 $x^x=y$, $\ln y=x\ln x$,

$$\lim_{x\to0}\ln y=\lim_{x\to0}x\ln x=\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=0,$$

由此得出 $\lim\limits_{x\to0}y=1$, 亦即 $\lim\limits_{x\to0}x^x=1$.

799. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$.

800. $\lim\limits_{x\to0}x^{\frac{3}{4+\ln x}}$.

801. $\lim\limits_{x\to0}x^{\sin x}$.

802. $\lim\limits_{x\to1}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$.

803. $\lim\limits_{x\to0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$.

804. $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

805. $\lim\limits_{x\to1}\left(\tan\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$.

806. $\lim\limits_{x\to0}\left(\cot x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

807. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$.

808. $\lim\limits_{x\to0}(\cot x)^{\sin x}$.

809. 证明: 极限

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}=0$;　　b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}=1$

不可能用洛必达 – 伯努利法则求出. 直接求出这些极限.

810*. 证明: 具有小中心角 α 的圆弧段、弦为 $AB=b$ 以及其高为 $CD=h$ 所围成的弓形面积 (图 20), 当 $\alpha\to0$ 时, 以任意小的相对误差近似地等于

$$S\approx\frac{2}{3}bh.$$

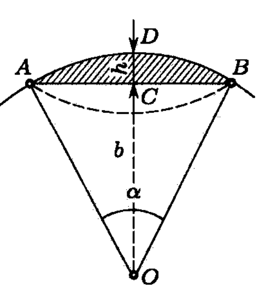


图 20

第三章　函数的极值和导数的几何应用

§1. 一元函数的极值

1°. **函数的递增和递减**. 如果函数 $f(x)$ 对属于给定区间 (线段) 的任意点 x_1 和 x_2, 从不等式 $x_1 < x_2$ 得出不等式 $f(x_1) < f(x_2)$ (图 21, a)) ($f(x_1) > f(x_2)$ (图 21, b))), 那么称函数 $f(x)$ 在这个区间 (线段) 上为**递增 (递减) 的**. 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且当 $a < x < b$ 时有 $f'(x) > 0(f'(x) < 0)$, 那么 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是递增 (递减) 的.

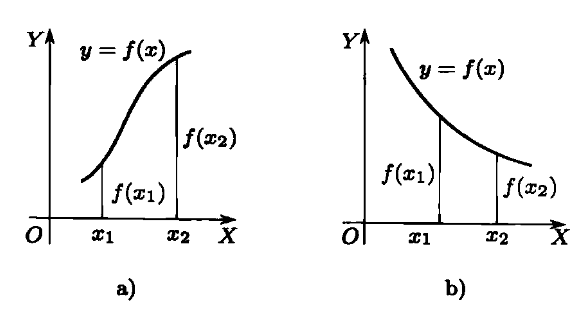


图 21

在最简单的情况下, 函数 $f(x)$ 的存在性区域可以分成有限多个函数的递增和递减区间 (**单调区间**). 这些区间以临界点 x 为界 (这里 $f'(x) = 0$ 或者 $f'(x)$ 不存在).

例 1　研究函数

$$y = x^2 - 2x + 5$$

的单调性.

解　我们求出导数

$$y' = 2x - 2 = 2(x - 1). \tag{1}$$

由此得出: 当 $x=1$ 时有 $y'=0$. 于是, 在数轴上我们得到两个单调性区间$(-\infty,1)$ 和 $(1,+\infty)$. 从公式 (1) 我们有: 1) 如果 $-\infty<x<1$, 那么 $y'<0$, 从而函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 中递减; 2) 如果 $1<x<+\infty$, 那么 $y'>0$, 从而函数 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 中递增 (图 22).

图 22

例 2 确定函数

$$y=\frac{1}{x+2}$$

的单调区间.

解 在此, $x=-2$ 是函数的不连续点, 当 $x\neq-2$ 时有 $y'=-\dfrac{1}{(x+2)^2}<0$. 因此, 函数 y 在区间 $-\infty<x<-2$ 和 $-2<x<+\infty$ 中是递减的.

例 3 研究函数

$$y=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3$$

的单调性.

解 这时有

$$y'=x^4-x^2. \tag{2}$$

解方程 $x^4-x^2=0$, 我们找到使得导数 y' 变成零的点: $x_1=-1, x_2=0, x_3=1$. 由于 y' 只可能在通过那些变成零或者连续性受到间断 (在目前情况下, y' 的间断点不存在) 的点时才改变符号, 因此在区间 $(-\infty,-1),(-1,0),(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 的每一个中, 导数都保持符号不变, 从而在这些区间的每一个中, 所研究的函数都是单调的. 为了说明在上述的哪些区间中, 函数是递增的, 而在哪些区间中, 函数是递减的, 需要知道在这些区间的每一个中, 导数有怎样的符号. 为了说明 y' 在区间 $(-\infty,-1)$ 中是怎样的符号, 只需知道 y' 在这个区间任一点处的符号. 例如, 取 $x=-2$, 我们从 (2) 得出 $y'=12>0$, 于是, 在区间 $(-\infty,-1)$ 中有 $y'>0$, 从而函数在这个区间中是递增的. 类似地求出, 在区间 $(-1,0)$ 中有 $y'<0$ (为了验证, 例如, 可以取 $x=-\dfrac{1}{2}$), 在区间 $(0,1)$ 中有 $y'<0$ (这里可以利用 $x=\dfrac{1}{2}$), 以及在区间 $(1,+\infty)$ 中有 $y'>0$.

因此, 所研究的函数在区间 $(-\infty,-1)$ 中是递增的, 在区间 $(-1,1)$ 中是递减的, 而在区间 $(1,+\infty)$ 中又是递增的.

2°. **函数的极值**. 如果存在点 x_0 的这样侧边邻域, 使得对这个邻域的一切点 $x\neq x_0$ 都有不等式 $f(x)>f(x_0)$, 那么点 x_0 就称为函数 $y=f(x)$ 的**极小值点**, 而数 $f(x_0)$ 就称为函数 $y=f(x)$ 的**极小值**. 类似地, 如果对于点 x_1 的某个邻域的所有点 $x\neq x_1$ 都满足不等式 $f(x)<f(x_1)$, 那么 x_1 就称为函数 $f(x)$ 的**极大值点**, 而 $f(x_1)$ 就称为函数的**极大值** (图 23). 函数的极小值点或者极大值点都称为函数的**极值点**, 而函数的极小值或者极大值都称为函数的**极值**. 若 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值

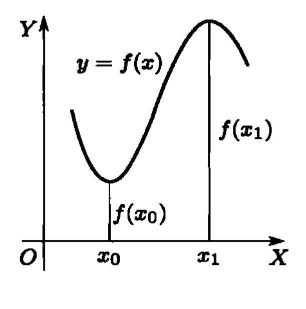


图 23

点, 则就有 $f'(x_0)=0$ (**驻点**) 或者 $f'(x_0)$ 不存在 (极值存在的必要条件). 逆命题不对: $f'(x)=0$ 或者 $f'(x)$ 不存在 (**临界点**) 的点, **却不一定是**函数 $f(x)$ 的**极值点**. 连续函数 $f(x)$ 极值存在和不存在的充分性判别法可由下列的规则给出:

i. 如果存在临界点的这样一个邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 使得当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时有 $f'(x)>0$, 而当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时有 $f'(x)<0$, 那么 x_0 就是函数 $f(x)$ 的极大值点; 如果当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时有 $f'(x)<0$, 而当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时有 $f'(x)>0$, 那么 x_0 就是函数 $f(x)$ 的极小值点.

最后, 如果存在这样的正常数 δ, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, $f'(x)$ 保持符号不变, 那么点 x_0 不是函数 $f(x)$ 的极值点.

ii. 如果 $f'(x_0)=0$ 和 $f''(x_0)<0$, 那么 x_0 就是函数 $f(x)$ 的极大值点. 如果 $f'(x_0)=0$ 和 $f''(x_0)>0$, 那么 x_0 就是函数 $f(x)$ 的极小值点. 如果 $f'(x_0)=0, f''(x_0)=0$, 而 $f'''(x_0)\neq 0$, 那么点 x_0 就不是函数 $f(x)$ 的极值点.

在更一般形式: 假设函数 $f(x)$ 的导数在点 x_0 处第一个不等于零的阶数为 k. 于是如果 k 是偶数, 那么点 x_0 就是极值点, 亦即若 $f^{(k)}(x_0)<0$, 则 x_0 为极大值点, 而若 $f^{(k)}(x_0)>0$, 则 x_0 为极小值点. 如果 k 为奇数, 那么 x_0 就不是极值点.

例 4 求出函数

$$y=2x+3\sqrt[3]{x^2}$$

的极值.

解 我们求出导数

$$y'=2+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}=\frac{2}{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x}+1). \tag{3}$$

令导数 y' 等于零之后, 我们得到

$$\sqrt[3]{x}+1=0.$$

由此求得驻点 $x_1=-1$. 从公式 (3) 我们有: 如果 $x=-1-h$, 这里 h 为任一充分小的正数, 那么有 $y'>0$; 如果 $x=-1+h$, 那么有 $y'<0$[①]. 因此, $x=-1$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点, 而且有 $y_{\max}=1$.

从 (3) 式, 令 y' 表达式的分母等于零, 我们得到

$$\sqrt[3]{x}=0.$$

由此我们求得导数 y' 不存在的函数临界点 $x_2=0$. 显然, 当 $x=-h$ 时, 我们有 $y'<0$; 而当 $x=h$ 时, 我们有 $y'>0$. 因此, $x_2=0$ 是函数 y 的极小值点, 而且有 $y_{\min}=0$ (图 24). 函数在点 $x_1=-1$ 处的性质也可以利用它的二阶导数

$$y''=-\frac{2}{3x\sqrt[3]{x}}$$

进行研究. 在此当 $x_1=-1$ 时有 $y''<0$, 因此, $x_1=-1$ 是函数

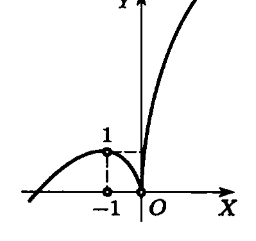


图 24

① 如果导数 y' 的符号难以确定, 那么在取充分小的正数 h 之后, 可以进行数值计算.

的极大值点.

3°. **函数的最小值和最大值**. 连续函数 $f(x)$ 在给定区间 $[a,b]$ 上的最小 (最大) 值或者在临界点处, 或者在区间 $[a,b]$ 的端点上取得.

例 5 求出函数

$$y = x^3 - 3x + 3$$

在区间 $-1\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2\frac{1}{2}$ 上的最小值和最大值.

解 由于

$$y' = 3x^2 - 3,$$

所以函数 y 的驻点是 $x_1 = -1$ 和 $x_2 = 1$. 将函数在这些点处的值与函数在给定区间端点的值进行比较:

$$y(-1) = 5, \qquad y(1) = 1,$$

$$y\left(-1\frac{1}{2}\right) = 1\frac{7}{8}, \quad y\left(2\frac{1}{2}\right) = 11\frac{1}{8}.$$

我们断定 (图 25), 函数的最小值 $m = 1$ 在点 $x = 1$ (在极小值点) 达到, 而最大值 $M = 11\frac{1}{8}$ 在点 $x = 2\frac{1}{2}$ (在区间的右端点) 达到.

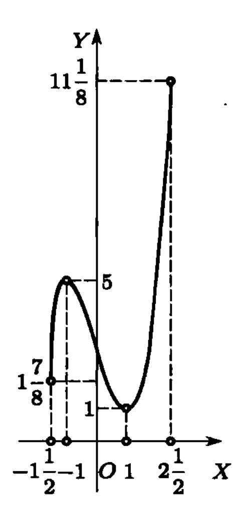


图 25

确定下列函数的单调区间:

811. $y = 1 - 4x - x^2$.

812. $y = (x-2)^2$.

813. $y = (x+4)^3$.

814. $y = x^2(x-3)$.

815. $y = \dfrac{x}{x-2}$.

816. $y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

817. $y = \dfrac{x}{x^2 - 6x - 16}$.

818. $y = (x-3)\sqrt{x}$.

819. $y = \dfrac{x}{3} - \sqrt[3]{x}$.

820. $y = x + \sin x$.

821. $y = x\ln x$.

822. $y = \arcsin(1+x)$.

823. $y = 2e^{x^2-4x}$.

824. $y = 2^{\frac{1}{x-a}}$.

825. $y = \dfrac{e^x}{x}$.

研究下列函数的极值:

826. $y = x^2 + 4x + 6$.

解 求出给定函数的导数 $y' = 2x + 4$. 令 y' 等于零, 我们得到自变量的临界值 $x = -2$. 由于当 $x < -2$ 时有 $y' < 0$, 以及当 $x > -2$ 时有 $y' > 0$, 所以 $x = -2$ 是给定函数的极小点, 而且 $y_{\min} = 2$. 利用二阶导数在临界点的符号 $y'' = 2 > 0$, 我们得到同样的结果.

827. $y = 2 + x - x^2$.

828. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$.

829. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$.

解　我们求出导数

$$y' = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2).$$

令导数 y' 等于零, 我们得到临界点 $x_1 = -2$ 和 $x_2 = 1$. 为了确定极值的特性, 我们算出二阶导数 $y'' = 6(2x+1)$. 由于 $y''(-2) < 0$, 因此 $x_1 = -2$ 是函数 y 的极大值点, 而且有 $y_{\max} = 25$. 类似地我们有 $y''(1) > 0$, 所以 $x_2 = 1$ 是函数 y 的极小值点, 且有 $y_{\min} = -2$.

830. $y = x^2(x-12)^2$.

831. $y = x(x-1)^2(x-2)^3$.

832. $y = \dfrac{x^3}{x^2+3}$.

833. $y = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$.

834. $y = \dfrac{(x-2)(8-x)}{x^2}$.

835. $y = \dfrac{16}{x(4-x^2)}$.

836. $y = \dfrac{4}{\sqrt{x^2+8}}$.

837. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}}$.

838. $y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$.

839. $y = 2\sin 2x + \sin 4x$.

840. $y = 2\cos\dfrac{x}{2} + 3\cos\dfrac{x}{3}$.

841. $y = x - \ln(1+x)$.

842. $y = x\ln x$.

843. $y = x\ln^2 x$.

844. $y = \operatorname{ch} x$.

845. $y = xe^x$.

846. $y = x^2e^{-x}$.

847. $y = \dfrac{e^x}{x}$.

848. $y = x - \arctan x$.

确定函数在指定区间上的最小值和最大值 (如果区间没有指定, 那么应当确定函数在整个存在区域中的最小值和最大值):

849. $y = \dfrac{x}{1+x^2}$.

850. $y = \sqrt{x(10-x)}$.

851. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

852. $y = \arccos x$.

853. $y = x^3$ 在区间 $[-1, 3]$ 上.

854. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$, a) 在区间 $[-1, 5]$ 上; b) 在区间 $[-10, 12]$ 上.

855. 证明: 当 x 为正值时, 有不等式

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2$$

成立.

856. 确定二次三项式 $y = x^2 + px + q$ 的系数 p 和 q, 使得这个三项式当 $x = 1$ 时有极小值 $y = 3$. 并从几何上解释所得结果.

857. 证明不等式

$$e^x > 1 + x, \quad 当\ x \neq 0.$$

解 我们考虑函数

$$f(x) = e^x - (1 + x).$$

用通常的方法即可求出这个函数有唯一的极小值 $f(0) = 0$. 于是

$$f(x) > f(0), \quad 当\ x \neq 0.$$

亦即

$$e^x > 1 + x, \quad 当\ x \neq 0.$$

这就是所要证明的.

证明不等式:

858. $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x, \quad 当\ x > 0.$

859. $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}, \quad 当\ x \neq 0.$

860. $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x, \quad 当\ x > 0.$

861. 将给定的正数 a 分成两个数, 使得它们的乘积达到最大.

862. 将一段给定长度为 l 的铁丝弯曲成一个矩形, 使得它的面积达到最大.

863. 在以 $2p$ 为周长的直角三角形中, 怎样的直角三角形面积最大?

864. 需要建造一个矩形场子, 它的三边是用铁丝网围起来, 而第四边毗连长的石头墙. 如果有 l 米的铁丝网, 那么场子怎样的形式 (在面积的意义下) 最好呢?

865. 要求用一片边长为 a 的正方形硬纸板做一个使其容积达到最大的矩形开口纸盒, 其做法是剪去正方形纸板的角, 并弯折所得十字形图形的突出部分.

866. 做一个要求能容 V 升水的方形底面开口铁皮箱, 在怎样的尺寸之下, 使得做出的水箱需要最少的铁皮呢?

867. 在给定体积之下, 怎样的圆柱体有最小的全部表面积呢?

868. 在给定的球中, 作出最小体积的内接圆柱体.

869. 在给定的球中, 作出最大侧面积的内接圆柱体.

870. 在给定的球中, 作出最小体积的内接圆锥体.

871. 在给定的球中, 作出最大侧面积的内接正圆锥体.

872. 在给定的圆柱体外, 作出最小体积的外接正圆锥体 (使两者底平面和底面中心重合).

873. 怎样的外切给定球体的圆锥体有最小体积呢?

874. 要求将一张宽度为 a 的带形白铁皮弯曲成一个开口的圆柱形槽 (图 26). 应当取怎样的中心角 φ, 才能使得槽的容量最大?

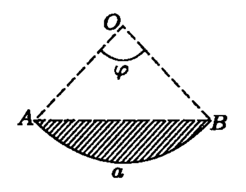


图 26

875. 由圆形的薄片剪去一个扇形, 使得将它卷起来之后, 得到一个最大容积的漏斗.

876. 开口容器由下面用半球面封闭的圆柱体所组成, 器壁的厚度不变. 当它的容量给定时, 容器应当采取怎样的尺寸才能使得所用材料最少呢?

877. 确定塔 $ABCD$ 的门的最小高度 $h = OB$, 使得通过这个门可以将长度为 l 的刚性杆件 MN 搬进塔中, 它的端点M 沿着水平直线 AB 移动. 塔的宽度 $d < l$ (图 27).

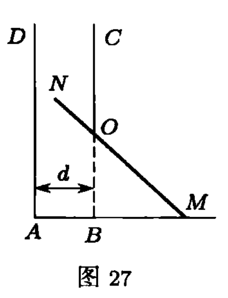
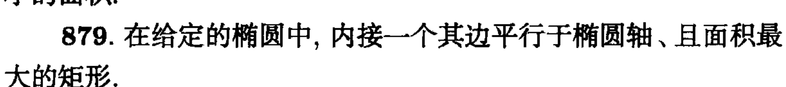


图 27

878. 在坐标平面上, 给定位于第一象限中的点 $M_0(x_0, y_0)$. 通过这一点画出一根直线, 使得由它与正半坐标轴组成的三角形有最小的面积.



879. 在给定的椭圆中, 内接一个其边平行于椭圆轴、且面积最大的矩形.

880. 在被直线 $x = 2a$ 截下的抛物线 $y^2 = 2px$ 的一段中, 内接一个面积最大的矩形.

881. 在曲线 $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ 上找出这样的点, 使得过该点的切线与 OX 轴组成绝对值最大的角.

882. 快递需要从位于河岸边的地点 A 到达位于另一边的地点 B. 现在知道沿岸边的行动速度比沿水面的行动速度要快 k 倍, 试确定: 快递应当以怎样的角度穿过河流使得以最短的时间到达地点 B? 河流的宽带为 h, 地点 A 与地点 B (沿河岸) 之间的距离为 d. 河水的流动速度可忽略不计.

883. 在直线段 $AB = a$ 的两端连接着两个光源 A (强度 I_1) 和 B (强度 I_2), 找出照度最弱的点 M (照度与光源的距离平方成反比).

884. 灯泡悬挂在半径为 r 的圆形桌面中心的上方. 当悬挂在桌子上方灯泡的高度为多少时, 位于桌子边缘物体的照度是最好呢? (照度与光线入射角的余弦成正比, 而与光源距离的平方成反比.)

885. 要求从一根直径为 d 的圆木加工成一根矩形截面的梁, 这个截面的宽 x 和高 y 应当为多少, 才能使得这根梁显示出最大的 a) 抗压强度, b) 抗弯强度?

注　梁的抗压强度与它的横截面的面积成正比, 而抗弯强度与这个截面的宽和它的高的平方乘积成正比.

886. 可以围绕点 A 转动的匀质杆 AB (图 28), 在自点 A 起距离为 a 的点处负载质量为 M 的重物 Q, 并在杆的自由端 B 作用着垂直的力 P 以便保持系统的平衡. 杆的线密度为 q. 确定杆的长度 x, 使得力 P 最小, 并求出 $P_{\min}$.

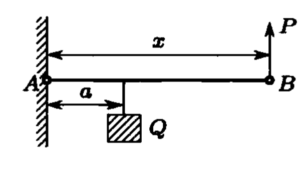


图 28

887*. 三个弹性球 A, B, C 的中心分布在一根直线上. 质量为 M 的球 A 以速度 v 撞击球 B, 球 B 再以得到的已知速度撞击质量为 m 的球 C. 球 B 应当是怎样的质量才能使球 C 的速度成为最大呢?

888. 有 N 个相同的电池, 我们可以用各种方法将它们每 n 个电池串联组成一组电

池, 最后将它们 ($\frac{N}{n}$ 组) 并联起来得到一群电池. 这样电池组给出的电流是由公式

$$I = \frac{Nn\mathscr{E}}{NR + n^2 r}$$

确定的. 其中 $\mathscr{E}$ 是一个电池的电动势, r 是它的内电抗, 而 R 是它的外电抗.

确定在怎样的 n 值下, 电池组给出最大的电流.

889. 确定在拦河坝中圆形出水孔当怎样的直径 y 时, 水的秒流量 Q 会有最大值, 如果 $Q = cy\sqrt{h-y}$, 其中 h 为出水孔最低点的深度 (h 和经验系数 c 都是常数).

890. 如果 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是量 x 的等精度测量结果, 那么它的最大概值是当它的误差平方和

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n}(x - x_i)^2$$

是最小值时 (**最小二乘原理**).

证明: 量 x 的最大概值是测量结果的算术平均值.

§2. 凹性, 拐点

1°. **函数图形的凹性**. 称可微函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 上的图形为**向下凹的** (在区间 (a_1, b_1) 上**向上凹的**), 如果当 $a < x < b$ (或者相应地当 $a_1 < x < b_1$) 时, 曲线弧位于从区间 (a, b) (或者区间 (a_1, b_1)) 上任一点所作出切线的下面 (或者上面) (图 29). 在相应区间上满足不等式

$$f''(x) < 0 \quad (f''(x) > 0)$$

是图形 $y = f(x)$ 下 (上) 凹性的充分条件.

通常不说图形是向下凹的, 而却称它是**向上凸的**. 类似地, 向上凹的图形也称为**向下凸的**.

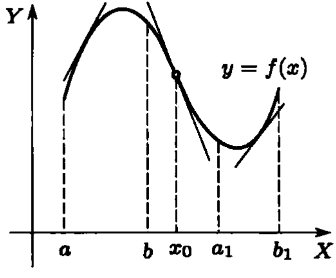


图 29

2°. **拐点**. 点 $(x_0, f(x_0))$ 称为**拐点**, 如果函数图形凹性的朝向在该点处改变.

对于函数 $y = f(x)$ 图形拐点的横坐标 x_0 有 $f''(x_0) = 0$ 或者 $f''(x)$ 不存在. 我们称使得 $f''(x_0) = 0$ 或者 $f''(x_0)$ 不存在的点 x_0 为**第二类型临界点**. 如果 $f''(x)$ 在区间 $x_0 - \delta < x < x_0$ 和 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 中保持不变的符号, 这里 δ 是某个正数, 而且这两个符号相反, 那么第二类型临界点 x_0 就是拐点的横坐标. 而如果 $f''(x)$ 在上述区间的符号相同, 那么 x_0 就不是拐点.

例 1　确定高斯 (Gauss) 曲线

$$y = e^{-x^2}$$

的凹凸区间以及拐点.

解 我们有

$$y' = -2xe^{-x^2}$$

和

$$y'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2}.$$

令二阶导数 y'' 等于零, 我们求得第二类型型临界点

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad 和 \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

这两个点将数轴 $-\infty < x < +\infty$ 分成三个区间: I$(-\infty, x_1)$, II (x_1, x_2), III$(x_2, +\infty)$. 相应的 y'' 符号是 $+, -, +$ (例如, 从上述的每一个区间中取一个点, 并将相应的 x 值代入 y'' 就可以确证这一点). 所以: 1) 当 $-\infty < x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ 和 $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < +\infty$ 时, 曲线是上凹的; 2) 当 $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, 曲线是下凹的. 点 $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ 是拐点 (图 30).

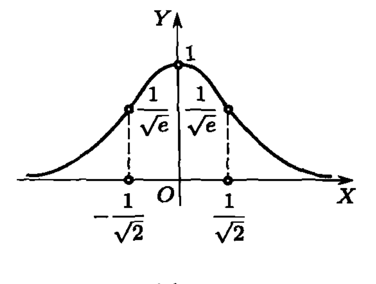


图 30

我们注意到, 由于高斯曲线关于 OY 轴是对称的, 因此对这条曲线凹性的研究只需在半轴 $0 < x < +\infty$ 上进行.

例 2 求出函数

$$y = \sqrt[3]{x+2}$$

的图形的拐点.

解 我们有

$$y'' = -\frac{2}{9}(x+2)^{-\frac{5}{3}} = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(x+2)^5}}. \tag{1}$$

显然, y'' 无处为零.

令等式 (1) 右端的分式分母等于零. 我们得到当 $x = -2$ 时, y'' 不存在. 由于当 $x < -2$ 时有 $y'' > 0$, 而当 $x > -2$ 时有 $y'' < 0$, 所以 $(-2, 0)$ 是拐点 (图 31). 在这一点的切线平行于纵轴, 这是由于当 $x = -2$ 时, 一阶导数 y' 无限大.

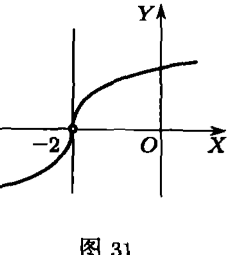


图 31

求出下列函数图形的凹性区间和拐点:

891. $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$.

892. $y = (x+1)^4$.

893. $y = \dfrac{1}{x+3}$.

894. $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 12}$.

895. $y = \sqrt[3]{4x^3 - 12x}$.

896. $y = \cos x$.

897. $y = x - \sin x$.

898. $y = x^2 \ln x$.

899. $y = \arctan x - x$. **900.** $y = (1 + x^2)e^x$.

§3. 渐近线

1°. **定义.** 如果点 (x, y) 沿着曲线 $y = f(x)$ 连续移动, 使得点的坐标至少有一个趋于无穷, 而且这时该点与某直线的距离趋于零, 那么这条直线就称为曲线的**渐近线**.

2°. **垂直渐近线.** 如果存在这样的数 a, 使得

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty,$$

那么直线 $x = a$ 就是渐近线 (**垂直渐近线**).

3°. **斜渐近线.** 如果存在极限

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k_1$$

和

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - k_1 x] = b_1,$$

那么直线 $y = k_1 x + b_1$ 就是渐近线 (**右倾斜**或者, 在 $k_1 = 0$ 的情况下, **右水平渐近线**).

如果存在极限

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = k_2$$

和

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - k_2 x] = b_2,$$

那么直线 $y = k_2 x + b_2$ 就是渐近线 (**左倾斜**或者, 在 $k_2 = 0$ 的情况下, **左水平渐近线**). 函数 $y = f(x)$ 的图形 (假设函数是单值的) 不可能有多于一条右 (倾斜或者水平) 和多于一条左 (倾斜或者水平) 渐近线.

例 1 求出曲线

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

的渐近线.

解 令分母等于零, 我们得到两条垂直渐近线

$$x = -1 \text{ 和 } x = 1.$$

我们寻找斜渐近线. 当 $x \to +\infty$ 时我们得到

$$k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x^2 - 1}} = 1,$$

$$b_1 = \lim_{x \to +\infty} (y - x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} = 0,$$

亦即, 右渐近线是直线 $y = x$. 类似地, 当 $x \to -\infty$ 时我们有

$$k_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = -1,$$

$$b_2 = \lim_{x \to -\infty} (y + x) = 0.$$

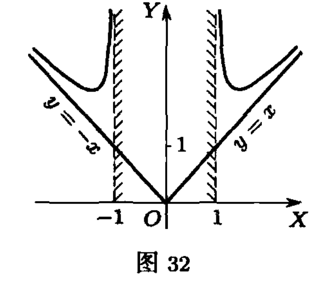


图 32

于是, 左渐近线是 $y=-x$ (图 32). 如果考虑到这条曲线的对称性, 那么该曲线渐近线的讨论即可简化.

例 2　求出曲线

$$y=x+\ln x$$

的渐近线.

解　因为

$$\lim_{x\to+0}y=-\infty,$$

所以直线 $x=0$ 是垂直渐近线 (下面的). 我们只讨论曲线的倾斜右渐近线 (由于 $x>0$).

我们有

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}\ln x=\infty.$$

亦即, 没有斜渐近线.

如果曲线用参数方程 $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ 给出, 那么首先研究的是否有这样的参数值 t, 它使得函数 $\varphi(t)$ 或者 $\psi(t)$ 中之一变成无穷, 而另一个仍然为有限. 当 $\varphi(t_0)=\infty$, 而 $\psi(t_0)=c$ 时, 曲线有水平渐近线 $y=c$. 当 $\psi(t_0)=\infty$, 而 $\varphi(t_0)=c$ 时, 曲线有垂直渐近线 $x=c$.

如果 $\varphi(t_0)=\psi(t_0)=\infty$, 而且有

$$\lim_{x\to t_0}\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}=k,\qquad \lim_{x\to t_0}[\psi(t)-k\varphi(t)]=b,$$

那么曲线有斜渐近线 $y=kx+b$.

如果曲线由极坐标方程 $r=f(\varphi)$ 给出, 那么可以用前面的规则求出它的渐近线, 这只要把曲线的方程用公式 $x=r\cos\varphi=f(\varphi)\cos\varphi$; $y=r\sin\varphi=f(\varphi)\sin\varphi$ 变成参数的形式.

求出下列曲线的渐近线:

901. $y=\dfrac{1}{(x-2)^2}$.　　**902**. $y=\dfrac{x}{x^2-4x+3}$.

903. $y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$.　　**904**. $y=\dfrac{x^3}{x^2+9}$.

905. $y=\sqrt{x^2-1}$.　　**906**. $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$.

907. $y=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}$.　　**908**. $y=x-2+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}$.

909. $y=e^{-x^2}+2$.　　**910**. $y=\dfrac{1}{1-e^x}$.

911. $y=e^{\frac{1}{x}}$.　　**912**. $y=\dfrac{\sin x}{x}$.

913. $y=\ln(1+x)$.　　**914**. $x=t$; $y=t+2\arctan t$.

915. 求出双曲螺线 $r=\dfrac{a}{\varphi}$ 的渐近线.

§4. 按照特征点构造函数的图形

当作函数的图像时. 首先应当找出这个函数的定义域和弄清函数在其定义域边界上的性质. 事先注意到函数的某些特性也是有用的 (如果它们有的话), 例如: 对称性、周期性、符号不变性、单调性等等.

其次, 需要找出间断点、函数的极值点、拐点、渐近线等等. 所找出的这些要素使我们弄清函数的一般特性, 并且在数学上得到它的正确草图.

例 1 作出函数

$$y=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$$

的图形.

解 a) 除了 $x=\pm1$ 外, 函数处处存在.

函数是奇函数, 因此函数的图形关于点 $O(0,0)$ 对称. 这种状况简化了图形的作法.

b) 点 $x=-1$ 和 $x=1$ 是间断点. 而且有 $\lim\limits_{x\to1\pm0}y=\pm\infty$ 和 $\lim\limits_{x\to-1\pm0}y=\pm\infty$, 亦即, 直线 $x=\pm1$ 是图形的垂直渐近线.

c) 寻找倾斜渐近线. 我们有

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=0,$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}y=\infty,$$

亦即, 没有右倾斜渐近线. 从图形的对称性得出, 左倾斜渐近线也不存在.

d) 找出第一和第二类型的临界点, 这就是使得给定函数的一阶导数或者对应的二阶导数等于零或者不存在的点.

我们有

$$y'=\frac{x^2-3}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}, \tag{1}$$

$$y''=\frac{2x(9-x^2)}{9\sqrt[3]{(x^2-1)^7}}. \tag{2}$$

于是只有当 $x=\pm1$ 时, 导数 y' 和 y'' 才不存在, 也就是函数 y 本身不存在的点, 因此临界点就只有那些使得 y' 和 y'' 等于零的点.

从 (1) 和 (2) 得出

$$y'=0 \text{ 当 } x=\pm\sqrt{3};$$

$$y''=0 \text{ 当 } x=0 \text{ 和 } x=\pm3.$$

于是, 从区间 $(-\infty,-\sqrt{3}),(-\sqrt{3},-1),(-1,1),(1,\sqrt{3})$ 以及 $(\sqrt{3},+\infty)$ 中的每一个, y' 都保持不变的符号; 而从区间 $(-\infty,-3),(-3,-1),(-1,0),(0,1),(1,3)$ 以及 $(3,+\infty)$ 中的每一个, y'' 都保持不变的符号.

为了考察在上述每一个区间中 y' (或者对应地 y'') 有怎样的符号, 只需确定在上述每一个区间中任意一点 y' (或者 y'') 的符号.

这些讨论的结果可以很方便地做成一张表格 (表 I), 还可算出函数图形特征点的纵坐标. 我们注意到, 由于 y 是奇函数, 只需就 $x \geqslant 0$ 进行计算; 根据奇函数的对称性即可作出图形的左半部分.

表 I

x	0	(0,1)	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}\approx 1.73$	$(\sqrt{3},3)$	3	$(3,+\infty)$
y	0	$-$	$\pm\infty$	$+$	$+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\approx 1.37$	$+$	1.5	$+$
y'	$-$	$-$	不存在	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y''	0	$-$	不存在	$+$	$+$	$+$	0	$-$
结论	拐点	函数递减; 图形下凹	间断点	函数递减; 图形上凹	极小值点	函数递增; 图形上凹	拐点	函数递增; 图形下凹

e) 利用讨论的结果, 我们作出函数的图形 (图 33).

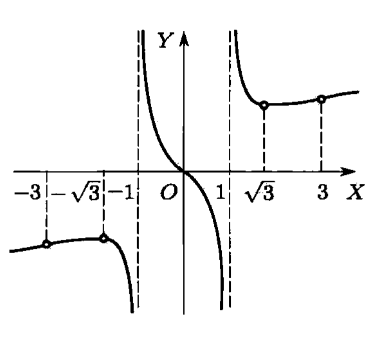


图 33

例 2 作出函数

$$y=\frac{\ln x}{x}$$

的图形.

解 a) 函数的存在区域: $0<x<+\infty$.

b) 在存在区域中没有间断点, 但是当逼近于存在区域的边界点 ($x=0$) 时, 我们有

$$\lim_{x\to 0} y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x}=-\infty.$$

亦即, 直线 $x=0$ (纵坐标轴) 是垂直渐近线.

c) 寻找右倾斜渐近线或者水平渐近线 (左倾斜渐近线不存在, 因为不可能有 $x\to-\infty$):

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=0,\qquad b=\lim_{x\to+\infty} y=0.$$

亦即, 右水平渐近线是横坐标轴: $y=0$.

d) 找出临界点.

我们有

$$y'=\frac{1-\ln x}{x\ln^2},\qquad y''=\frac{2\ln x-3}{x^3}.$$

在这个函数存在区域的所有点上, y' 和 y'' 都存在, 且有

$$\text{当 } \ln x=1,\ \text{亦即当 } x=e,\quad y'=0;$$

$$\text{当 } \ln x=\frac{3}{2},\ \text{亦即当 } x=e^{\frac{3}{2}},\quad y''=0.$$

作出包括特征点在内的表格 (表 II). 这时除了求出特征点外, 还求出有用的图形与坐标

轴的交点是有好处的. 令 $y=0$, 求出 $x=1$ (曲线与横坐标轴的交点); 与纵坐标轴不相交.

表 II

x	0	(0, 1)	1	$(1, e)$	$e\approx 2.72$	$(e, e^{\frac{3}{2}})$	$e^{\frac{3}{2}}\approx 4.49$	$(e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$
y	$-\infty$	$-$	0	$+$	$e^{-1}\approx 0.37$	$+$	$\frac{3}{2\sqrt{e^3}}\approx 0.33$	$+$
y'	不存在	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	不存在	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
结论	定义域的边界点; 垂直渐近线	函数递增; 图形下凹	函数递增; 图形下凹	函数递增; 图形下凹	函数的极大值点	函数递减; 图形下凹	拐点	函数递减; 图形上凹

e) 利用讨论的结果, 我们作出函数的图形 (图 34).

图 34

作出下面给出函数的图形: 确定每一个函数的存在区域、间断点、极值点、递增和递减区间、图形的拐点、凹性, 还有图形的渐近线.

916. $y=x^3-3x^2$.

917. $y=6x^2-x^4$.

918. $y=(x-1)^2(x+2)$.

919. $y=\dfrac{(x-2)^2(x+4)}{4}$.

920. $y=\dfrac{(x^2-5)^3}{125}$.

921. $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$.

922. $y=\dfrac{x^4-3}{x}$.

923. $y=\dfrac{x^4+3}{x}$.

924. $y=x^2+\dfrac{2}{x}$.

925. $y=\dfrac{1}{x^2+3}$.

926. $y=\dfrac{8}{x^2-4}$.

927. $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$.

928. $y=\dfrac{4x-12}{(x-2)^2}$.

929. $y=\dfrac{x}{x^2-4}$.

930. $y=\dfrac{16}{x^2(x-4)}$.

931. $y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$.

932. $y=\sqrt{x}+\sqrt{4-x}$.

933. $y=\sqrt{8+x}-\sqrt{8-x}$.

934. $y=x\sqrt{x+3}$.

935. $\sqrt{x^3-3x}$.

936. $y=\sqrt[3]{1-x^2}$.

937. $y=\sqrt[3]{1-x^3}$.

938. $y=2x+2-3\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

939. $y=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}$.

940. $y=\sqrt[3]{(x+4)^2}-\sqrt[3]{(x-4)^2}$.

941. $y=\sqrt[3]{(x-2)^2}+\sqrt[3]{(x-4)^2}$.

942. $y = \dfrac{4}{\sqrt{4-x^2}}$.

943. $y = \dfrac{8}{x\sqrt{x^2-4}}$.

944. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

945. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$.

946. $y = xe^{-x}$.

947. $y = \left(a + \dfrac{x^2}{a}\right)e^{\frac{x}{a}}$.

948. $y = e^{8x-x^2-14}$.

949. $y = (2+x^2)e^{-x^2}$.

950. $y = 2|x| - x^2$.

951. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

952. $y = \dfrac{x^2}{2}\ln\dfrac{x}{a}$.

953. $y = \dfrac{x}{\ln x}$.

954. $y = (x+1)\ln^2(x+1)$.

955. $y = \ln(x^2-1) + \dfrac{1}{x^2-1}$.

956. $y = \ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$.

957. $y = \ln(1+e^{-x})$.

958. $y = \ln\left(e + \dfrac{1}{x}\right)$.

959. $y = \sin x + \cos x$.

960. $y = \sin x + \dfrac{\sin 2x}{2}$.

961. $y = \cos x - \cos^2 x$.

962. $y = \sin^3 x + \cos^3 x$.

963. $y = \dfrac{1}{\sin x + \cos x}$.

964. $y = \dfrac{\sin x}{\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)}$.

965. $y = \sin x \cdot \cos 2x$.

966. $y = \cos x \cdot \cos 2x$.

967. $y = x + \sin x$.

968. $y = \arcsin\left(1 - \sqrt[3]{x^2}\right)$.

969. $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

970. $y = 2x - \tan x$.

971. $y = x\arctan x$.

972. $y = \begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x}, & 当\ x \neq 0; \\ 0, & 当\ x = 0. \end{cases}$

973. $y = x + 2\arctan x$.

974. $y = \dfrac{x}{2} + \arctan x$.

975. $y = \ln \operatorname{sh} x$.

976. $y = \operatorname{Arch}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$.

977. $y = e^{\sin x}$.

978. $y = e^{\arcsin\sqrt{x}}$.

979. $y = e^{\arctan x}$.

980. $y = \ln\sin x$.

981. $y = \ln\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)$.

982. $y = \ln x - \arctan x$.

983. $y = \cos x - \ln\cos x$.

984. $y = \arctan(\ln x)$.

985. $y = \arcsin\ln(x^2+1)$.

986. $y = x^x$.

987. $y = x^{\frac{1}{x}}$.

我们还建议作出上面给出的第 826—848 题的函数图形.

作出下列以参数形式给出的函数图形:

988. $x = t^2 - 2t, \quad y = t^2 + 2t.$

989. $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin t \quad (a > 0).$

990. $x = te^t, \quad y = te^{-t}.$

991. $x = t + e^{-t}, \quad y = 2t + e^{-2t}.$

992. $x = a(\operatorname{sh} t - t), \quad y = a(\operatorname{ch} t - 1) \quad (a > 0).$

§5. 弧的微分, 曲率

1°. **弧的微分**. 在笛卡儿坐标 x 和 y 中, 由方程给出的平面曲线弧的微分用公式

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

表示; 这时, 如果曲线的方程具有形式:

a) $y = f(x)$, 那么 $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$, 当 $dx > 0$;

b) $x = f_1(y)$, 那么 $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$, 当 $dy > 0$;

c) $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, 那么 $ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$, 当 $dt > 0$;

d) $F(x,y) = 0$, 那么 $ds = \frac{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2}}{|F_y'|}|dx| = \frac{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2}}{|F_x'|}|dy|$.

通过用 α 表示切线的正方向 (亦即曲线弧 s 朝增加方面的方向) 与 OX 轴正方向组成的角, 我们得到

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds},$$

$$\sin\alpha = \frac{dy}{ds}.$$

在极坐标下

$$ds = \sqrt{(dr)^2 + (r\,d\varphi)^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi.$$

通过用 β 表示曲线上一点的极半径与曲线在该点的切线之间的夹角之后, 我们有

$$\cos\beta = \frac{dr}{ds},$$

$$\sin\beta = r\frac{d\varphi}{ds}.$$

2°. **曲线的曲率**. 曲线在点 M 和点 N 处切线正方向之间的夹角 (**邻角**), 与弧长 $\widehat{MN}=\Delta s$ 之比, 当 $M\to N$ 时的极限称为曲线在其点 M 处的**曲率** K (图 35), 亦即

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\frac{d\alpha}{ds},$$

其中 α 为在点 M 处切线的正方向与 OX 轴正方向之间的夹角.

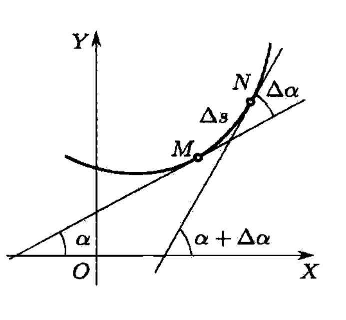


图 35

曲率绝对值的倒数称为**曲率半径** R, 亦即

$$R=\frac{1}{|K|}.$$

圆 ($K=\dfrac{1}{a}$, 这里 a 是圆的半径) 和直线 ($K=0$) 是曲率不变的曲线.

在直角坐标系下, 曲率的计算公式如下 (准确到符号):

1) 如果曲线用显式的方程 $y=f(x)$ 给出, 那么

$$K=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}};$$

2) 如果曲线用隐式的方程 $F(x,y)=0$ 给出, 那么

$$K=\frac{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}{(F'^2_x+F'^2_y)^{3/2}};$$

3) 如果曲线是用参数形式的方程 $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ 给出, 那么

$$K=\frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{(x'^2+y'^2)^{3/2}},$$

其中

$$x'=\frac{dx}{dt},\quad y'=\frac{dy}{dt},\quad x''=\frac{d^2x}{dt^2},\quad y''=\frac{d^2y}{dt^2}.$$

在极坐标中, 当曲线用方程 $r=f(\varphi)$ 给出时, 我们有

$$K=\frac{r^2+2r'^2-rr''}{(r^2+r'^2)^{3/2}},$$

其中

$$r'=\frac{dr}{d\varphi}\ \text{和}\ r''=\frac{d^2r}{d\varphi^2}.$$

3°. **曲率圆**. 过曲线上的点 M 和其他两个点 P 和 Q 的圆, 当 $P\to M$ 和 $Q\to M$ 时的极限位置称为曲线在其点 M 处的**曲率圆** (**密切圆**).

曲率圆的半径等于曲率半径, 而曲率圆的中心 (**曲率中心**) 位于过点 M 作出的朝曲线凹向的曲线法线上.

曲线的曲率中心坐标 X 和 Y 满足公式

$$X=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''},\qquad Y=y+\frac{1+y'^2}{y''}.$$

曲率中心的几何轨迹称为**渐屈线**.

如果在确定曲率中心坐标的公式中, 把 X 和 Y 看成是渐屈线上点的流动坐标, 那么这些公式就给出了以 x 和 y 为参数的渐屈线参数化方程 (如果曲线方程本身就是以参数形式给出的话就以 t 为参数).

例 1 求出抛物线 $y=x^2$ 的渐屈线方程.

解 $X=-4x^3, Y=\dfrac{1+6x^2}{2}$. 消去参数 x 之后, 我们求出显式形式的渐屈线方程 $Y=\dfrac{1}{2}+3\left(\dfrac{X}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$.

一条具有渐屈线的曲线, 其本身即是该渐屈线的渐开线 (渐伸线).

渐开线 Γ_2 的法线 MC 是渐屈线 Γ_1 的切线; 渐屈线上弧 $\overset{\frown}{CC_1}$ 的长度等于对应曲率半径的增量 $\overset{\frown}{CC_1}=|M_1C_1-MC|$, 因此渐开线 Γ_2 也称为曲线 Γ_1 的**切展线**, 它可看成掴开紧绕在 Γ_1 上的线而得到 (图 36). 每条渐屈线都对应着与不同初始线长相应的渐开线无穷集合.

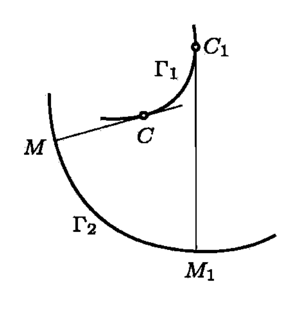


图 36

4°. **曲线的顶点**. 曲线上使得其曲率有极大值或者极小值的点称为该曲线的**顶点**. 为了确定曲线的顶点, 先求出曲率 K 的表达式, 再求极值点. 如果使用曲率半径求极值点较简单, 也可取 $R=\dfrac{1}{|K|}$ 来求.

例 2 求出悬链线 $y=a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$ $(a>0)$ 的顶点.

解 因为 $y'=\operatorname{sh}\dfrac{x}{a}$, 而 $y''=\dfrac{1}{a}\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$, 所以 $K=\dfrac{1}{a\operatorname{ch}^2\dfrac{x}{a}}$. 从而, $R=a\operatorname{ch}^2\dfrac{x}{a}$. 我们有 $\dfrac{dR}{dx}=\operatorname{sh}\dfrac{2x}{a}$. 令导数 $\dfrac{dR}{dx}$ 等于零, 我们得到 $\operatorname{sh}\dfrac{2x}{a}=0$, 由此求出唯一的临界点 $x=0$. 计算二阶导数 $\dfrac{d^2R}{dx^2}$ 并代入 $x=0$ 的值, 我们得到 $\left.\dfrac{d^2R}{dx^2}\right|_{x=0}=\left.\dfrac{2}{a}\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}\right|_{x=0}=\dfrac{2}{a}>0$, 亦即, $x=0$ 是悬链线曲率半径的极小值 (或者曲率的极大值) 点. 因此, 悬链线 $y=a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$ 的顶点是点 $A(0,a)$.

求出下面每一条曲线弧的微分, 以及其切线与 OX 轴正方向所组成角的余弦和正弦:

993. $x^2+y^2=a^2$ (圆).

994. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (椭圆).

995. $y^2=2px$ (抛物线).

996. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ (星形线).

997. $y=a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$ (悬链线).

998. $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ (摆线).

999. $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ (星形线).

求出下面每一条曲线弧的微分, 以及其切线与极半径所组成角的余弦和正弦:

1000. $r = a\varphi$ (阿基米德螺线).

1001. $r = \dfrac{a}{\varphi}$ (双曲螺线).

1002. $r = a\sec^2 \dfrac{\varphi}{2}$ (抛物线).

1003. $r = a\cos^2 \dfrac{\varphi}{2}$ (心脏线).

1004. $r = a^{\varphi}$ (对数螺线).

1005. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (双纽线).

计算给定曲线在指定点处的曲率:

1006. $y = x^4 - 4x^3 - 18x^2$ 在坐标原点.

1007. $x^2 + xy + y^2 = 3$ 在点 $(1, 1)$ 处.

1008. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 在顶点 $A(a, 0)$ 和 $B(0, b)$ 处.

1009. $x = t^2, y = t^3$ 在点 $(1, 1)$ 处.

1010. $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ 在极角为 $\varphi = 0$ 和 $\varphi = \pi$ 的顶点处.

1011. 抛物线 $y^2 = 8x$ 在哪一点的曲率等于 0.128?

1012. 找出曲线 $y = e^x$ 的顶点.

求给定曲线 (在任意点处) 的曲率半径:

1013. $y = x^3$ (立方抛物线).

1014. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (椭圆).

1015. $x = \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{\ln y}{2}$.

1016. $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ (星形线).

1017. $x = a(\cos t + t\sin t), y = a(\sin t - t\cos t)$ (圆的渐开线).

1018. $r = ae^{k\varphi}$ (对数螺线).

1019. $r = a(1 + \cos\varphi)$ (心脏线).

1020. 求出抛物线 $y^2 = 2px$ 曲率半径的最小值.

1021. 证明: 悬链线 $y = a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a}$ 的曲率半径等于法线段的长度.

计算下列给定曲线在指定点处曲率中心的坐标:

1022. $xy = 1$ 在点 $(1, 1)$ 处.

1023. $ay^2 = x^3$ 在点 (a, a) 处.

写出下列给定曲线在指定点处的曲率圆方程:

1024. $y = x^2 - 6x + 10$ 在点 $(3, 1)$ 处.

1025. $y = e^x$ 在点 $(0, 1)$ 处.

求出下列曲线的渐屈线:

1026. $y^2 = 2px$ (抛物线).

1027. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (椭圆).

1028. 证明: 摆线

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t)$$

的渐屈线是偏移摆线.

1029. 证明: 对数螺线

$$r = ae^{k\varphi}$$

的渐屈线是具有相同极点的对数螺线.

1030. 证明: 曲线

$$x = a(\cos t + t\sin t), \quad y = a(\sin t - t\cos t)$$

是圆 $x = a\cos t, y = a\sin t$ 的渐开线.

第四章　不定积分

§1. 直接积分法

1°. 积分法的基本规则.

1) 如果 $F'(x) = f(x)$, 那么

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

其中 C 为任意常数.

2) $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$, 这里 A 为常量.

3) $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.

4) 如果 $\int f(x)dx = F(x) + C$ 和 $u = \varphi(x)$, 那么

$$\int f(u)du = F(u) + C.$$

特别,

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \ (a \neq 0).$$

2°. 最简单积分表.

I. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1.$

II. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

III. $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} + C_1 \ (a \neq 0),$

IV. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C \ (a \neq 0),$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C \ (a \neq 0).$$

V. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C \ (a \neq 0).$

VI. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C_1 \ (a>0).$

VII. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ (a>0), \qquad \int e^x dx = e^x + C.$

VIII. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

IX. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

X. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C.$

XI. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C.$

XII. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C = \ln|\csc x - \cot x| + C.$

XIII. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C = \ln|\tan x + \sec x| + C.$

XIV. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$

XV. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$

XVI. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

XVII. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

例 1

$$\begin{aligned}\int (ax^2+bx+c)dx &= \int ax^2 dx + \int bx dx + \int c dx \\ &= a\int x^2 dx + b\int x dx + c\int dx = a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx + C.\end{aligned}$$

运用基本规则 1), 2), 3) 和积分法公式, 求出下列积分:

1031. $\int 5a^2x^6 dx.$

1032. $\int (6x^2+8x+3)dx.$

1033. $\int x(x+a)(x+b)dx.$

1034. $\int (a+bx^3)^2 dx.$

1035. $\int \sqrt{2px}dx.$

1036. $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}.$

1037. $\int (nx)^{\frac{1-n}{n}} dx.$

1038. $\int \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx.$

1039. $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx.$

1040. $\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$

1041. $\int \frac{(x^m - x^n)^2}{\sqrt{x}} dx.$

1042. $\int \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right)^4}{\sqrt{ax}} dx.$

1043. $\int \frac{dx}{x^2 + 7}.$

1044. $\int \frac{dx}{x^2 - 10}.$

1045. $\int \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}}.$

1046. $\int \frac{dx}{\sqrt{8 - x^2}}.$

1047. $\int \frac{\sqrt{2 + x^2} - \sqrt{2 - x^2}}{\sqrt{4 - x^4}} dx.$

1048*. a) $\int \tan^2 x dx$; b) $\int \operatorname{th}^2 x dx.$

1049. a) $\int \cot^2 x dx$; b) $\int \operatorname{cth}^2 x dx.$

1050. $\int 3^x e^x dx.$

3°. **用微分号下转化的方法积分**. 规则 4) 相当大地扩充了最简单积分表. 这就是说, 由于这一条规则, 不管积分变量是依赖于自变量还是依赖于可微函数, 积分表总正确.

例 2

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x - 2}} = \frac{1}{5} \int (5x - 2)^{-\frac{1}{2}} d(5x - 2) = \frac{1}{5} \int u^{-\frac{1}{2}} du$$
$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{u^{1/2}}{1/2} + C = \frac{1}{5} \frac{(5x - 2)^{1/2}}{1/2} + C = \frac{2}{5} \sqrt{5x - 2} + C,$$

其中假设 $u = 5x - 2$. 而且利用了规则 4) 和积分表中的积分 I.

例 3

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1 + x^4}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{\sqrt{1 + (x^2)^2}} = \frac{1}{2} \ln \left(x^2 + \sqrt{1 + x^4}\right) + C.$$

其中隐含着 $u = x^2$, 而且运用了规则 4) 和积分表中的积分 V.

例 4 根据规则 4) 和积分表中的积分 Ⅶ 有

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int e^{x^3} d(x^3) = \frac{1}{3} e^{x^3} + C.$$

在例 2, 例 3, 例 4 中, 在利用积分表中的积分公式前, 我们把定积分化为如下形式

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int f(u) du, \quad \text{其中 } u = \varphi(x).$$

这种类型的变换称为**微分号下的转化**.

注意到完全可用的微分变换是有益的, 特别是在例 2 和例 3 所用过的变换:

$$\text{a) } \frac{1}{a} d(ax + b) \ (a \neq 0); \qquad \text{b) } xdx = \frac{1}{2} d(x^2) \text{ 等等.}$$

应用基本规则和积分公式, 求下列积分:

1051.** $\int \frac{adx}{a - x}.$

1052.** $\int \frac{2x + 3}{2x + 1} dx.$

1053. $\int \frac{1 - 3x}{3 + 2x} dx.$

1054. $\int \frac{xdx}{a + bx}.$

1055. $\int \frac{ax + b}{\alpha x + \beta} dx.$

1056. $\int \frac{x^2 + 1}{x - 1} dx.$

1057. $\int \frac{x^2 + 5x + 7}{x + 3} dx.$

1058. $\int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x - 1} dx.$

1059. $\int\left(a+\frac{b}{x-a}\right)^2 dx.$

1060*. $\int\frac{x}{(x+1)^2}dx.$

1061. $\int\frac{bdy}{\sqrt{1-y}}.$

1062. $\int\sqrt{a-bx}dx.$

1063*. $\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

1064. $\int\frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx.$

1065. $\int\frac{dx}{3x^2+5}.$

1066. $\int\frac{dx}{7x^2-8}.$

1067. $\int\frac{dx}{(a+b)-(a-b)x^2}\ (0<b<a).$

1068. $\int\frac{x^2}{x^2+2}dx.$

1069. $\int\frac{x^3}{a^2-x^2}dx.$

1070. $\int\frac{x^2-5x+6}{x^2+4}dx.$

1071. $\int\frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}}.$

1072. $\int\frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}.$

1073. $\int\frac{2x-5}{3x^2-2}dx.$

1074. $\int\frac{3-2x}{5x^2+7}dx.$

1075. $\int\frac{3x+1}{\sqrt{5x^2+1}}dx.$

1076. $\int\frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}}dx.$

1077. $\int\frac{xdx}{x^2-5}.$

1078. $\int\frac{xdx}{2x^2+3}.$

1079. $\int\frac{ax+b}{a^2x^2+b^2}dx.$

1080. $\int\frac{xdx}{\sqrt{a^4-x^4}}.$

1081. $\int\frac{x^2}{1+x^6}dx.$

1082. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^6-1}}.$

1083. $\int\sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx.$

1084. $\int\frac{\arctan\frac{x}{2}}{4+x^2}dx.$

1085. $\int\frac{x-\sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2}dx.$

1086. $\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)\ln(x+\sqrt{1+x^2})}}.$

1087. $\int ae^{-mx}dx.$

1088. $\int 4^{2-3x}dx.$

1089. $\int(e^t-e^{-t})dt.$

1090. $\int\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2dx.$

1091. $\int\frac{(a^x-b^x)^2}{a^xb^x}dx.$

1092. $\int\frac{a^{2x}-1}{\sqrt{a^x}}dx.$

1093. $\int e^{-(x^2+1)}xdx.$

1094. $\int x\cdot 7^{x^2}dx.$

1095. $\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx.$

1096. $\int 5^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}.$

1097. $\int\frac{e^x}{e^x-1}dx.$

1098. $\int e^x\sqrt{a-be^x}dx.$

1099. $\int \left(e^{\frac{x}{a}}+1\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{x}{a}} dx.$

1100*. $\int \frac{dx}{2^x+3}.$

1101. $\int \frac{a^x dx}{1+a^{2x}}.$

1102. $\int \frac{e^{-bx}}{1-e^{-2bx}} dx.$

1103. $\int \frac{e^t dt}{\sqrt{1-e^{2t}}}.$

1104. $\int \sin(a+bx)dx.$

1105. $\int \cos\frac{x}{\sqrt{2}} dx.$

1106. $\int (\cos ax+\sin ax)^2 dx.$

1107. $\int \cos\sqrt{x}\frac{dx}{\sqrt{x}}.$

1108. $\int \sin(\lg x)\frac{dx}{x}.$

1109*. $\int \sin^2 x dx.$

1110*. $\int \cos^2 x dx.$

1111. $\int \sec^2(ax+b)dx.$

1112. $\int \cot^2 ax dx.$

1113. $\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{a}}.$

1114. $\int \frac{dx}{3\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)}.$

1115. $\int \frac{dx}{\sin(ax+b)}.$

1116. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x^2}.$

1117. $\int x\sin(1-x^2)dx.$

1118. $\int \left(\frac{1}{\sin\sqrt{2}x}-1\right)^2 dx.$

1119. $\int \tan x dx.$

1120. $\int \cot x dx.$

1121. $\int \cot\frac{x}{a-b} dx.$

1122. $\int \frac{dx}{\tan\frac{x}{5}}.$

1123. $\int \tan\sqrt{x}\frac{dx}{\sqrt{x}}.$

1124. $\int x\cot(x^2+1)dx.$

1125. $\int \frac{dx}{\sin x\cos x}.$

1126. $\int \cos\frac{x}{a}\sin\frac{x}{a}dx.$

1127. $\int \sin^3 6x\cos 6x dx.$

1128. $\int \frac{\cos ax}{\sin^5 ax}dx.$

1129. $\int \frac{\sin 3x}{3+\cos 3x}dx.$

1130. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{\cos^2 x-\sin^2 x}}dx.$

1131. $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\sin 2x dx.$

1132. $\int \tan^3\frac{x}{3}\sec^2\frac{x}{3}dx.$

1133. $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x}dx.$

1134. $\int \frac{\cot^{2/3} x}{\sin^2 x}dx.$

1135. $\int \frac{1+\sin 3x}{\cos^2 3x}dx.$

1136. $\int \frac{(\cos ax+\sin ax)^2}{\sin ax}dx.$

1137. $\int \frac{\csc^2 3x}{b-a\cot 3x}dx.$

1138. $\int (2\,\mathrm{sh}\,5x-3\,\mathrm{ch}\,5x)dx.$

1139. $\int \mathrm{sh}^2 x dx.$

1140. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}\,x}.$

1141. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$.

1142. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}$.

1143. $\int \operatorname{th} x dx$.

1144. $\int \operatorname{cth} x dx$.

求出不定积分:

1145. $\int x \sqrt[5]{5-x^2} dx$.

1146. $\int \frac{x^3-1}{x^4-4x+1} dx$.

1147. $\int \frac{x^3}{x^8+5} dx$.

1148. $\int x e^{-x^2} dx$.

1149. $\int \frac{3-\sqrt{2+3x^2}}{2+3x^2} dx$.

1150. $\int \frac{x^3-1}{x+1} dx$.

1151. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x}}$.

1152. $\int \frac{1-\sin x}{x+\cos x} dx$.

1153. $\int \frac{\tan 3x - \cot 3x}{\sin 3x} dx$.

1154. $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

1155. $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x - 2}} dx$.

1156. $\int \left(2 + \frac{x}{2x^2+1}\right) \frac{dx}{2x^2+1}$.

1157. $\int a^{\sin x} \cos x dx$.

1158. $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}} dx$.

1159. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

1160. $\int \tan^2 ax dx$.

1161. $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$.

1162. $\int \frac{\sec^2 x dx}{\sqrt{4-\tan^2 x}}$.

1163. $\int \frac{dx}{\cos \frac{x}{a}}$.

1164. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x} dx$.

1165. $\int \tan \sqrt{x-1} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$.

1166. $\int \frac{x dx}{\sin x^2}$.

1167. $\int \frac{e^{\arctan x} + x \ln(1+x^2) + 1}{1+x^2} dx$.

1168. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx$.

1169. $\int \frac{\left(1 - \sin \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}{\sin \frac{x}{\sqrt{2}}} dx$.

1170. $\int \frac{x^2}{x^2-2} dx$.

1171. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx$.

1172. $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx$.

1173. $\int \frac{5-3x}{\sqrt{4-3x^2}} dx$.

1174. $\int \frac{dx}{e^x+1}$.

1175. $\int \frac{dx}{(a+b)+(a-b)x^2}$ $(0 < b < a)$.

1176. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-2}} dx$.

1177. $\int \frac{dx}{\sin ax \cos ax}$.

1178. $\int \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0\right) dt$.

1179. $\int \frac{dx}{x(4-\ln^2 x)}$.

1180. $\int \frac{\arccos \frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}dx$.

1181. $\int e^{-\tan x}\sec^2 x dx$.

1182. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{2-\sin^4 x}}dx$.

1183. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+\cos^2 x}$.

1184. $\int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

1185. $\int \frac{\sec x \tan x}{\sqrt{\sec^2 x+1}}dx$.

1186. $\int \frac{\cos 2x}{4+\cos^2 2x}dx$.

1187. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$.

1188. $\int \sqrt{\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{1+x^2}}dx$.

1189. $\int x^2 \operatorname{ch}(x^3+3)dx$.

1190. $\int \frac{3^{\operatorname{th} x}}{\operatorname{ch}^2 x}dx$.

§2. 变量变换法

1°. **不定积分中的变量变换**. 假设

$$x = \varphi(t),$$

其中 t 为新的变量, φ 为连续可微的函数, 我们有

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \tag{1}$$

我们用如此方法来选取函数 φ, 力求使得 (1) 式的右边部分具有更为方便的积分形式.

例 1 求

$$\int x\sqrt{x-1}dx.$$

解 令 $t=\sqrt{x-1}$, 得出 $x=t^2+1$ 以及 $dx=2tdt$. 于是

$$\int x\sqrt{x-1}dx = \int (t^2+1)t\cdot 2tdt = 2\int (t^4+t^2)dt$$
$$= \frac{2}{5}t^5+\frac{2}{3}t^3+C = \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

有时运用形式为

$$u=\varphi(x)$$

的变换.

我们假设积分表达式 $f(x)dx$ 得以变成如此形式:

$$f(x)dx = g(u)du, \quad 这里\ u=\varphi(x).$$

如果 $\int g(u)du$ 已知, 亦即

$$\int g(u)du = F(u)+C,$$

那么

$$\int f(x)dx = F[\varphi(x)]+C.$$

其实, 这些方法我们已经在 §1, 3° 中使用过了. 其中的例 2, 例 3, 例 4 (§1) 也可以用如下方法求解:

例 2 令 $u = 5x - 2$, 于是有 $du = 5dx$, $dx = \frac{1}{5}du$, 因此

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}} = \frac{1}{5}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{5}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{5x-2} + C.$$

例 3 令 $u = x^2$, 于是有 $du = 2xdx$, $xdx = \frac{1}{2}du$, 因此

$$\int \frac{xdx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{2}\ln(u + \sqrt{1+u^2}) + C = \frac{1}{2}\ln(x^2 + \sqrt{1+x^4}) + C.$$

例 4 令 $u = x^3$, 于是有 $du = 3x^2dx$, $x^2dx = \frac{1}{3}du$, 因此

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3}\int e^u du = \frac{1}{3}e^u + C = \frac{1}{3}e^{x^3} + C.$$

2°. **三角函数的变换.**

1) 如果积分含有根式 $\sqrt{a^2 - x^2}$, 那么通常就令 $x = a\sin t$, 由此得出

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t.$$

2) 如果积分含有根式 $\sqrt{x^2 - a^2}$, 那么就令 $x = a\sec t$, 由此得出

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a\tan t.$$

3) 如果积分含有根式 $\sqrt{x^2 + a^2}$, 那么就令 $x = a\tan t$, 由此得出

$$\sqrt{x^2 + a^2} = a\sec t.$$

我们注意到: 三角函数的变换并不总是有效的. 代替三角函数的变换, 有时利用具有类似特性的**双曲三角函数的变换**更为方便 (见第 1209 题).

有关三角函数变换和双曲三角函数变换的更为详细情况请参看 §9.

例 5 求出

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx.$$

解 我们令 $x = \tan t$. 于是, $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$, 因此

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx = \int \frac{\sqrt{\tan^2 t+1}}{\tan^2 t}\frac{dt}{\cos^2 t} = \int \frac{\sec t\cos^2 t}{\sin^2 t}\frac{dt}{\cos^2 t} = \int \frac{dt}{\sin^2 t\cos t}$$

$$= \int \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t\cos t}dt = \int \frac{dt}{\cos t} + \int \frac{\cos t}{\sin^2 t}dt$$

$$= \ln|\tan t + \sec t| - \frac{1}{\sin t} + C$$

$$= \ln\left|\tan t + \sqrt{1+\tan^2 t}\right| - \frac{1+\tan^2 t}{\tan t} + C$$

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| - \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C.$$

1191. 应用上述变换, 求出下列积分:

a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}},\ x=\frac{1}{t};$ b) $\int \frac{dx}{e^x+1},\ x=-\ln t;$

c) $\int x(5x^2-3)^7dx,\ 5x^2-3=t;$ d) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x-1}},\ t=\sqrt{x+1};$

e) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}},\ t=\sin x.$

运用适当的变换, 求出积分:

1192. $\int x(2x+5)^{10}dx.$ **1193.** $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx.$

1194. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}.$ **1195.** $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}.$

1196. $\int \frac{\ln 2x}{\ln 4x}\frac{dx}{x}.$ **1197.** $\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

1198. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx.$ **1199.** $\int \frac{\sin^2 x}{\sqrt{\cos x}}dx.$

1200*. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$

运用三角函数变换, 求出积分:

1201. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}.$ **1202.** $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{2-x^2}}.$

1203. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx.$ **1204*.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

1205. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx.$ **1206*.** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}.$

1207. $\int \sqrt{1-x^2}dx.$

1208. 利用变换 $x=\sin^2 t$, 计算积分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

1209. 运用双曲三角函数变换 $x=a\,\mathrm{sh}\,t$, 求出积分

$$\int \sqrt{a^2+x^2}dx.$$

解 我们有 $\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+a^2\,\mathrm{sh}^2\,t}=a\,\mathrm{ch}\,t$ 以及 $dx=a\,\mathrm{ch}\,tdt$. 由此得出

$$\int \sqrt{a^2+x^2}dx=\int a\,\mathrm{ch}\,t\cdot a\,\mathrm{ch}\,tdt=a^2\int \mathrm{ch}^2\,tdt=a^2\int \frac{\mathrm{ch}\,2t+1}{2}dt$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{2}\mathrm{sh}\,2t+t\right)+C=\frac{a^2}{2}(\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t+t)+C.$$

由于

$$\mathrm{sh}\,t=\frac{x}{a},\qquad \mathrm{ch}\,t=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a},$$

以及

$$e^t = \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t = \frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a},$$

所以我们最后得到

$$\int \sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{x}{a}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C_1,$$

其中 $C_1 = C - \frac{a^2}{2}\ln a$ 为新的任意常数.

1210. 在令 $x = a\operatorname{ch} t$ 之后, 求出积分

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

§3. 分部积分法

分部积分公式. 如果 $u=\varphi(x)$ 和 $v=\psi(x)$ 都是可微函数, 那么有

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

例 1 求积分

$$\int x\ln xdx.$$

令 $u - \ln x$, 于是 $dv = xdx$, 从而有 $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^2}{2}$. 由此得出

$$\int x\ln xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

有时为了将给定积分转化成积分表中的公式, 需要应用几次的分部积分公式. 在某些情况下, 利用分部积分得到一个从中可以确定所求积分的方程.

例 2 求积分

$$\int e^x\cos xdx.$$

我们有

$$\int e^x\cos xdx = \int e^x d(\sin x) = e^x\sin x - \int e^x\sin xdx$$
$$= e^x\sin x + \int e^x d(\cos x) = e^x\sin x + e^x\cos x - \int e^x\cos xdx.$$

于是

$$\int e^x\cos xdx = e^x\sin x + e^x\cos x - \int e^x\cos xdx,$$

由此得出

$$\int e^x\cos xdx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C.$$

利用分部积分公式求下列积分:

1211. $\int \ln x dx$.

1212. $\int \arctan x dx$.

1213. $\int \arcsin x dx$.

1214. $\int x \sin x dx$.

1215. $\int x \cos 3x dx$.

1216. $\int \frac{x}{e^x} dx$.

1217. $\int x \cdot 2^{-x} dx$.

1218.** $\int x^2 e^{3x} dx$.

1219*. $\int (x^2 - 2x + 5)e^{-x} dx$.

1220*. $\int x^3 e^{-\frac{x}{3}} dx$.

1221. $\int x \sin x \cos x dx$.

1222*. $\int (x^2 + 5x + 6) \cos 2x dx$.

1223. $\int x^2 \ln x dx$.

1224. $\int \ln^2 x dx$.

1225. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$.

1226. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

1227. $\int x \arctan x dx$.

1228. $\int x \arcsin x dx$.

1229. $\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) dx$.

1230. $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$.

1231. $\int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx$.

1232. $\int e^x \sin x dx$.

1233. $\int 3^x \cos x dx$.

1234. $\int e^{ax} \sin bx dx$.

1235. $\int \sin(\ln x) dx$.

利用各种方法求下列积分:

1236. $\int x^3 e^{-x^2} dx$.

1237. $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

1238. $\int (x^2 - 2x + 3) \ln x dx$.

1239. $\int x \ln \frac{1 - x}{1 + x} dx$.

1240. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$.

1241. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$.

1242. $\int x^2 \arctan 3x dx$.

1243. $\int x(\arctan x)^2 dx$.

1244. $\int (\arcsin x)^2 dx$.

1245. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$.

1246. $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1 - x}} dx$.

1247. $\int x \tan^2 2x dx$.

1248. $\int \frac{\sin^2 x}{e^x} dx$.

1249. $\int \cos^2(\ln x) dx$.

1250.** $\int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx$.

1251*. $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$.

1252*. $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx.$ **1253*.** $\int \sqrt{A + x^2}dx.$

1254*. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9 - x^2}}.$

§4. 含有二次三项式的最简单积分

1°. **形式为** $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$ **的积分**. 计算的基本方法是将二次三项式转化成形式

$$ax^2 + bx + c = a(x+k)^2 + l, \tag{1}$$

其中 k 和 l 为常数. 为了实现变换 (1), 从二次三项式划分出完全平方总是方便的. 也可以利用变换

$$2ax + b = t.$$

如果 $m = 0$, 那么把二次三项式转化成形式 (1) 之后, 我们就得到积分表中的公式 Ⅲ 或者 Ⅳ (见 §1, 2° 中的最简单积分表).

例 1

$$\int \frac{dx}{2x^2 - 5x + 7} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x^2 - 2\cdot\frac{5}{4}x + \frac{25}{16}\right) + \left(\frac{7}{2} - \frac{25}{16}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x - \frac{5}{4}\right)}{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{31}{16}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{\sqrt{31}}{4}}\arctan\frac{x - \frac{5}{4}}{\frac{\sqrt{31}}{4}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{31}}\arctan\frac{4x-5}{\sqrt{31}} + C.$$

如果 $m \neq 0$, 那么从分子划分出二次三项式的导数 $2ax + b$ 后可得到

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{\frac{m}{2a}(2ax+b) + \left(n - \frac{mb}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}dx$$

$$= \frac{m}{2a}\ln|ax^2+bx+c| + \left(n - \frac{mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c},$$

从而我们得到了上面计算过的积分.

例 2

$$\int \frac{x-1}{x^2-x-1}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-1) - \frac{1}{2}}{x^2-x-1}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2 - x - 1| - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2 - x - 1| - \frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right| + C.$$

2°. **形式为** $\displaystyle\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ **的积分**. 这类积分的计算采用类似于上面做过的方法. 在最后的结果中, 如果 $a > 0$, 则所论积分就转化成最简单积分表中的公式 V; 如果 $a < 0$, 则为公式 VI.

例 3

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{16} - \left(x - \frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5} + C.$$

例 4

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}}$$

$$= \sqrt{x^2+2x+2} + 2\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}) + C.$$

3°. **形式为** $\displaystyle\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ **的积分**. 利用倒数变换

$$\frac{1}{mx+n} = t,$$

可将这类积分转换成在 2° 中那样形式的积分.

例 5　求积分

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

解　我们令

$$x + 1 = \frac{1}{t},$$

由此得出

$$dx = -\frac{dt}{t^2}.$$

于是我们有

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-2t+2t^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|t - \frac{1}{2} + \sqrt{t^2 - t + \frac{1}{2}}\right| + C$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2(x^2+1)}}{x+1}\right| + C.$$

4°. **形式为** $\displaystyle\int \sqrt{ax^2+bx+c}dx$ **的积分**. 利用从二次三项式划分出完全平方的方法, 把给定积分转化成如下两个基本积分之一 (见第 1252 和第 1253 题):

1) $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C \ (a > 0)$;

2) $\int \sqrt{x^2 + A}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + A} + \frac{A}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + A}\right| + C$.

例 6

$$\int \sqrt{1 - 2x - x^2}dx = \int \sqrt{2 - (1 + x)^2}d(1 + x)$$
$$= \frac{1 + x}{2}\sqrt{1 - 2x - x^2} + \arcsin\frac{1 + x}{\sqrt{2}} + C.$$

求积分:

1255. $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$.

1256. $\int \frac{dx}{x^2 + 2x}$.

1257. $\int \frac{dx}{3x^2 - x + 1}$.

1258. $\int \frac{xdx}{x^2 - 7x + 13}$.

1259. $\int \frac{3x - 2}{x^2 - 4x + 5}dx$.

1260. $\int \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 3x + 4}dx$.

1261. $\int \frac{x^2dx}{x^2 - 6x + 10}$.

1262. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}}$.

1263. $\int \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}}$.

1264. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + px + q}}$.

1265. $\int \frac{3x - 6}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}dx$.

1266. $\int \frac{2x - 8}{\sqrt{1 - x - x^2}}dx$.

1267. $\int \frac{x}{\sqrt{5x^2 - 2x + 1}}dx$.

1268. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - x^2}}$.

1269. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x - 1}}$.

1270. $\int \frac{dx}{(x - 1)\sqrt{x^2 - 2}}$.

1271. $\int \frac{dx}{(x + 1)\sqrt{x^2 + 2x}}$.

1272. $\int \sqrt{x^2 + 2x + 5}dx$.

1273. $\int \sqrt{x - x^2}dx$.

1274. $\int \sqrt{2 - x - x^2}dx$.

1275. $\int \frac{xdx}{x^4 - 4x^2 + 3}$.

1276. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 6\sin x + 12}dx$.

1277. $\int \frac{e^x dx}{1 + e^x + e^{2x}}$.

1278. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^2 x + 4\cos x + 1}}$.

1279. $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1 - 4\ln x - \ln^2 x}}$.

§5. 有理函数的积分法

1°. **待定系数法**. 在划分出整有理函数部分之后, 有理函数的积分就变成真有理分式

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \tag{1}$$

的积分, 其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 都是整多项式, 而且 $P(x)$ 的次数低于 $Q(x)$ 的次数. 如果

$$Q(x)=(x-a)^{\alpha}\cdots(x-l)^{\lambda},$$

其中 $a,\cdots,l$ 是多项式 $Q(x)$ 的不同实根; $\alpha,\cdots,\lambda$ 是自然数 (根的重数), 那么分式 (1) 有正确的最简单分式展开式:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\equiv\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\cdots+\frac{L_1}{x-l}+\frac{L_2}{(x-l)^2}+\cdots+\frac{L_\lambda}{(x-l)^\lambda}. \quad (2)$$

为了计算待定的系数 $A_1,A_2,\cdots,L_\lambda$, 恒等式 (2) 的两边都要化成整函数的形式, 而后令 x 的同次幂系数相等 (**第一方法**). 也还可以在等式 (2), 或者其等价式子中, 令 x 为适当选取的数来确定这些系数 (**第二方法**).

例 1　求积分

$$\int\frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}=I.$$

解　我们有

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B_1}{x+1}+\frac{B_2}{(x+1)^2}.$$

由此得出

$$x\equiv A(x+1)^2+B_1(x-1)(x+1)+B_2(x-1). \quad (3)$$

a) 确定系数的第一方法. 将恒等式 (3) 重写成

$$x\equiv(A+B_1)x^2+(2A+B_2)x+(A-B_1-B_2).$$

令 x 同次幂系数相等, 我们得到

$$0=A+B_1,\quad 1=2A+B_2,\quad 0=A-B_1-B_2.$$

由此得出

$$A=\frac{1}{4},\qquad B_1=-\frac{1}{4},\qquad B_2=\frac{1}{2}.$$

b) 确定系数的第二方法. 首先在恒等式 (3) 中令 $x=1$, 我们有

$$1=A\cdot 4,\ 亦即\ A=\frac{1}{4}.$$

再令 $x=-1$ 可得

$$-1=-B_2\cdot 2,\ 亦即\ B_2=\frac{1}{2}.$$

其次, 令 $x=0$, 我们有

$$0=A-B_1-B_2,\ 亦即\ B_1=A-B_2=-\frac{1}{4}.$$

于是,

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2}\\&=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{2(x+1)}+C\\&=-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.\end{aligned}$$

例 2 求积分

$$\int \frac{dx}{x^3-2x^2+x}=I.$$

解 我们有

$$\frac{1}{x^3-2x^2+x}=\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2},$$

从而

$$1=A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx. \tag{4}$$

在求解这个例子的时候, 我们介绍把确定系数的两个方法联合起来. 首先应用第二方法, 在恒等式 (4) 中令 $x=0$, 我们得到 $1=A$. 而后令 $x=1$, 得到 $1=C$. 其次应用第一方法, 在恒等式 (4) 中比较 x^2 的系数, 我们就有

$$0=A+B, \text{ 亦即 } B=-1.$$

因此

$$A=1, \quad B=-1 \text{ 以及 } C=1.$$

于是

$$I=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}=\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C.$$

如果多项式 $Q(x)$ 有重数为 k 的复根 $a\pm ib$, 那么在展开式 (2) 中还要补充形式为

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)^k} \tag{5}$$

的最简分式, 其中

$$x^2+px+q=[x-(a+ib)][x-(a-ib)],$$

而 $M_1,N_1,\cdots,M_k,N_k$ 为待定的系数, 它们可用上面指出的方法来进行确定. 当 $k=1$ 时, 分式 (5) 可直接积分; 而当 $k>1$ 时, 应用**降低法**, 而且事先建议将二次三项式 x^2+px+q 写成 $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)$ 以及令 $x+\frac{p}{2}=z$.

例 3 求积分

$$\int\frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2}dx=I.$$

解 由于

$$x^2+4x+5=(x+2)^2+1,$$

因此令 $x+2=z$ 之后, 我们得到

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{z-1}{(z^2+1)^2}dz = \int \frac{zdz}{(z^2+1)^2} - \int \frac{(1+z^2)-z^2}{(z^2+1)^2}dz \\
&= -\frac{1}{2(z^2+1)} - \int \frac{dz}{z^2+1} + \int zd\left[-\frac{1}{2(z^2+1)}\right] \\
&= -\frac{1}{2(z^2+1)} - \arctan z - \frac{z}{2(z^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan z + C \\
&= -\frac{z+1}{2(z^2+1)} - \frac{1}{2}\arctan z + C \\
&= -\frac{x+3}{2(x^2+4x+5)} - \frac{1}{2}\arctan(x+2) + C.
\end{aligned}$$

2°. **奥斯特罗格拉茨基 (Ostrogradsky) 方法**. 如果 $Q(x)$ 有多重根, 那么

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{X(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{Y(x)}{Q_2(x)}dx, \tag{6}$$

其中 $Q_1(x)$ 是多项式 $Q(x)$ 与其导数 $Q'(x)$ 的最大公因式, 而

$$Q_2(x) = Q(x) : Q_1(x),$$

$X(x)$ 和 $Y(x)$ 为待定系数的多项式, 它们的次数是 $Q_1(x)$ 和 $Q_2(x)$ 中次数小的一个.

待定多项式 $X(x)$ 和 $Y(x)$ 的计算是利用对恒等式 (6) 的求导.

例 4　求积分

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2}.$$

解

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3-1} + \int \frac{Dx^2+Ex+F}{x^3-1}dx.$$

将这个恒等式的两边求导之后, 我们得到

$$\frac{1}{(x^3-1)^2} = \frac{(2Ax+B)(x^3-1)-3x^2(Ax^2+Bx+C)}{(x^3-1)^2} + \frac{Dx^2+Ex+F}{x^3-1},$$

或者

$$1 = (2Ax+B)(x^3-1) - 3x^2(Ax^2+Bx+C) + (Dx^2+Ex+F)(x^3-1).$$

令两边 x 的同次幂系数相等, 我们有

$$D=0,\ E-A=0,\ F-2B=0,\ D+3C=0,\ E+2A=0,\ B+F=-1,$$

由此得出

$$A=0,\quad B=-\frac{1}{3},\quad C=0,\quad D=0,\quad E=0,\quad F=-\frac{2}{3},$$

从而

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = -\frac{1}{3}\frac{x}{x^3-1} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^3-1}. \tag{7}$$

为了计算等式 (7) 右端的积分, 我们将分式 $\dfrac{1}{x^3-1}$ 展开成初等分式:

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{L}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1},$$

亦即

$$1 = L(x^2+x+1) + Mx(x-1) + N(x-1). \tag{8}$$

令 $x=1$ 之后, 我们得到 $L=\frac{1}{3}$.

在等式 (8) 的右边和左边比较 x 的同次幂系数, 我们得到

$$L+M=0, \qquad L-N=1,$$

亦即

$$M=-\frac{1}{3}, \qquad N=-\frac{2}{3}.$$

所以

$$\int \frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}dx$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C,$$

因此

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = -\frac{x}{3(x^3-1)} + \frac{1}{9}\ln\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

求出积分:

1280. $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$.

1281. $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$.

1282. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x-4)}$.

1283. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$.

1284. $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$.

1285. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$.

1286. $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$.

1287. $\int \frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}dx$.

1288. $\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}dx$.

1289. $\int \frac{x^2-8x+7}{(x^2-3x-10)^2}dx$.

1290. $\int \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^3}dx$.

1291. $\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}dx$.

1292. $\int \frac{x^4}{x^4-1}dx$.

1293. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}$.

1294. $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

1295. $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

1296. $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$.

1297. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

1298. $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}dx$.

1299. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}$.

1300. $\int \frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2}$.

运用奥斯特罗格拉茨基方法, 求出下列积分:

1301. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$.

1302. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$.

1303. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^4}$.

1304. $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^2+2}{(x^2-2x+2)^2}dx$.

运用各种方法, 求出下列积分:

1305. $\displaystyle\int \frac{x^5}{(x^3+1)(x^2+8)}dx$.

1306. $\displaystyle\int \frac{x^7+x^3}{x^{12}-2x^4+1}dx$.

1307. $\displaystyle\int \frac{x^2-x+14}{(x-4)^3(x-2)}dx$.

1308. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}$.

1309. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-4x^2+5x-2}$.

1310*. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^7+1)}$.

1311. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^5+1)^2}$.

1312. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)(x^2+2x+5)}$.

1313. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{(x-1)^{10}}$.

1314. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^8+x^6}$.

§6. 某些无理函数的积分法

1°. **形式为**

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \cdots\right]dx \tag{1}$$

的积分, 其中 R 为有理函数, $p_1, q_1, p_2, q_2, \cdots$ 为整数.

利用变换

$$\frac{ax+b}{cx+d} = z^n$$

即可求出形式 (1) 的积分, 其中 n 为 $q_1, q_2, \cdots$ 的最小公倍数.

例 1 求积分 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$.

解 变换 $2x-1=z^4$ 将积分化为

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}} = \int \frac{2z^3dz}{z^2-z} = 2\int \frac{z^2dz}{z-1} = 2\int \left(z+1+\frac{1}{z-1}\right)dz$$
$$= (z+1)^2 + 2\ln|z-1| + C$$
$$= (1+\sqrt[4]{2x-1})^2 + \ln(\sqrt[4]{2x-1}-1)^2 + C.$$

求积分:

1315. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx$.

1316. $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{ax+b}}$.

1317. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$.

1318. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

1319. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx.$

1320. $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx.$

1321. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}dx.$

1322. $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$

1323. $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx.$

1324. $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx.$

1325. $\int \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}dx.$

2°. **形式为**

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \tag{2}$$

的积分，其中 $P_n(x)$ 为 n 次多项式.

假设

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{3}$$

其中 $Q_{n-1}(x)$ 为系数待定的 $n-1$ 次多项式，λ 为数量.

利用对恒等式 (3) 的求导即可求出多项式 $Q_{n-1}(x)$ 的系数和数 λ.

例 2 求积分 $\int x^2\sqrt{x^2+4}dx.$

解

$$\int x^2\sqrt{x^2+4}dx = \int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx = (Ax^3+Bx^2+Cx+D)\sqrt{x^2+4}+\lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}.$$

由此得出

$$\frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}} = (3Ax^2+2Bx+C)\sqrt{x^2+4}+\frac{(Ax^3+Bx^2+Cx+D)x}{\sqrt{x^2+4}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+4}}.$$

两边乘 $\sqrt{x^2+4}$，并比较 x 的同次幂的系数，我们得到

$$A=\frac{1}{4},\quad B=0,\quad C=\frac{1}{2},\quad D=0,\quad \lambda=-2.$$

因此

$$\int x^2\sqrt{x^2+4}dx = \frac{x^3+2x}{4}\sqrt{x^2+4}-2\ln(x+\sqrt{x^2+4})+C.$$

3°. **形式为**

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}} \tag{4}$$

的积分，利用变换

$$\frac{1}{x-\alpha}=t$$

就可以把它转化成形式 (2) 的积分.

求出积分:

1326. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$.

1327. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

1328. $\int \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

1329. $\int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$.

1330. $\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}$.

1331. $\int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}dx$.

4°. **二项式微分型的积分**

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx, \tag{5}$$

其中 m, n 和 p 都是有理数.

切比雪夫 (Chebyshev) 条件 积分 (5) 只有在下列三种情况下才能通过初等函数的有限组合来表示:

1) 如果 p 是整数.

2) 如果 $\frac{m+1}{n}$ 是整数. 在这里运用变换 $a+bx^n=z^s$, 其中 s 为分数 p 的分母.

3) 如果 $\frac{m+1}{n}+p$ 是整数. 在这种情况下可利用变换 $ax^{-n}+b=z^s$.

例 3 求积分

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx = I.$$

解 在这里有 $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{4}$, $p=\frac{1}{3}$, $\frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=2$. 亦即, 可积性的情形 2) 成立.

变换

$$1+x^{\frac{1}{4}}=z^3$$

得出: $x=(z^3-1)^4$, $dx=12z^2(z^3-1)^3dz$. 所以

$$I=\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx$$

$$=12\int \frac{z^3(z^3-1)^3}{(z^3-1)^2}dz=12\int(z^6-z^3)dz=\frac{12}{7}z^7-3z^4+C,$$

其中 $z=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$.

求积分:

1332. $\int x^3(1+2x^2)^{-\frac{3}{2}}dx$.

1333. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

1334. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.

1335. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$.

1336. $\int \frac{dx}{x^2(2+x^3)^{5/3}}$.

1337. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$.

§7. 三角函数的积分法

1°. **形式为**

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = I_{m,n} \tag{1}$$

的积分, 其中 m 和 n 为整数.

1) 如果 $m = 2k+1$ 是正奇数, 那么推出

$$I_{m,n} = -\int \sin^{2k} x \cos^n x d(\cos x) = -\int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x d(\cos x).$$

如果 n 是正奇数, 则可类似地进行.

例 1

$$\int \sin^{10} x \cos^3 x dx = \int \sin^{10} x(1-\sin^2 x) d(\sin x) = \frac{\sin^{11} x}{11} - \frac{\sin^{13} x}{13} + C.$$

2) 如果 m 和 n 都是正奇数, 那么被积表达式 (1) 可利用下列公式进行变换:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

例 2

$$\begin{aligned}\int \cos^2 3x \sin^4 3x dx &= \int (\cos 3x \sin 3x)^2 \sin^2 3x dx = \int \frac{\sin^2 6x}{4}\frac{1-\cos 6x}{2}dx \\ &= \frac{1}{8}\int (\sin^2 6x - \sin^2 6x \cos 6x) dx \\ &= \frac{1}{8}\int \left(\frac{1-\cos 12x}{2} - \sin^2 6x \cos 6x\right)dx \\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 12x}{24} - \frac{1}{18}\sin^3 6x\right) + C.\end{aligned}$$

3) 如果 $m = -\mu$ 和 $n = -\nu$ 都是具有同样奇偶性的负整数, 那么

$$\begin{aligned}I_{m,n} &= \int \frac{dx}{\sin^\mu x \cos^\nu x} = \int \csc^\mu x \sec^{\nu-2} x d(\tan x) \\ &= \int \left(1+\frac{1}{\tan^2 x}\right)^{\frac{\mu}{2}} (1+\tan^2 x)^{\frac{\nu-2}{2}} d(\tan x) \\ &= \int \frac{(1+\tan^2 x)^{\frac{\mu+\nu}{2}-1}}{\tan^\mu x} d(\tan x).\end{aligned}$$

特别地, 在这种情况下归结为积分

$$\int \frac{dx}{\sin^\mu x} = \frac{1}{2^{\mu-1}}\int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^\mu \frac{x}{2}\cos^\mu \frac{x}{2}} \quad \text{以及} \quad \int \frac{dx}{\cos^\nu x} = \int \frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^\nu\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

例 3

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \sec^2 x d(\tan x) = \int (1+\tan^2 x) d(\tan x) = \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C.$$

例 4

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{2^3}\int \frac{dx}{\sin^3 \frac{x}{2}\cos^3 \frac{x}{2}} = \frac{1}{8}\int \tan^{-3}\frac{x}{2}\sec^6\frac{x}{2}dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)^2}{\tan^2\frac{x}{2}}\sec^2\frac{x}{2}dx$$

$$= \frac{2}{8}\int\left(\tan^{-3}\frac{x}{2}+\frac{2}{\tan\frac{x}{2}}+\tan\frac{x}{2}\right)d\left(\tan\frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2\tan^2\frac{x}{2}}+2\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\frac{\tan^2\frac{x}{2}}{2}\right)+C.$$

4) 若 m 为正整数, 则形式为 $\int \tan^m xdx$ (或者 $\int \cot^m xdx$) 的积分可以利用公式

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

(或者相应地用公式 $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$) 进行计算.

例 5

$$\int \tan^4 xdx = \int \tan^2 x(\sec^2 x - 1)dx = \frac{\tan^3 x}{3} - \int \tan^2 xdx$$

$$= \frac{\tan^3 x}{3} - \int(\sec^2 x - 1)dx = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C.$$

5) 在一般情况下, 形式 (1) 的积分 $I_{m,n}$ 可以借助于用通常的分部积分而推导出的**化简公式 (递推公式)** 进行计算.

例 6

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^3 x}dx = \int \sin x\cdot\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx + \int\frac{dx}{\cos x}$$

$$= \sin x\cdot\frac{1}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\int\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx + \int\frac{dx}{\cos x}$$

$$= \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln|\tan x + \sec x| + C.$$

求出积分:

1338. $\int \cos^3 xdx.$

1339. $\int \sin^5 xdx.$

1340. $\int \sin^2 x\cos^3 xdx.$

1341. $\int \sin^3\frac{x}{2}\cos^5\frac{x}{2}dx.$

1342. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}dx.$

1343. $\int \sin^4 xdx.$

1344. $\int \sin^2 x\cos^2 xdx.$

1345. $\int \sin^2 x\cos^4 xdx.$

1346. $\int \cos^6 3xdx.$

1347. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}.$

1348. $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$.

1349. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} dx$.

1350. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$.

1351. $\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^3 x}$.

1352. $\int \frac{dx}{\sin \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}}$.

1353. $\int \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x \cos x} dx$.

1354. $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$.

1355. $\int \sec^5 4x dx$.

1356. $\int \tan^2 5x dx$.

1357. $\int \cot^3 x dx$.

1358. $\int \cot^4 x dx$.

1359. $\int \left(\tan^3 \frac{x}{3} + \tan^4 \frac{x}{3}\right) dx$.

1360. $\int x \sin^2 x^2 dx$.

1361. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$.

1362. $\int \sin^5 x \sqrt[3]{\cos x} dx$.

1363. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}}$.

1364. $\int \frac{dx}{\sqrt{\tan x}} dx$.

2°. **形式为**

$$\int \sin mx \cos nx dx, \quad \int \sin mx \sin nx dx \text{ 以及 } \int \cos mx \cos nx dx$$

的积分.

在这种情况下, 运用公式:

1) $\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$,

2) $\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$,

3) $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$.

例 7

$$\int \sin 9x \sin x dx = \int \frac{1}{2}(\cos 8x - \cos 10x) dx = \frac{1}{16}\sin 8x - \frac{1}{20}\sin 10x + C.$$

求出积分:

1365. $\int \sin 3x \cos 5x dx$.

1366. $\int \sin 10x \sin 15x dx$.

1367. $\int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx$.

1368. $\int \sin \frac{x}{3} \cos \frac{2x}{3} dx$.

1369. $\int \cos(ax+b)\cos(ax-b) dx$.

1370. $\int \sin \omega t \sin(\omega t + \varphi) dt$.

1371. $\int \cos x \cos^2 3x dx$.

1372. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx$.

3°. 形式为

$$\int R(\sin x, \cos x)dx \tag{2}$$

的积分，其中 R **为有理函数.**

1) 利用变换

$$\tan\frac{x}{2} = t,$$

由此得出

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

于是形式 (2) 的积分转换成新变量 t 的有理函数积分.

例 8　求积分

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = I.$$

解　令 $\tan\frac{x}{2} = t$，我们有

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + C = \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

2) 如果恒等式

$$R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x)$$

成立，那么可以运用变换 $\tan x = t$ 将积分 (2) 转换成有理形式.

这时

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

和

$$x = \arctan t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

例 9　求积分

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = I. \tag{3}$$

解　令

$$\tan x = t, \qquad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

之后，我们就有

$$I = \int \frac{dt}{(1+t^2)\left(1+\frac{t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{1+2t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(t\sqrt{2})}{1+(t\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(t\sqrt{2}) + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x) + C.$$

我们注意到, 如果将被积函数分式的分子和分母都除以 $\cos^2 x$, 那么对积分 (3) 的计算就会更快一些.

在个别的情况下, 应用人为的技巧是很有效的 (例如参看第 1379 题).

求出下列积分:

1373. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$.

1374. $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$.

1375. $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$.

1376. $\int \frac{\sin x}{1-\sin x}dx$.

1377. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}dx$.

1378. $\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}$.

1379.** $\int \frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx$.

1380. $\int \frac{1+\tan x}{1-\tan x}dx$.

1381*. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$.

1382*. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x+5\cos^2 x}$.

1383*. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+3\sin x\cos x-\cos^2 x}$.

1384*. $\int \frac{dx}{\sin^2 x-5\sin x\cos x}$.

1385. $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3}dx$.

1386. $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx$.

1387. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx$.

1388. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x-6\sin x+5}dx$.

1389*. $\int \frac{dx}{(2-\sin x)(3-\sin x)}$.

1390*. $\int \frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}dx$.

§8. 双曲函数的积分法

双曲函数的积分法完全类似于三角函数的积分法.

应当记住下列基本公式:

1) $\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1$,

2) $\operatorname{sh}^2 x=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}2x-1)$,

3) $\operatorname{ch}^2 x=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}2x+1)$,

4) $\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x=\frac{1}{2}\operatorname{sh}2x$.

例 1 求积分

$$\int \operatorname{ch}^2 x dx.$$

解 我们有

$$\int \operatorname{ch}^2 x dx=\int \frac{1}{2}(\operatorname{ch}2x+1)dx=\frac{1}{4}\operatorname{sh}2x+\frac{1}{2}x+C.$$

例 2 求积分

$$\int \operatorname{ch}^3 x dx.$$

解　我们有

$$\int \operatorname{ch}^3 x dx = \int \operatorname{ch}^2 x d(\operatorname{sh} x) = \int (1+\operatorname{sh}^2 x) d(\operatorname{sh} x)$$
$$= \operatorname{sh} x + \frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x + C.$$

求出下列积分:

1391. $\int \operatorname{sh}^3 x dx.$

1392. $\int \operatorname{ch}^4 x dx.$

1393. $\int \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch} x dx.$

1394. $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x dx.$

1395. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^2 x}.$

1396. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x}.$

1397. $\int \operatorname{th}^3 x dx.$

1398. $\int \operatorname{cth}^4 x dx.$

1399. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x}.$

1400. $\int \frac{dx}{2\operatorname{sh} x + 3\operatorname{ch} x}.$

1401*. $\int \frac{dx}{\operatorname{th} x - 1}.$

1402. $\int \frac{\operatorname{sh} x dx}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x}}.$

§9. 运用三角函数和双曲函数变换求解形如

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx \tag{1}$$

的积分, 其中 R 为有理函数.

将二次三项式 ax^2+bx+c 变换成平方和或者平方差之后, 我们就把积分 (1) 归结为下列类型的积分之一:

1) $\int R(z, \sqrt{m^2-z^2})dz,$

2) $\int R(z, \sqrt{m^2+z^2})dz,$

3) $\int R(z, \sqrt{z^2-m^2})dz.$

计算最后这些积分可对应地利用变换:

1) $z = m\sin t$ 或者 $z = m\tan t,$

2) $z = m\tan t$ 或者 $z = m\operatorname{sh} t,$

3) $z = m\sec t$ 或者 $z = m\operatorname{ch} t.$

例 1　求积分

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}} = I.$$

解　我们有

$$x^2+2x+2 = (x+1)^2+1.$$

假设 $x+1=\tan t$, 于是有 $dx=\sec^2 tdt$, 从而

$$I=\int\frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{(x+1)^2+1}}=\int\frac{\sec^2 tdt}{\tan^2 t\sec t}=\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt$$

$$=-\frac{1}{\sin t}+C=-\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+C.$$

例 2 求积分

$$\int x\sqrt{x^2+x+1}dx=I.$$

解 我们有

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}.$$

令

$$x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sh}t,\ 从而\ dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch}tdt,$$

我们得到

$$I=\int\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sh}t-\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch}t\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch}tdt=\frac{3\sqrt{3}}{8}\int\operatorname{sh}t\operatorname{ch}^2 t-\frac{3}{8}\int\operatorname{ch}^2 tdt$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{\operatorname{ch}^3 t}{3}-\frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t+\frac{1}{2}t\right)+C.$$

由于

$$\operatorname{sh}t=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right),\qquad \operatorname{ch}t=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+x+1}$$

和

$$t=\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+\ln\frac{2}{\sqrt{3}},$$

所以最后有

$$I=\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1}-\frac{3}{16}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C.$$

求出积分:

1403. $\int\sqrt{3-2x-x^2}dx.$

1404. $\int\sqrt{2+x^2}dx.$

1405. $\int\frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}dx.$

1406. $\int\sqrt{x^2-2x+2}dx.$

1407. $\int\sqrt{x^2-4}dx.$

1408. $\int\sqrt{x^2+x}dx.$

1409. $\int\sqrt{x^2-6x-7}dx.$

1410. $\int(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}dx.$

1411. $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}.$

1412. $\int\frac{dx}{(x^2-2x+5)^{3/2}}.$

1413. $\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}.$

1414. $\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}.$

§10. 各种超越函数的积分法

求出积分:

1415. $\int (x^2+1)^2 e^{2x} dx.$

1416. $\int x^2 \cos^2 3x dx.$

1417. $\int x \sin x \cos 2x dx.$

1418. $\int e^{2x} \sin^2 x dx.$

1419. $\int e^x \sin x \sin 3x dx.$

1420. $\int x e^x \cos x dx.$

1421. $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}.$

1422. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}.$

1423. $\int x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} dx.$

1424. $\int \ln^2 \left(x+\sqrt{1+x^2}\right) dx.$

1425. $\int x \arccos(5x-2) dx.$

1426. $\int \sin x \operatorname{sh} x dx.$

§11. 递推公式的应用

推导出下列积分的递推公式:

1427. $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, 求出 I_2 和 I_3.

1428. $I_n = \int \sin^n x dx$, 求出 I_4 和 I_5.

1429. $I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$, 求出 I_3 和 I_4.

1430. $I_n = \int x^n e^{-x} dx$, 求出 I_{10}.

§12. 各种函数的积分法

1431. $\int \frac{dx}{2x^2-4x+9}.$

1432. $\int \frac{x-5}{x^2-2x+2} dx.$

1433. $\int \frac{x^3}{x^2+x+\frac{1}{2}} dx.$

1434. $\int \frac{dx}{x(x^2+5)}.$

1435. $\int \frac{dx}{(x+2)^2(x+3)^2}.$

1436. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}.$

1437. $\int \frac{dx}{(x^2+2)^2}.$

1438. $\int \frac{dx}{x^4-2x^2+1}.$

1439. $\int \frac{x dx}{(x^2-x+1)^3}.$

1440. $\int \frac{3-4x}{(1-2\sqrt{x})^2} dx.$

1441. $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x^3} dx.$

1442. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$

1443. $\int \frac{1-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}}dx.$

1444. $\int \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\right)^2}.$

1445. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{(4x^2-2x+1)^3}}dx.$

1446. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x}}.$

1447. $\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}}dx.$

1448. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}.$

1449. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-2x^2-x^4}}.$

1450. $\int \frac{x+1}{(x^2+1)^{3/2}}dx.$

1451*. $\int \frac{dx}{(x^2+4x)\sqrt{4-x^2}}.$

1452. $\int \sqrt{x^2-9}dx.$

1453. $\int \sqrt{x-4x^2}dx.$

1454. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}.$

1455. $\int x\sqrt{x^2+2x+2}dx.$

1456. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}.$

1457. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}}.$

1458. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$

1459. $\int \frac{5x}{\sqrt{1+x^4}}dx.$

1460. $\int \cos^4 xdx.$

1461. $\int \frac{dx}{\cos x\sin^5 x}.$

1462. $\int \frac{1+\sqrt{\cot x}}{\sin^2 x}dx.$

1463. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}dx.$

1464. $\int \csc^5 5xdx.$

1465. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx.$

1466. $\int \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)dx.$

1467. $\int \tan^3\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dx.$

1468. $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x-5}.$

1469. $\int \frac{dx}{2+3\cos^2 x}.$

1470. $\int \frac{dx}{\cos^2 x+2\sin x\cos x+2\sin^2 x}.$

1471. $\int \frac{dx}{\sin x\sin 2x}.$

1472. $\int \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}.$

1473. $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x+4\tan x+1}}dx.$

1474. $\int \frac{\cos ax}{\sqrt{a^2+\sin^2 ax}}dx.$

1475. $\int \frac{xdx}{\cos^2 3x}.$

1476. $\int x\sin^2 xdx.$

1477. $\int x^2e^{x^3}dx.$

1478. $\int xe^{2x}dx.$

1479. $\int x^2\ln\sqrt{1-x}dx.$

1480. $\int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx.$

1481. $\int \sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}dx.$

1482. $\int \frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}.$

1483. $\int \frac{dx}{(\tan x+1)\sin^2 x}.$

1484. $\int \operatorname{sh} x\operatorname{ch} xdx.$

1485. $\int \frac{\operatorname{sh}\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}dx$.

1486. $\int \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x}dx$.

1487. $\int \frac{x}{\operatorname{sh}^2 x}dx$.

1488. $\int \frac{dx}{e^{2x} - 2e^x}$.

1489. $\int \frac{e^x}{e^{2x} - 6e^x + 13}dx$.

1490. $\int \frac{e^{2x}}{(e^x+1)^{1/4}}dx$.

1491. $\int \frac{2^x}{1-4^x}dx$.

1492. $\int (x^2-1)10^{-2x}dx$.

1493. $\int \sqrt{e^x+1}dx$.

1494. $\int \frac{\arctan x}{x^2}dx$.

1495. $\int x^3 \arcsin \frac{1}{x}dx$.

1496. $\int \cos(\ln x)dx$.

1497. $\int (x^2-3x)\sin 5x dx$.

1498. $\int x \arctan(2x+3)dx$.

1499. $\int \arcsin \sqrt{x}dx$.

1500. $\int |x|dx$.

第五章　定积分

§1. 作为求和极限的定积分

1°. **积分和**. 假设函数 $f(x)$ 在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上有定义, 而且 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 是将这个区间分成 n 个部分的任意一个划分 (图 37). 形式为

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{1}$$

的求和就称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的**积分和**, 其中

$$x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}, \quad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n-1.$$

从几何上来看, S_n 就是相应矩形面积的代数和 (图 37).

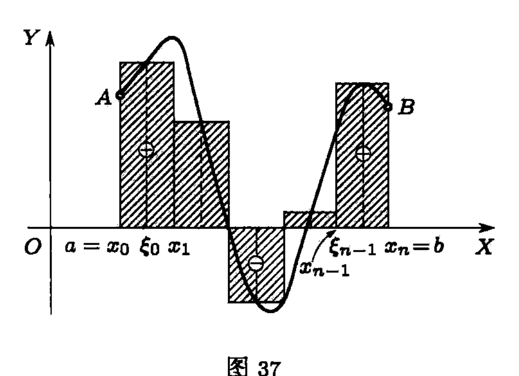


图 37

2°. **定积分**. 在划分数目 n 趋于无穷大, 且差 Δx_i 中最大长度趋于零的条件下, 积分和 S_n 的极限就称为函数 $f(x)$ 在从 $x = a$ 到 $x = b$ 的**定积分**, 亦即

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx. \tag{2}$$

如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 那么它就在 $[a,b]$ 上可积, 亦即极限 (2) 存在且不依赖于将积分区间 $[a,b]$ 分成部分区间的划分方法以及不依赖于在这些区间上对点 ξ_i 的选取.

几何上, 定积分 (2) 就是由曲边梯形 $aABb$ 所围图形面积的代数和, 其中位于 OX 轴上方部分的面积取正号, 而位于 OX 轴下方部分的面积取负号 (见图 37).

积分和与定积分的定义自然可推广到当 $a > b$ 时在区间 $[a, b]$ 上的情况.

例 1　写出函数

$$f(x) = 1 + x$$

在区间 $[1, 10]$ 上的积分和 S_n, 对于这个区间, 将其分成 n 等份, 并取部分区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 的左端点为点 ξ_i. 试问 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 等于什么?

解　这里 $\Delta x_i = \dfrac{10-1}{n} = \dfrac{9}{n}$ 且有 $\xi_i = x_i = x_0 + i\Delta x_i = 1 + \dfrac{9i}{n}$, 由此得出 $f(\xi_i) = 1 + 1 + \dfrac{9i}{n} = 2 + \dfrac{9i}{n}$. 于是 (图 38),

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n-1} (\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1}\left(2 + \frac{9i}{n}\right)\frac{9}{n} \\ &= \frac{18}{n}n + \frac{81}{n^2}(0 + 1 + \cdots + n - 1) \\ &= 18 + \frac{81}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} = 18 + \frac{81}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= 58\frac{1}{2} - \frac{81}{2n}, \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 58\frac{1}{2}.$$

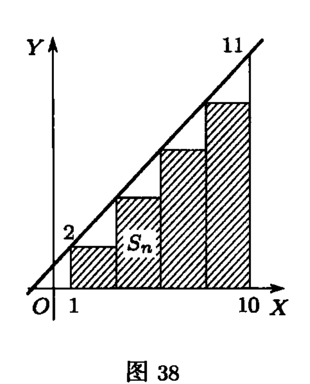


图 38

例 2　求出由抛物线 $y = x^2$ 的弧、OX 轴以及直线 $x = a$ $(a > 0)$ 所围成曲边三角形的面积.

解　我们将底边 a 分成 n 等份 $\Delta x = \dfrac{a}{n}$, 算出在每个区间左端点处的函数值, 我们有

$$y_1 = 0,\ y_2 = \left(\frac{a}{n}\right)^2,\ y_3 = \left[2\left(\frac{a}{n}\right)\right]^2,\ \cdots,\ y_n = \left[(n-1)\frac{a}{n}\right]^2.$$

将每个 y_k 乘底边 $\Delta x = \dfrac{a}{n}$ 算出内接矩形的面积 (图 39). 对 $k = 0$ 到 $k = n - 1$ 求和, 我们得到阶梯状图形的面积

$$S_n = \frac{a}{n}\left(\frac{a}{n}\right)^2 [1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2].$$

利用整数平方和的公式

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

我们求出

$$S_n = \frac{a^3(n-1)n(2n-1)}{6n^3}.$$

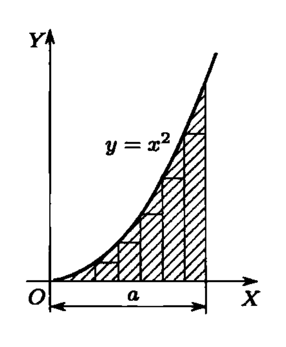


图 39

由此令 $n \to \infty$ 取极限即得

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a^3(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{a^3}{3}.$$

将定积分看成积分和的极限, 算出下列的定积分:

1501. $\int_a^b dx.$

1502. $\int_0^T (v_0 + gt)dt$, v_0 和 g 为常数.

1503. $\int_{-2}^1 x^2 dx.$

1504. $\int_0^{10} 2^x dx.$

1505*. $\int_1^5 x^3 dx.$

1506*. 求出由双曲线

$$y = \frac{1}{x},$$

OX 轴以及两条直线 $x = a$ 和 $x = b$ $(0 < a < b)$ 所围成的曲边梯形的面积.

1507*. 求出

$$f(x) = \int_0^x \sin t dt.$$

§2. 利用不定积分的定积分计算

1°. **以积分上限为变量的定积分**. 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 那么函数

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

就是函数 $f(x)$ 的原函数, 亦即

$$F'(x) = f(x) \text{ 当 } a \leqslant x \leqslant b.$$

2°. **牛顿 – 莱布尼茨公式**. 如果 $F'(x) = f(x)$, 那么有

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

于是原函数 $F(x)$ 可用找出不定积分

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

的方法算出.

例 1 求积分 $\int_{-1}^3 x^4 dx.$

解 $\int_{-1}^3 x^4 dx = \frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^3 = \frac{3^5}{5} - \frac{(-1)^5}{5} = 48\frac{4}{5}.$

1508. 假设

$$I = \int_a^b \frac{dx}{\ln x} \quad (b > a > 1).$$

求: 1) $\frac{dI}{da}$; 2) $\frac{dI}{db}$.

求下列函数的导数:

1509. $F(x)=\int_1^x \ln t dt\ (x>0)$.　　**1510.** $F(x)=\int_x^0 \sqrt{1+t^4}dt$.

1511. $F(x)=\int_x^{x^2} e^{-t^2}dt$.　　**1512.** $I=\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos(t^2)dt\ \ (x>0)$.

1513. 求函数

$$y=\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$$

在区域 $x>0$ 的极值点.

运用牛顿－莱布尼茨公式, 求出积分:

1514. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$.　　**1515.** $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^3}$.

1516. $\int_{-x}^x e^t dt$.　　**1517.** $\int_0^x \cos t dt$.

利用定积分, 求出下列和的极限:

1518.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$.

1519.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$.

1520. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}\ (p>0)$.

计算积分:

1521. $\int_1^2 (x^2-2x+3)dx$.　　**1522.** $\int_0^8 (\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x})dx$.

1523. $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}dy$.　　**1524.** $\int_2^6 \sqrt{x-2}dx$.

1525. $\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$.　　**1526.** $\int_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2-1}$.

1527. $\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+3x+2}$.　　**1528.** $\int_{-1}^1 \frac{y^5dy}{y+2}$.

1529. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$.　　**1530.** $\int_3^4 \frac{dx}{x^3-3x+2}$.

1531. $\int_0^1 \frac{z^3}{z^8+1}dz$.　　**1532.** $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2\alpha d\alpha$.

1533. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.　　**1534.** $\int_2^{3.5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$.

1535. $\int_0^1 \frac{y^2dy}{\sqrt{y^6+4}}$.　　**1536.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\alpha d\alpha$.

1537. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi.$

1538. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}.$

1539. $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx.$

1540. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx.$

1541. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cot^4 \varphi d\varphi.$

1542. $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx.$

1543. $\int_0^1 \operatorname{ch} x dx.$

1544. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}.$

1545. $\int_0^{\pi} \operatorname{sh}^2 x dx.$

§3. 反常积分

1°. **无界函数的积分**. 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上点 c 的任意邻域中无界, 且当 $a \leqslant x < c$ 和 $c < x \leqslant b$ 时 $f(x)$ 连续, 那么作为定义令

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\eta \to 0} \int_{c+\eta}^b f(x)dx. \tag{1}$$

如果等式 (1) 右端中的极限存在且有限, 那么称此反常积分为**收敛的**, 在相反的情况下, 称它为**发散的**. 当 $c=a$ 或者 $c=b$ 时, 定义用相应的方式进行简化.

如果在 $[a,b]$ 上存在这样的连续函数 $F(x)$ (**广义原函数**), 使得当 $x \neq c$ 时有 $F'(x) = f(x)$, 那么有

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{2}$$

如果当 $a \leqslant x \leqslant b$ 时有 $|f(x)| \leqslant G(x)$, 且 $\int_a^b G(x)dx$ 收敛, 那么积分 (1) 也收敛 (**比较判别法**).

如果 $f(x) \geqslant 0$ 和 $\lim\limits_{x \to c}\{f(x)|c-x|^m\} = A \neq \infty, A \neq 0$, 亦即当 $x \to c$ 时, $f(x) \sim \frac{A}{|c-x|^m}$, 那么: 1) 当 $m<1$ 时, 积分 (1) 收敛; 2) 当 $m>1$ 时, 积分 (1) 发散.

2°. **无穷区间的积分**. 如果函数 $f(x)$ 当 $a \leqslant x < \infty$ 时连续, 那么令

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx. \tag{3}$$

于是根据等式 (3) 右端存在或者不存在有限极限而相应地称积分为**收敛的**或者**发散的**.

类似地有,

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx \quad \text{以及} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b f(x)dx.$$

如果 $|f(x)| \leqslant F(x)$ 且积分 $\int_a^{\infty} F(x)dx$ 收敛, 那么积分 (3) 也收敛.

如果 $f(x) \geqslant 0$ 且有 $\lim\limits_{x \to \infty}\{f(x)x^m\} = A \neq \infty, A \neq 0$, 亦即当 $x \to \infty$ 时有

$f(x) \sim \dfrac{A}{x^m}$, 那么: 1) 当 $m > 1$ 时, 积分 (3) 收敛; 2) 当 $m \leqslant 1$ 时, 积分 (3) 发散.

例 1

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) + \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) = \infty,$$

因而积分发散.

例 2

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to \infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to \infty} (\arctan b - \arctan 0) = \frac{\pi}{2}.$$

例 3 研究欧拉 – 泊松 (Euler-Poisson) 积分

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \tag{4}$$

的收敛性.

解 令

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

右端中两个积分的第一个不是反常积分, 而第二个是收敛的, 因为当 $x \geqslant 1$ 时有 $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$, 而且

$$\int_1^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^b e^{-x} dx = \lim_{b \to \infty} \left(- e^{-b} + e^{-1}\right) = e^{-1},$$

于是积分 (4) 收敛.

例 4 研究积分

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} \tag{5}$$

的收敛性.

解 当 $x \to +\infty$ 时我们有

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^3\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)}} = \frac{1}{x^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^3}}} \sim \frac{1}{x^{3/2}}.$$

因为积分

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$$

收敛, 所以积分 (5) 也收敛.

例 5 研究椭圆积分

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \tag{6}$$

的收敛性.

解 被积函数的间断点为 $x = 1$. 应用公式 $1 - x^4 = (1-x)(1+x)(1+x^2)$, 我们得到

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}}.$$

于是当 $x \to 1$ 时, 我们有

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \sim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{1/2}$$

由于积分

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

收敛, 所以给定的积分 (6) 也收敛.

计算反常积分 (或者证明其发散性):

1546. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

1547. $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$.

1548. $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$.

1549. $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

1550. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

1551. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$.

1552. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$.

1553. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$.

1554. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

1555. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$.

1556. $\int_0^{\infty} \sin x dx$.

1557. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln x}$.

1558. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

1559. $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x\ln x} \quad (a>1)$.

1560. $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} \quad (a>1)$.

1561. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cot x dx$.

1562. $\int_0^{\infty} e^{-kx} dx \quad (k>0)$.

1563. $\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x^2+1} dx$.

1564. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{(x^2-1)^2}$.

1565. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}$.

1566. $\int_0^1 \frac{dx}{x^3-5x^2}$.

研究下列积分的收敛性:

1567. $\int_0^{100} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}+x^3}$.

1568. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}$.

1569. $\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}$.

1570. $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}}$.

1571. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$.

1572. $\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$.

1573. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$.

1574*. 证明: 当 $p>0$ 和 $q>0$ 时, 第一类型欧拉积分 (B 函数)

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

收敛.

1575*. 证明: 当 $p>0$ 时, 第二类型欧拉积分 (Γ 函数)

$$\Gamma(p,q)=\int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$$

收敛.

§4. 定积分中的变量变换

如果函数 $f(x)$ 在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上连续, 而函数 $x=\varphi(t)$ 与其导数 $\varphi'(t)$ 在区间 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上均连续, 这里 $a=\varphi(\alpha)$ 和 $b=\varphi(\beta)$, 而且 $f[\varphi(t)]$ 在区间 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上有定义且连续, 那么

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

例 1 求

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx \quad (a>0).$$

解 令

$$x=a\sin t,$$

因此有

$$dx=a\cos tdt.$$

于是 $t=\arcsin\dfrac{x}{a}$, 从而, 可以取 $\alpha=\arcsin 0=0,\beta=\arcsin 1=\dfrac{\pi}{2}$. 因此我们有

$$\begin{aligned}\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 t\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}a\cos tdt=a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 tdt\\&=\frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2tdt=\frac{a^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)dt\\&=\frac{a^4}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^4}{16}.\end{aligned}$$

1576. 是否可以利用变换 $x=\cos t$ 对积分

$$\int_0^2 \sqrt[3]{1-x^2}dx$$

进行计算呢?

利用指定的变量变换变换下列的定积分:

1577. $\displaystyle\int_1^3 \sqrt{x+1}dx,\quad x=2t-1.$

1578. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}},\quad x=\sin t.$

1579. $\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$, $x = \operatorname{sh} t$.

1580. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$, $x = \arctan t$.

1581. 对于积分

$$\int_a^b f(x)dx \quad (b > a),$$

找出线性变换

$$x = \alpha t + \beta,$$

使得经过变换后的结果中, 积分上下限分别等于 0 和 1.

运用指定的变换, 计算下列积分:

1582. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$, $x = t^2$.

1583. $\int_3^{29} \frac{(x-2)^{2/3}}{(x-2)^{2/3}+3}dx$, $x - 2 = z^3$.

1584. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx$, $e^x - 1 = z^2$.

1585. $\int_0^{\pi} \frac{dt}{3+2\cos t}$, $\tan\frac{t}{2} = z$.

1586. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2\sin^2 x}$, $\tan x = t$.

利用适当变换, 计算下列积分:

1587. $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$.

1588. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$.

1589. $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$.

1590. $\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$.

计算下列积分:

1591. $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$.

1592. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

1593. $\int_0^a \sqrt{ax-x^2}dx$.

1594. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-3\cos x}$.

1595. 证明: 如果 $f(x)$ 为偶函数, 那么

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

而如果 $f(x)$ 为奇函数, 则有

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

1596. 证明:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx.$$

1597. 证明:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx.$$

1598. 证明:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx.$$

§5. 分部积分法

如果函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续可微, 那么

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx. \tag{1}$$

运用分部积分法公式, 计算下列积分:

1599. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx.$

1600. $\int_1^e \ln xdx.$

1601. $\int_0^1 x^3e^{2x}dx.$

1602. $\int_0^{\pi} e^x \sin xdx.$

1603. $\int_0^{\infty} xe^{-x}dx.$

1604. $\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bxdx \quad (a>0).$

1605. $\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin bxdx \quad (a>0).$

1606**. 证明: 对于 Γ 函数 (见第 1575 题), **递推公式**

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)\ (p>0)$$

成立, 并由此推出: 如果 n 为自然数, 则有 $\Gamma(n+1) = n!$.

1607. 证明: 对于积分

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n xdx,$$

递推公式

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

是正确的.

如果 n 为自然数, 试求出 I_n. 利用得到的公式, 算出 I_9 和 I_{10}.

1608. 重复利用分部积分法, 算出积分 (见第 1574 题)

$$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,$$

其中 p 和 q 正整数.

1609*. 如果 m 和 n 为非负整数, 那么试通过 B (B 函数) 来表示积分

$$I_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^n xdx.$$

§6. 中值定理

1°. **积分的估计**. 如果当 $a \leqslant x \leqslant b$ 时有 $f(x) \leqslant F(x)$, 那么

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b F(x)dx. \tag{1}$$

如果当 $a \leqslant x \leqslant b$ 时, 函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 都连续, 此外还有 $\varphi(x) \geqslant 0$, 那么

$$m\int_a^b \varphi(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \leqslant M\int_a^b \varphi(x)dx. \tag{2}$$

其中 m 和 M 分别为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最小值和最大值.

特别, 如果 $\varphi(x) \equiv 1$ 则有

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a). \tag{3}$$

不等式 (2) 和 (3) 可以用与其等价的等式:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(c)\int_a^b \varphi(x)dx$$

和

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

代替, 其中 c 和 ξ 是位于 a 与 b 之间的两个数.

例 1 估计积分

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2 x}dx.$$

解 由于 $0 \leqslant \sin^2 x \leqslant 1$, 所以我们有

$$\frac{\pi}{2} < I < \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{2}},$$

亦即

$$1.57 < I < 1.93.$$

2°. **函数的平均值**. 数

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

称为函数 $f(x)$ 在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上的**平均值**.

1610*. 不计算下列积分, 确定它们的符号:

a) $\int_{-1}^2 x^3dx$; b) $\int_0^\pi x\cos xdx$; c) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}dx$.

1611. 说明 (不计算) 下列每一对积分中哪一个积分值较大:

a) $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$, $\int_0^1 xdx$;

b) $\int_0^1 x^2\sin^2 xdx$, $\int_0^1 x\sin^2 xdx$;

c) $\int_1^2 e^{x^2}dx,\ \int_1^2 e^x dx.$

求出下列函数在指定区间上的平均值:

1612. $f(x)=x^2,\ 0\leqslant x\leqslant 1.$

1613. $f(x)=a+b\cos x,\ -\pi\leqslant x\leqslant \pi.$

1614. $f(x)=\sin^2 x,\ 0\leqslant x\leqslant \pi.$

1615. $f(x)=\sin^4 x,\ 0\leqslant x\leqslant \pi.$

1616. 证明: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$ 的值包含在 $\frac{2}{3}\approx 0.67$ 与 $\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0.70$ 之间. 求出这个积分的精确值.

估计积分:

1617. $\int_0^1 \sqrt{4+x^2}dx.$

1618. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3}.$

1619. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x}.$

1620*. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sqrt{\tan x}dx.$

1621. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx.$

1622. 用分部积分法证明

$$0<\int_{100\pi}^{200\pi}\frac{\cos x}{x}dx<\frac{1}{100\pi}.$$

§7. 平面图形的面积

1°. **直角坐标下的面积.** 如果在直角坐标下用方程 $y=f(x)$ ($f(x)\geqslant 0$) 给出了连续曲线, 那么由这条曲线、过点 $x=a$ 和 $x=b$ 的两条垂线以及横轴上的线段 $a\leqslant x\leqslant b$ 所围成的曲边梯形面积 (图 40) 就用公式

$$S=\int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

来确定.

例 1　计算由抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$、直线 $x=1$ 和 $x=3$ 以及横坐标轴所围成的曲边梯形的面积 (图 41).

解　所求的面积用积分

$$S=\int_1^3\frac{x^2}{2}dx=4\frac{1}{3}$$

表示.

例 2　计算由曲线 $x=2-y-y^2$ 与纵坐标轴所围成的图形的面积 (图 42).

解　这里对坐标轴的位置作了改变, 因此所求面积用积分

$$S=\int_{-2}^1(2-y-y^2)dy=4\frac{1}{2}$$

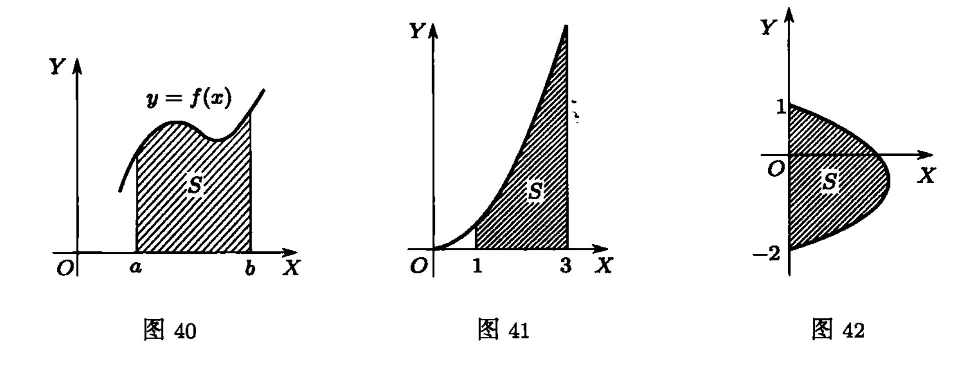


图 40　　图 41　　图 42

表示, 其中积分限 $y_1 = -2$ 和 $y_2 = 1$ 是由给定曲线与纵坐标轴交点的纵坐标求出.

在更一般的情况下, 如果面积 S 是由两条连续曲线 $y = f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 以及两条直线 $x = a$ 和 $x = b$ 所围成, 其中当 $a \leqslant x \leqslant b$ 时有 $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ (图 43), 那么我们有

$$s = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx. \tag{2}$$

例 3 计算包含在曲线

$$y - 2 - x^2 \quad 与 \quad y^3 = x^2 \tag{3}$$

之间的面积 S (图 44).

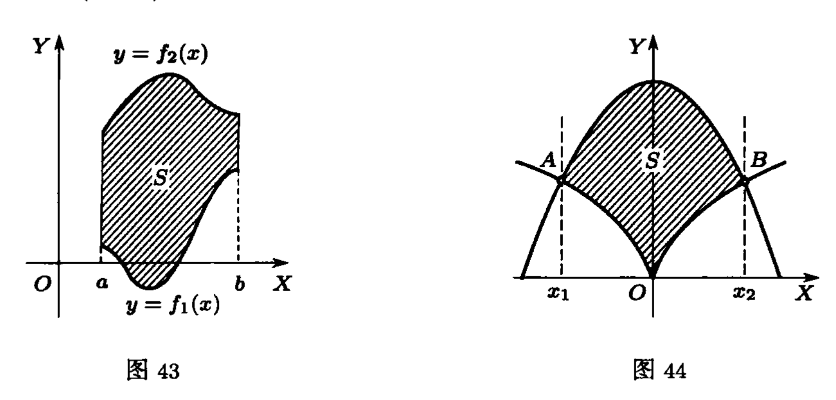


图 43　　图 44

解 解出联合方程组 (3) 后, 我们找到积分限 $x_1 = -1$ 和 $x_2 = 1$. 由公式 (2), 我们得到

$$S = \int_{-1}^{1} (2 - x^2 - x^{2/3})dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{3}{5}x^{5/3}\right)\Big|_{-1}^{1} = 2\frac{2}{15}.$$

如果曲线是用参数方程的形式 $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ 给出, 那么利用这条曲线、对应于 $x = a$ 和 $x = b$ 的两条直线以及 OX 轴上的线段所围成的曲边梯形面积就由积分

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\varphi'(t)dt$$

表示, 其中 t_1 和 t_2 是从求解方程

$$a = \varphi(t_1) \quad 和 \quad b = \varphi(t_2) \quad (在区间\ [t_1, t_2]\ 上有 \psi(t) \geqslant 0)$$

来确定.

例 4 利用椭圆 (图 45) 的参数方程

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases}$$

求出它的面积 S.

解 根据对称性只需算出它的四分之一面积, 而后四倍所得结果, 即得 S. 在方程 $x = a\cos t$ 中, 首先令 $x = 0$, 而后令 $x = a$, 我们得到积分限 $t_1 = \frac{\pi}{2}$ 和 $t_2 = 0$. 因此

$$\frac{1}{4}S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t a(-\sin t)dt = ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 tdt = \frac{\pi ab}{4},$$

从而有 $S = \pi ab$.

$2°$. **极坐标下的面积**. 如果连续曲线是在极坐标下用方程 $r = f(\varphi)$ 给出, 那么由曲线的弧与对应于值 $\varphi_1 = \alpha$ 和 $\varphi_2 = \beta$ ($\geqslant \alpha$) 的两条极径 OA 和 OB 所围成的扇形 AOB (图 46) 面积就用积分

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f(\varphi)]^2 d\varphi$$

来表示.

例 5 求出包含在伯努利双纽线 $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ (图 47) 内部的面积.

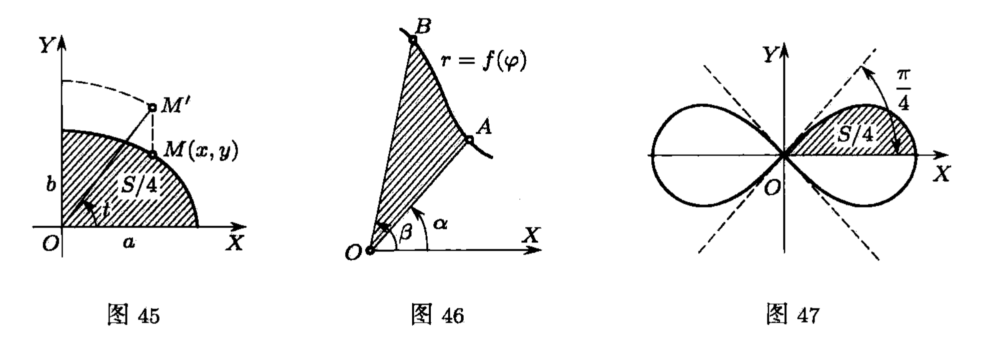


图 45 图 46 图 47

解 由于曲线的对称性, 首先确定所求面积的四分之一:

$$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4}.$$

由此得出 $S = a^2$.

1623. 计算由抛物线 $y = 4x - x^2$ 与横坐标轴围成的平面图形的面积.

1624. 计算由曲线 $y = \ln x$、OX 轴以及直线 $x = e$ 围成的平面图形的面积.

1625*. 求由曲线 $y = x(x-1)(x-2)$ 与 OX 轴围成的平面图形的面积.

1626. 求由曲线 $y^3 = x$、直线 $y = 1$ 以及垂线 $x = 8$ 围成的平面图形的面积.

1627. 计算由一个半波正弦曲线 $y = \sin x$ 与 OX 轴围成的平面图形的面积.

1628. 计算由曲线 $y = \tan x$、OX 轴与直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 围成的平面图形的面积.

1629. 求由双曲线 $xy = m^2$、直线 $x = a$ 和 $x = 3a$ $(a > 0)$ 以及 OX 轴围成的平面图形的面积.

1630. 求由阿涅西箕舌线 $y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$ 与横坐标轴围成的平面图形的面积.

1631. 计算由曲线 $y = x^3$、直线 $y = 8$ 以及 OY 轴所围成的图形的面积.

1632. 求由抛物线 $y^2 = 2px$ 和 $x^2 = 2py$ 所围成的平面图形的面积.

1633. 计算由抛物线 $y = 2x - x^2$ 和直线 $y = -x$ 所围成的平面图形的面积.

1634. 计算由直线 $y = 3 - 2x$ 与抛物线 $y = x^2$ 所围图形的面积.

1635. 计算包含在抛物线 $y = x^2, y = \frac{x^2}{2}$ 和直线 $y = 2x$ 之间图形的面积.

1636. 计算包含在抛物线 $y = \frac{x^2}{3}$ 和 $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$ 之间图形的面积.

1637. 计算包含在阿涅西 (Agnesi) 箕舌线 $y = \frac{1}{1 + x^2}$ 和抛物线 $y = \frac{x^2}{2}$ 之间图形的面积.

1638. 计算由曲线 $y = e^x$, $y = e^{-x}$ 以及直线 $x = 1$ 所围成的平面图形的面积.

1639. 求由双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 和直线 $x = 2a$ 所围成图形的面积.

1640*. 求星形线

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

所围图形的面积.

1641. 求在悬链线

$$y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a},$$

OY 轴和直线 $y = \frac{a}{2e}(e^2 + 1)$ 之间图形的面积.

1642. 求由曲线 $a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ 所围图形的面积.

1643. 计算包含在曲线

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^{2/3} = 1$$

内部的面积.

1644. 求在等轴双曲线 $x^2 - y^2 = 9$, OX 轴以及经过点 $(0,0), (5,4)$ 直线之间图形的面积.

1645. 求在曲线 $y = \frac{1}{x^2}$, OX 轴以及纵向直线 $x = 1$ $(x > 1)$ 之间图形的面积.

1646*. 求由蔓叶线 $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ 及其渐近线 $x = 2a$ $(a > 0)$ 所围图形的面积.

1647*. 求在环索线 $y^2 = \frac{x(x - a)^2}{2a - x}$ 与其渐近线 $(a > 0)$ 之间图形的面积.

1648. 计算圆 $x^2 + y^2 = 8$ 被抛物线 $y^2 = 2x$ 分割成两部分的面积.

1649. 算出包含在圆周 $x^2+y^2=16$ 与抛物线 $x^2=12(y-1)$ 之间的面积.

1650. 求出包含在星形线

$$x=a\cos^3 t,\qquad y=b\sin^3 t$$

内部的面积.

1651. 求出 OX 轴与一拱摆线

$$x=a(t-\sin t),\qquad y=a(1-\cos t)$$

界定的面积.

1652. 求出由摆线的一个分支

$$\begin{cases} x=at-b\sin t, \\ y=a-b\cos t. \end{cases}\quad (0<b\leqslant a)$$

与它最低一点处切线所界定的面积.

1653. 求出由心脏线

$$\begin{cases} x=a(\cos t-\cos 2t), \\ y=a(\sin t-\sin 2t) \end{cases}$$

所界定的面积.

1654*. 求出笛卡儿叶形线

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}$$

闭圈部分的面积.

1655*. 求出由心脏线

$$r=a(1+\cos\varphi)$$

所界定图形的面积.

1656*. 求出包含在阿基米德螺线 $r=a\varphi$ 第一和第二圈之间 (图 48) 的面积.

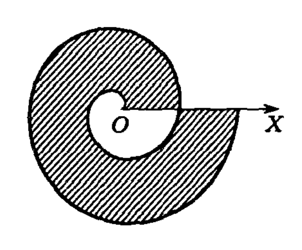


图 48

1657. 求出曲线

$$r=a\cos 2\varphi$$

一瓣的面积.

1658. 求出由曲线

$$r^2=a^2\sin 4\varphi$$

界定的面积.

1659*. 求出由曲线 $r=a\sin 3\varphi$ 界定的面积.

1660. 求出由帕斯卡 (Pascal) 蚶线

$$r=2+\cos\varphi$$

所界定的面积.

1661. 求出由抛物线 $r=a\sec^2\dfrac{\varphi}{2}$、射线 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ 和 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ 所界定的面积.

1662. 求出由椭圆

$$r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}\quad (0\leqslant\varepsilon<1)$$

所界定图形的面积.

1663. 求出由曲线 $r = 2a\cos 3\varphi$ 界定且位于圆 $r = a$ 外部的面积.

1664*. 求出由曲线 $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$ 所界定的面积.

§8. 曲线的弧长

1°. **在直角坐标中的弧长.** 光滑曲线 $y = f(x)$ 上包含在横坐标为 $x = a$ 和 $x = b$ 的两个点之间的弧长 s 等于

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx.$$

例 1 求出星形线 $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (图 49) 的长度.

解 将星形线方程求导, 我们得到

$$y' = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}.$$

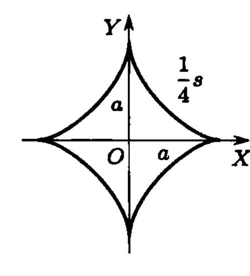


图 49

于是, 对于四分之一星形线的弧长我们有

$$\frac{1}{4}s = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}}dx = \int_0^a \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}dx = \frac{3}{2}a.$$

由此得出 $s = 6a$.

2°. **用参数方程给出曲线的弧长.** 如果曲线是用参数形式的方程 $x = \varphi(t)$ 和 $y = \psi(t)$ ($\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 为连续可微函数) 给出, 那么曲线的弧长 s 等于

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}dt,$$

其中 t_1 和 t_2 为对应于弧端点的参数值.

例 2 求出一拱摆线 (图 50)

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

的长度.

解 我们有 $x' = \dfrac{dx}{dt} = a(1 - \cos t)$ 和 $y' = \dfrac{dy}{dt} = a\sin t$. 因此

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2\sin^2 t}dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}dt = 8a.$$

积分限 $t_1 = 0$ 和 $t_2 = 2\pi$ 对应于一拱摆线的端点.

如果光滑曲线是在极坐标 r 和 φ 之下用方程 $r = f(\varphi)$ 给出, 那么弧长 s 等于

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}d\varphi,$$

其中 α 和 β 为弧端点处极角的值.

例 3 求出整条曲线 $r = a\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$ (图 51) 的长度. 整条曲线是由点 (r, φ) 当 φ 从 0 变到 3π 时所描绘.

解 我们有 $r' = a\sin^2\dfrac{\varphi}{3}\cos\dfrac{\varphi}{3}$, 因此整条曲线的弧长为

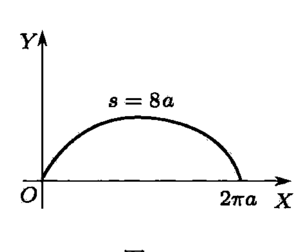


图 50

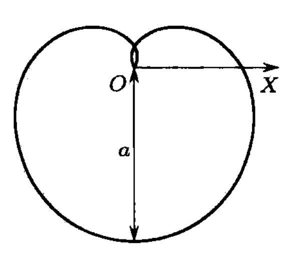


图 51

$$s=\int_0^{3\pi}\sqrt{a^2\sin^6\frac{\varphi}{3}+a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3}}d\varphi=a\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\varphi}{3}d\varphi=\frac{3\pi a}{2}.$$

1665. 算出半立方抛物线 $y^2=x^3$ 自坐标原点到坐标为 $x=4,y=8$ 点的弧长.

1666*. 求出悬链线 $y=a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a}$ 从顶点 $A(0,a)$ 到点 $B(b,h)$ 的长度.

1667. 算出抛物线 $y=2\sqrt{x}$ 从 $x=0$ 到 $x=1$ 的弧长.

1668. 求出曲线 $y=e^x$ 在点 $(0,1)$ 与点 $(1,e)$ 之间的弧长.

1669. 求出曲线 $y=\ln x$ 从 $x=\sqrt{3}$ 到 $x=\sqrt{8}$ 的弧长.

1670. 求出曲线 $y=\arcsin(e^{-x})$ 从 $x=0$ 到 $x=1$ 的弧长.

1671. 算出曲线 $x=\ln\sec y$ 包含在 $y=0$ 与 $y=\dfrac{\pi}{3}$ 之间的弧长.

1672. 求出曲线 $x=\dfrac{1}{4}y^2-\dfrac{1}{2}\ln y$ 从 $y=1$ 到 $y=e$ 的弧长.

1673. 求出曳物线右边分支

$$x=\sqrt{a^2-y^2}+a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right|$$

从 $y=a$ 到 $y=b$ $(0<b<a)$ 的弧长.

1674. 求出曲线 $9ay^2=x(x-3a)^2$ 封闭部分的长度.

1675. 求出曲线 $y=\ln\cot\dfrac{x}{2}$ 从 $x=a$ 到 $x=b$ 的弧长.

1676*. 求出圆的渐开线

$$\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t),\\ y=a(\sin t-t\cos t)\end{cases}$$

从 $t=0$ 到 $t=T$ 的弧长.

1677. 求出椭圆渐屈线

$$x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t,\quad y=\frac{c^2}{b}\sin^3 t\ (c^2=a^2-b^2)$$

的长度.

1678. 求出曲线

$$\begin{cases}x=a(2\cos t-\cos 2t),\\ y=a(2\sin t-\sin 2t)\end{cases}$$

的长度.

1679. 求出阿基米德螺线 $r=a\varphi$ 第一圈的长度.

1680. 求出心脏线 $r = a(1+\cos\varphi)$ 的全长.

1681. 求出抛物线 $r = a\sec^2\dfrac{\varphi}{2}$ 被经过极点的垂线所截下部分的弧长.

1682. 求出双曲螺线 $r\varphi = 1$ 从点 $\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$ 到点 $\left(\dfrac{1}{2},2\right)$ 的弧长.

1683. 求出对数螺线 $r = ae^{m\varphi}$ $(m>0)$ 位于圆周 $r=a$ 内部的弧长.

1684. 求出曲线 $\varphi = \dfrac{1}{2}\left(r+\dfrac{1}{r}\right)$ 从 $r=1$ 到 $r=3$ 的弧长.

§9. 立体的体积

1°. **旋转体的体积**. 将由曲线 $y=f(x)$、OX 轴以及两条直线 $x=a$ 和 $x=b$ 所界定的曲边梯形, 围绕 OX 轴和 OY 轴旋转而构成的旋转体, 其体积分别用公式

$$1)\ \ V_X = \pi\int_a^b y^2dx, \qquad 2)\ \ V_Y = 2\pi\int_a^b xydx^{①}$$

表示.

例 1 计算由一个在 OX 轴的区间 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 上的半波正弦曲线 $y=\sin x$ 所界定图形围绕: a) OX 轴和 b) OY 轴所形成立体的体积.

解

a) $V_X = \pi\displaystyle\int_0^\pi \sin^2 xdx = \frac{\pi^2}{2}$;

b) $V_Y = 2\pi\displaystyle\int_0^\pi x\sin xdx = 2\pi(-x\cos x+\sin x)\Big|_0^\pi = 2\pi^2$.

用曲线 $x=g(y)$、OY 轴以及两条平行线 $y=c$ 和 $y=d$ 所界定的图形, 围绕 OY 轴旋转而构成的立体, 其体积可以用公式

$$V_Y = \pi\int_c^d x^2dy$$

确定, 这是从上面推出的公式 1) 中将坐标 x 和坐标 y 对换得到的.

如果曲线是用另外的形式 (参数、极坐标等等) 给出, 那么在公式的推导中, 应当进行相应的积分变量变换.

在更一般情况下, 将由曲线 $y_1=f_1(x)$ 和 $y_2=f_2(x)$ (而且 $f_1(x)\leqslant f_2(x)$) 以及直线 $x=a$ 和 $x=b$ 所界定的图形, 围绕着 OX 轴和 OY 轴旋转而构成的立体, 其体积分别等于

$$V_X = \pi\int_a^b (y_2^2-y_1^2)dx, \quad V_Y = 2\pi\int_a^b x(y_2-y_1)dx.$$

---

①假设立体是由曲线 $y=f(x)$ 以及直线 $x=a, x=b$ 和 $y=0$ 所界定的曲边梯形围绕 OY 轴旋转而形成的. 作为这个立体的体积元, 我们取离开 OY 轴的距离为 x、其边长为 y 和 dx 的矩形围绕 OY 轴旋转而形成的立体部分体积. 于是体积元为 $dV_Y = 2\pi xydx$, 由此得出 $V_Y = 2\pi\displaystyle\int_a^b xydx$.

例 2　求出用圆 $x^2+(y-b)^2 \leqslant a^2\ (b \geqslant a)$ 围绕着 OX 轴旋转而构成的环的体积 (图 52).

解　我们有

$$y_1 = b - \sqrt{a^2-x^2} \quad 和 \quad y_2 = b + \sqrt{a^2-x^2}.$$

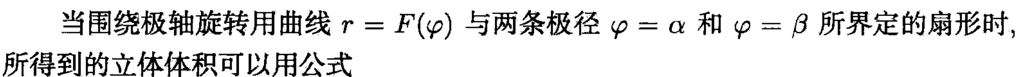
因此

$$V_X = \pi\int_{-a}^{a}[(b+\sqrt{a^2-x^2})^2-(b-\sqrt{a^2-x^2})^2]dx$$

$$= 4\pi b\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx = 2\pi^2a^2b$$

图 52

(最后积分的计算取变量变换 $x = a\sin t$).



当围绕极轴旋转用曲线 $r = F(\varphi)$ 与两条极径 $\varphi = \alpha$ 和 $\varphi = \beta$ 所界定的扇形时, 所得到的立体体积可以用公式

$$V_P = \frac{2}{3}\pi\int_{\beta}^{\alpha} r^3\sin\varphi d\varphi$$

进行计算.

当寻找围绕极轴旋转在极坐标中给出的由某封闭曲线所界定图形而得到的立体体积时, 利用这个公式是很方便的.

例 3　确定由围绕极轴旋转曲线 $r = a\sin 2\varphi$ 而形成的立体体积.

解

$$V_P = 2\cdot\frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3\sin\varphi d\varphi = \frac{4}{3}\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 2\varphi\sin\varphi d\varphi$$

$$= \frac{32}{3}\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi\cos^3\varphi d\varphi = \frac{64}{105}\pi a^3.$$

2°. **已知横截面面积的立体体积的计算**. 如果 $S = S(x)$ 是一个立体在横坐标为 x 的点处用垂直于某条直线 (我们取它作为 OX 轴) 的平面横截该立体得到的截面面积, 那么这个立体的体积就等于

$$V = \int_{x_1}^{x_2} S(x)dx,$$

其中 x_1 和 x_2 为立体两端截面的横坐标.

例 4　确定一个用通过圆柱体底面直径且与底面的倾角为 α 的平面, 把圆柱体切割下来的楔形立体的体积. 圆柱体的底面半径等于 R (图 53).

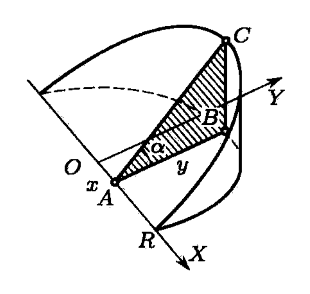


图 53

解　我们取切割平面与底面的交线作为 OX 轴, 而取底面上与 OX 轴垂直的直径作为 OY 轴. 因此底面圆周的方程为 $x^2+y^2=R^2$.

于是与坐标原点 O 之间距离为 x 的截面 ABC, 其面积等于

$$S(x) = \triangle ABC\ 的面积\ = \frac{1}{2}AB\cdot BC = \frac{1}{2}yy\tan\alpha = \frac{y^2}{2}\tan\alpha.$$

因此所求楔形体的体积是

$$V = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^R y^2 \tan\alpha dx = \tan\alpha \int_0^R (R^2 - x^2)dx = \frac{2}{3}R^3 \tan\alpha.$$

1685. 求出由 OX 轴和抛物线 $y = ax - x^2$ $(a > 0)$ 界定的图形围绕 OX 轴旋转所得到立体的体积.

1686. 求出由椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 围绕 OX 轴旋转所形成的椭球体积.

1687. 求出由悬链线 $y = a\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{a}$, OX 轴和直线 $x = \pm a$ 界定的图形围绕 OX 轴旋转所得到立体的体积.

1688. 求出用从 $x = 0$ 到 $x = \pi$ 区间上的曲线 $y = \sin^2 x$ 围绕 OX 轴旋转所形成的立体体积.

1689. 求出由半立方抛物线 $y^2 = x^3$, OX 轴和直线 $x = 1$ 界定的图形围绕 OX 轴旋转所形成的立体体积.

1690. 求出在问题 1680 中同样图形, 但围绕 OY 轴旋转所形成的立体体积.

1691. 求出由曲线 $y = e^x$ 和直线 $x = 0, y = 0$ 界定的图形围绕: a) OX 轴和 b) OY 轴旋转所形成的立体体积.

1692. 求出由抛物线 $y^2 = 4ax$ 被直线 $x = a$ 截下的部分围绕 OY 轴旋转所形成的立体体积.

1693. 求出由抛物线 $y^2 = 4ax$ 被直线 $x = a$ 截下的部分, 围绕该直线旋转所形成的立体体积.

1694. 求出由抛物线 $y^2 = 2px$ 和直线 $x = \frac{p}{2}$ 所界定的图形围绕直线 $y = -p$ 旋转所形成的立体体积.

1695. 求出包含在抛物线 $y = x^2$ 与 $y = \sqrt{x}$ 之间的图形围绕 OX 轴旋转所形成的立体体积.

1696. 求出用曲线 $(x - 4a)y^2 = ax(x - 3a)$ $(a > 0)$ 的闭环部分围绕 OX 轴旋转所形成的立体体积.

1697. 求出用蔓叶线 $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ 围绕它的渐近线 $x = 2a$ 旋转所产生的立体体积.

1698. 求出旋转抛物体的体积, 它的底面半径为 R, 而高为 H.

1699. 一条正抛物线段, 其底边长 (开口宽) 为 $2a$, 高为 h. 将它围绕它的底边旋转, 确定这样得到的旋转体体积 (卡瓦列里 (Cavalieri) "柠檬").

1700. 证明: 用平面 $x = 2a$ 切割以等轴双曲线 $x^2 - y^2 = a^2$ 围绕 OX 轴旋转所形成的立体所得那部分的体积等于半径为 a 的球的体积.

1701. 求出用摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ 的一拱和 OX 轴界定的图形, 围绕: a) OX 轴, b) OY 轴, c) 图形的对称轴旋转所形成的立体体积.

1702. 求出用星形线 $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ 围绕 OY 轴旋转所形成的立体体积.

1703. 求出用心脏线 $r=a(1+\cos\varphi)$ 围绕极轴旋转而得到的立体体积.

1704. 求出用曲线 $r=a\cos^2\varphi$ 围绕极轴旋转而形成的立体体积.

1705. 求出一个四棱台的体积, 其平行底面分别为边长 A, B 和 a, b 的矩形, 而高等于 h.

1706. 求出其底面是以 a 和 b 为半轴的椭圆, 而高等于 h 的正椭圆锥体的体积.

1707. 在星形线 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ 的所有平行于 OX 轴的弦上构造正方形, 其边长等于弦的长度, 而其所在平面垂直于 XOY 平面. 求出用这些正方形构成的立体体积.

1708. 变形圆如此进行移动, 使得圆周上总有一个点位于 OY 轴上, 圆心描绘出椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 而圆所在的平面垂直于 OY 轴. 求出这样用圆构成的立体体积.

1709. 运动三角形所在平面总是保持垂直于以 a 为半径的圆的一根固定直径. 三角形的底边是圆的弦, 而它的顶点沿着平行于固定直径、且与圆所在平面距离为 h 的直线移动. 求出这样三角形从固定直径的一个端点运动到另一个端点所构成立体 (所谓**劈锥体**) 的体积.

1710. 求出由圆柱面 $x^2+z^2=a^2$ 和 $y^2+z^2=a^2$ 所界定立体的体积.

1711. 求出用平面 $x=a$ 从椭圆抛物体 $\dfrac{y^2}{2p}+\dfrac{z^2}{2q}\leqslant x$ 上切割下来的那块立体的体积.

1712. 求出由单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 与平面 $x=0$ 和 $z=h$ 所界定立体的体积.

1713. 求出椭球 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的体积.

§10. 旋转曲面的面积

在点 $x=a$ 与 $x=b$ 之间的光滑曲线 $y=f(x)$ 围绕 OX 轴旋转所形成曲面的面积用公式

$$S_X=2\pi\int_a^b y\frac{ds}{dx}dx=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}dx \tag{1}$$

表示 (ds 为曲线弧的微分).

在曲线方程用其他方式给出的情况下, 曲面面积 S_X 可用相应的变量变换方法从公式 (1) 得到.

例 1　求出用曲线 $9y^2=x(3-x)^2$ (图 54) 的闭环线围绕 OX 轴旋转所形成曲面的面积.

解　当 $0\leqslant x\leqslant 3$ 时, 对于曲线的上面部分, 我们有 $y=\dfrac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$. 由此得出弧的微分 $ds=\dfrac{x+1}{2\sqrt{x}}dx$. 根据公式 (1), 曲面面积

$$S=2\pi\int_0^3\frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}\frac{x+1}{2\sqrt{x}}dx=3\pi.$$

例 2 求出用摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ 的一拱弧 (图 55) 围绕它的对称轴旋转所形成曲面的面积.

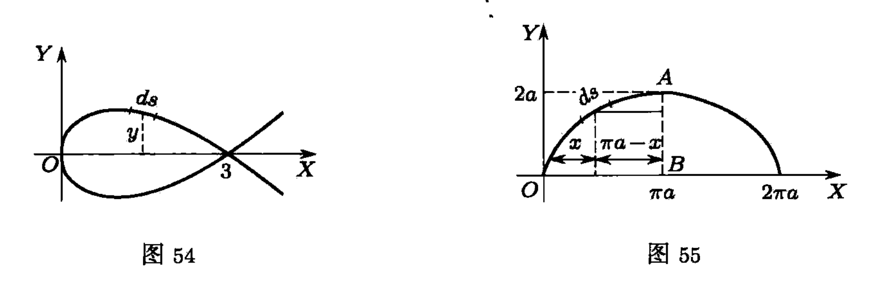


图 54　　图 55

解 所求曲面是用弧 OA 围绕其方程为 $x=\pi a$ 的直线 AB 旋转而构成. 取 y 作为自变量, 并考虑到旋转轴 AB 是由坐标轴 OY 平移距离 πa 而得到, 我们有

$$S=2\pi\int_0^{2a}(\pi a-x)\frac{ds}{dy}dy.$$

转到变量 t, 我们得到

$$\begin{aligned}S&=2\pi\int_0^{\pi}(\pi a-at+a\sin t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt\\&=2\pi\int_0^{\pi}(\pi a-at+a\sin t)2a\sin\frac{t}{2}dt\\&=4\pi a^2\int_0^{\pi}\left(\pi\sin\frac{t}{2}-t\sin\frac{t}{2}+\sin t\sin\frac{t}{2}\right)dt\\&=4\pi a^2\left[-2\pi\cos\frac{t}{2}+2t\cos\frac{t}{2}-4\sin\frac{t}{2}+\frac{4}{3}\sin^3\frac{t}{2}\right]\Bigg|_0^{\pi}\\&=8\pi\left(\pi-\frac{4}{3}\right)a^2.\end{aligned}$$

1714. 在图 56 上指出了抛物镜面 AOB 的尺寸, 要求找出这个镜曲面的面积.

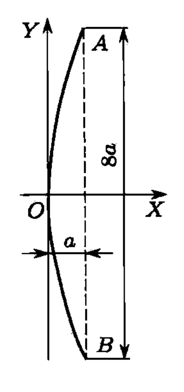


图 56

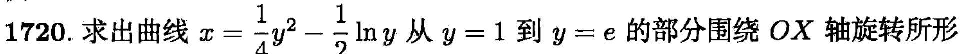
1715. 求出 “纺锤” 曲面的面积, 这个曲面是由于将半波正弦曲线 $y=\sin x$ 围绕 OX 轴旋转而得到的.

1716. 求出将正切曲线 $y=\tan x$ 从 $x=0$ 到 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 的部分围绕 OX 轴旋转所形成的曲面面积.

1717. 求出将曲线 $y=e^{-x}$ 从 $x=0$ 到 $x=+\infty$ 的部分弧线围绕 OX 轴旋转所形成的曲面面积.

1718. 求出将悬链线 $y=a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a}$ 在从 $x=0$ 到 $x=a$ 的部分的弧线围绕 OX 轴旋转所形成的曲面 (即所谓**悬链面**) 面积.

1719. 求出星形线 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ 围绕 OY 轴旋转所形成的曲面面积.



1720. 求出曲线 $x=\dfrac{1}{4}y^2-\dfrac{1}{2}\ln y$ 从 $y=1$ 到 $y=e$ 的部分围绕 OX 轴旋转所形

成曲面的面积.

1721*. 求出用圆周 $x^2+(y-b)^2=a^2$ $(b>a)$ 围绕 OX 轴旋转所形成的环面面积.

1722. 求出用椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$ 围绕: 1) OX 轴; 2) OY 轴旋转所形成的曲面面积.

1723. 求出用摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ 的一拱弧围绕: a) OX 轴; b) OY 轴; c) 在摆线最高顶点处的切线旋转所形成的曲面面积.

1724. 求出用心脏线

$$\begin{cases} x=a(2\cos t-\cos 2t), \\ y=a(2\sin t-\sin 2t) \end{cases}$$

围绕 OX 轴旋转所形成的曲面面积.

1725. 确定用双纽线 $r^2=a^2\cos 2\varphi$ 围绕极轴旋转所形成的曲面面积.

1726. 求出用心脏线 $r=2a(1+\cos\varphi)$ 围绕极轴旋转所形成的曲面面积.

§11. 矩. 质心. 古尔丁定理

1°. **静力矩**. 质点 A 具有质量 m, 且离开轴 l 的距离为 d, 就称量 $M_l=md$ 为质点 A 关于轴 l 的**静力矩**.

对于质量为 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 的 n 个质点系与位于同一平面上的轴 l, 就称和

$$M_l=\sum_{i=1}^{n}m_id_i \tag{1}$$

为该质点系关于轴 l 的**静力矩**, 其中 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 为质点到轴 l 的距离; 而且位于轴一边的距离取正号 (+), 而位于另一边取负号 (−). 类似地定义**质点系关于平面的静力矩**.

如果质量是连续地布满了 XOY 平面上的曲线或者图形, 那么它们关于坐标轴 OX 和 OY 的静力矩 M_X 和 M_Y 将用相应的积分表示来代替和式 (1). 对于几何图形的情况将认为密度等于 1.

特别: 1) 对于曲线 $x=x(s),y=y(s)$, 这里参数 s 为弧长, 我们有

$$M_X=\int_0^L y(s)ds, \qquad M_Y=\int_0^L x(s)ds \tag{2}$$

($ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$ 为弧的微分).

2) 对于由曲线 $y=y(x),OX$ 轴和两条直线 $x=a$ 和 $y=b$ 所界定的平面图形, 我们得到

$$M_X=\frac{1}{2}\int_a^b y|y|dx, \qquad M_Y=\int_a^b x|y|dx. \tag{3}$$

例 1　求出由直线 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,x=0,y=0$ 界定的三角形 (图 57) 关于 OX 轴和 OY 轴的静力矩.

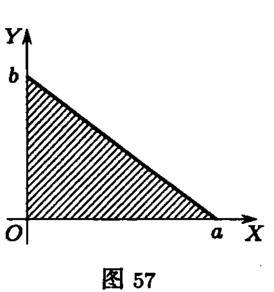


图 57

解 在此有 $y = b\left(1 - \frac{x}{a}\right)$. 于是应用公式 (3) 我们得到

$$M_X = \frac{b^2}{2}\int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 dx = \frac{ab^2}{6}$$

和

$$M_Y = b\int_0^a x\left(1 - \frac{x}{a}\right)dx = \frac{a^2 b}{6}.$$

2°. **转动惯量**. 质点 A 具有质量 m, 且离开轴 l 的距离为 d, 就称量 $I_l = md^2$ 为质点 A 关于4轴 l 的**转动惯量**.

对于质量为 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 的 n 个质点系, 就称和

$$I_l = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2$$

为该质点系关于轴 l 的**转动惯量**, 其中 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 为质点到轴 l 的距离. 在连续质量的情况下, 我们得到相应的积分来代替求和.

例 2 求出底边长为 b 和高为 h 的三角形关于它底边的转动惯量.

解 我们取三角形的底边作为 OX 轴, 而取它的高作为 OY 轴 (图 58).

我们将三角形无限地细分成高度为 dy 的水平小条, 它们起了质量元 dm 的作用. 利用相似三角形的性质, 我们得到

$$dm = b\frac{h-y}{h}dy$$

和

$$dI_X = y^2 dm = \frac{b}{h}y^2(h-y)dy.$$

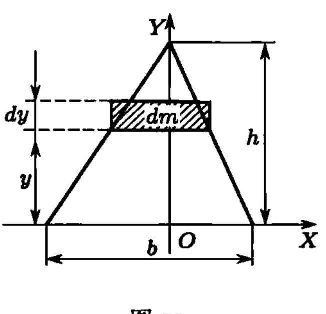


图 58

由此得出

$$I_X = \frac{b}{h}\int_0^h y^2(h-y)dy = \frac{1}{12}bh^3.$$

3°. **质心**. 对于质量为 M 的平面图形 (弧线或者面积), 其**质心坐标**是用公式

$$\overline{x} = \frac{M_Y}{M}, \qquad \overline{y} = \frac{M_X}{M}$$

进行计算, 其中 M_X 和 M_Y 为质量的静力矩. 在几何图形的情况下, 质量 M 在数量上就等于对应的弧长或者面积.

对于连接点 $A(a, f(a))$ 和点 $B(b, f(b))$ 的平面曲线 $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, 其弧线质心坐标 $(\overline{x}, \overline{y})$ 为

$$\overline{x} = \frac{\int_A^B x ds}{s} = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+(y')^2}dx}{\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}dx}, \qquad \overline{y} = \frac{\int_A^B y ds}{s} = \frac{\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx}{\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}dx}.$$

曲边梯形 $a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)$ 的质心坐标 $(\overline{x}, \overline{y})$ 可以用公式

$$\overline{x} = \frac{\int_a^b xydx}{S}, \qquad \overline{y} = \frac{\int_a^b y^2 dx}{S}$$

计算, 其中 $S=\int_a^b ydx$ 为图形的面积.

对于物体质心坐标也有类似公式成立.

例 3　求出半圆弧线 $x^2+y^2=a^2$ $(y\geqslant 0)$ (图 59) 的质心.

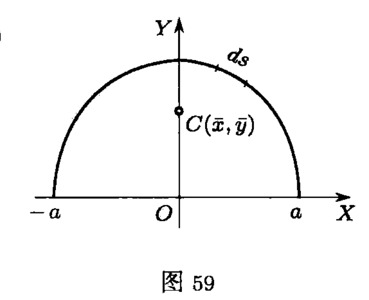


图 59

解　我们有

$$y=\sqrt{a^2-x^2},\qquad y'=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

以及

$$ds=\sqrt{1+(y')^2}dx=\frac{adx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

由此得出

$$M_Y=\int_{-a}^{a}xds=\int_{-a}^{a}\frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=0,$$

$$M_X=\int_{-a}^{a}yds=\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\frac{adx}{\sqrt{a^2-x^2}}=2a^2,\qquad M=\int_{-a}^{a}\frac{adx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\pi a.$$

于是

$$\overline{x}=0,\qquad \overline{y}=\frac{2}{\pi}a.$$

4°. **古尔丁 (Guldin) 定理.**

定理 1. 一条平面曲线, 围绕位于同一平面且与此曲线不相交的某根轴旋转该曲线弧所得到的曲面面积, 等于这根曲线弧的长度与描写这根曲线弧质心的圆周长度的乘积.

定理 2. 一个平面图形, 围绕位于同一平面且与此图形不相交的某根轴旋转该图形所得到的立体体积, 等于这个图形的面积与描写这个图形质心的圆周长度的乘积.

1727. 求出直线

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

位于坐标轴之间的一段关于坐标轴的静力矩.

1728. 求出以 a 和 b 为边长的矩形关于其边的静力矩.

1729. 求出用直线 $x+y=a, x=0$ 和 $y=0$ 界定的三角形关于 OX 轴和 OY 轴的静力矩以及质心坐标.

1730. 求出星形线

$$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$$

位于第一象限的弧线关于 OX 轴和 OY 轴的静力矩以及质心坐标.

1731. 求出圆周

$$r=2a\sin\varphi$$

关于极轴的静力矩.

1732. 求出悬链线

$$y=a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$$

从 $x=-a$ 到 $x=a$ 弧段的质心坐标.

1733. 求出半径为 a、张角为 2α 之圆弧段的质心.

1734. 求出摆线第一拱弧

$$x=a(t-\sin t),\qquad y=a(1-\cos t),\qquad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

的质心坐标.

1735. 求出由椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 与坐标轴 OX 和 OY $(x\geqslant 0, y\geqslant 0)$ 所界定图形的质心坐标.

1736. 求出由曲线

$$y=x^2,\qquad y=\sqrt{x}$$

所界定图形的质心坐标.

1737. 求出由摆线第一拱弧

$$x=a(t-\sin t),\qquad y=a(1-\cos t),\qquad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

与 OX 轴所界定图形的质心坐标.

1738**. 求出以 a 为半径、中心在坐标原点且位于 XOY 平面上方之半球面的质心.

1739**. 求出底面半径为 r 和高为 h 的均匀圆锥体的质心.

1740**. 求出以 a 为半径、中心在坐标原点且位于 XOY 平面上方之均匀半球体的质心.

1741. 求出半径为 a 的圆周关于它的直径的转动惯量.

1742. 求出以 a 和 b 为边的矩形关于它两条边的转动惯量.

1743. 求出底宽为 $2b$ 和高为 h 的正抛物线段的关于它的对称轴的转动惯量.

1744. 求出椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的面积关于其主轴的转动惯量.

1745**. 求出半径为 R_1 和 R_2 $(R_1<R_2)$ 之圆环的极转动惯量, 亦即关于通过环中心且垂直于它所在平面之轴的转动惯量.

1746**. 求出底面半径为 R、高为 H 的均匀正圆锥体关于它的轴的转动惯量.

1747**. 求出半径为 a 和质量为 M 的均匀球体关于它的直径的转动惯量.

1748. 求出将半径为 a 的圆, 围绕位于圆所在平面内且离开它圆心的距离为 b $(b\geqslant a)$ 的轴旋转所得到圆环的表面积和体积.

1749. a) 确定星形线

$$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$$

位于第一象限弧线的质心位置.

b) 求出用曲线 $y^2=2px$ 和 $x^2=2py$ 所界定图形的质心.

1750**. a) 利用古尔丁定理求出半圆的质心.

b) 利用古尔丁定理证明: 三角形的质心位于它边上高的三分之一处.

§12. 应用定积分求解物理问题

1°. **质点经过的路程**. 如果一个质点沿着某条曲线运动, 而且它的速度 $v = f(t)$ 是时间 t 的已知函数, 那么在时间区间 $[t_1, t_2]$ 内, 这个质点所经过的**路程**等于

$$s = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt.$$

例 1 质点的速度等于

$$v = 0.1t^3$$

(v 以 m/s 表示). 求出从运动开始进行到 $T = 10$ s 时间区间内质点所经过的路程. 在这个区间内, 运动的平均速度等于多少?

解 我们有

$$s = \int_0^{10} 0.1t^3 dt = 0.1\frac{t^4}{4}\bigg|_0^{10} = 250(\mathrm{m})$$

和

$$v_{\text{平均}} = \frac{s}{T} = 25(\mathrm{m/s}).$$

2°. **变力做功**. 如果变化的力 $X = f(x)$ 作用在 OX 轴方向上, 那么在区间 $[x_1, x_2]$ 上**变力所做的功**等于

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx.$$

例 2 如果 1 N 的力拉长弹簧 1 m, 那么为了拉长弹簧 6 cm, 需要消耗多少功?

解 根据胡克 (Hooke) 定律, 拉长弹簧 x m 所需要的力 X N, 亦即 $X = kx$, 这里 k 为比例系数.

令 $x = 0.01$ m 和 $X = 1$ N 之后, 我们得到 $k = 100$, 从而 $X = 100x$.

由此得出所求的功为

$$A = \int_0^{0.06} 100x dx = 50x^2\bigg|_0^{0.06} = 0.18(\mathrm{J}).$$

3°. **动能**. 对于一个有质量 m 且具有速度 v 的质点, 称表达式

$$K = \frac{mv^2}{2}$$

为该质点的**动能**.

对于 n 个质量分别为 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 且相应地具有速度 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 的质点系, 其动能等于

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}. \tag{1}$$

对于物体动能的计算, 必须首先将它划分成一些基本部分 (即质点的作用), 而后对这些部分的动能进行求和, 最后求极限得到积分以代替和式 (1).

例 3 求出将底面半径为 R、高为 h 且有密度 δ 的均匀圆柱体围绕它自己的轴线以角速度 ω 旋转的动能.

解 我们取高为 h、内圆半径为 r 和壁厚为 dr 的圆柱筒 (图 60) 质量作为质量微元 dm. 于是有

$$dm = 2\pi r \cdot h\delta dr.$$

由于质量微元 dm 的线速度 $v = r\omega$, 所以它的动能微元为

$$dK = \frac{v^2 dm}{2} = \pi r^3 \omega^2 h\delta dr.$$

由此得出

$$K = \pi\omega^2 h\delta \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi\omega^2\delta R^4 h}{4}.$$

图 60

4°. **液体的压力**. 为了计算液体的压力, 我们利用帕斯卡定律. 按照这条定律, 在浸没深度 h 的平面 S 上, 液体的压力等于

$$P = \gamma g h S,$$

其中 γ 为液体的密度, g 为重力加速度.

例 4 求垂直浸没在水中、半径为 r 的试验半圆①的压力, 这时圆的直径正好在水平面上 (图 61).

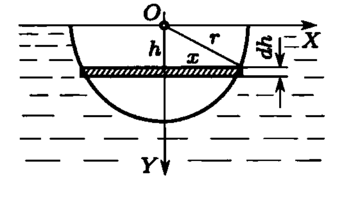


图 61

解 我们将半圆的面积划分成一些元素, 即平行于水面的矩形小条. 位于离开水平面距离 h 的这样一个元素的面积 (忽略高阶无穷小量) 等于

$$dS = 2x dh = 2\sqrt{r^2 - h^2} dh.$$

于是这种试验元素的压力等于

$$dP = \gamma g h dS = 2\gamma g h \sqrt{r^2 - h^2} dh,$$

其中 $\gamma = 1$ 为水的密度.

由此得出总压力为

$$P = 2\gamma g \int_0^r h\sqrt{r^2 - h^2} dh = -\frac{2}{3}\gamma g (r^2 - h^2)^{3/2}\Big|_0^r = \frac{2}{3} g r^3.$$

1751. 在不考虑空气阻力之下, 以初始速度 v_0 垂直向上抛出的物体速度用公式

$$v = v_0 - gt$$

给出, 其中 t 为过程进行的时间, g 为重力加速度. 求从抛出时刻起计算时间, 物体在时刻 t 离开初始位置的距离.

1752. 在考虑空气阻力之下, 以初始速度 v_0 垂直向上抛出的物体速度用公式

$$v = c \cdot \tan\left(-\frac{g}{c}t + \arctan\frac{v_0}{c}\right)$$

给出, 其中 t 为过程进行的时间, g 为重力加速度, c 为常数. 求出物体的上升高度.

1753. OX 轴上的质点围绕坐标原点进行简谐振动, 而且它的速度用公式

$$v = v_0 \cos\omega t$$

①在这个例子中, 还有在第 **1768—1771** 问题中, 所谓扁平曲面都理解为很薄的物体 (壳), 其中特征尺寸之一要比另外两个小得多.

给出, 其中 t 为时间, v_0, ω 为常数.

如果当 $t = 0$ 时, 质点有横坐标 $x = 0$, 求出质点的振动规律. 在周期振动之下, 求质点的速度平均值.

1754. 质点的运动速度 $v = te^{-0.01t}$ (v 以 m/s 计). 求出从运动开始到完全 “停止”, 质点所经过的路程.

1755. 火箭垂直上升运动. 当推力不变时, 火箭的加速度按照规律 $j = \dfrac{A}{a - bt}$ 随着其重量的减少而增大 ($a - bt > 0$). 如果它的初始速度等于零, 求出在任意时刻 t 的火箭速度. 并求出在时刻 $t = t_1$ 时火箭达到的高度.

1756*. 算出从底面半径为 R、高为 H 的垂直圆柱形桶中汲尽水所需要消耗的功.

1757. 算出从底面半径为 R、高为 H 且顶点在下方的圆锥形器皿内汲尽水所需要消耗的功.

1758. 算出从半径为 $R = 10$ m 的半球形锅体中汲尽水所需要消耗的功.

1759. 如果油的密度为 γ, 油罐的长度为 H, 底面的半径为 R. 算出从水平轴向放置的圆柱形油罐的顶孔汲尽油所需要消耗的功.

1760**. 将质量为 m 的物体从半径为 R 的地球表面升高 h 需要耗费多少功呢? 如果把物体移动到无穷远处, 这个功应等于多少?

1761**. 两个带电电荷 $q_0 = 1$ 库仑 (Coulomb) 和 $q_1 = 2$ 库仑, 它们分别位于 OX 轴上的 $x_0 = 0$ 和 $x_1 = 1$ cm 处; 如果将第二个电荷移动到点 $x_2 = 10$ cm 处, 需要做多少功呢?

1762**. 长度为 $l = 80$ cm、内有直径 $D = 20$ cm 活塞的圆柱体内充满了压力为 $p = 10\ \text{kg/cm}^2$ 的蒸汽, 当温度不变时 (**平稳过程**), 为了使得蒸汽体积减小二分之一, 需要做多少功呢?

1763**. 确定在绝热过程中当空气膨胀时产生的功, 已知空气初始体积 $V_0 = 1\ \text{m}^3$, 初始压力 $p_0 = 1\ \text{kg/cm}^2$, 膨胀到体积 $V_1 = 10\ \text{m}^3$.

1764**. 重量为 P、半径为 a 的垂直转轴支立在轴承 AB 上 (图 62). 在转轴底面一小部分 σ 与其相接触的轴承面之间的摩擦力为 $F = \mu p \sigma$, 其中 $p =$ 常数是转轴对轴承面上单位面积的压力, 而 μ 是摩擦系数. 求出当转轴转动一周时摩擦力所做的功.

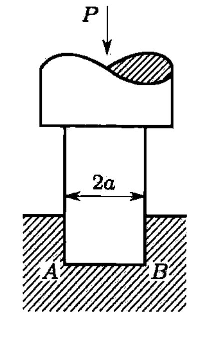


图 62

1765**. 质量为 M、半径为 R 的圆盘, 以角速度 ω 围绕经过中心并与它所在平面垂直的轴旋转, 算出该圆盘的动能.

1766. 质量为 M 的直圆锥, 以角速度 ω 围绕其自身的轴旋转. 如果圆锥的底面半径为 R、高为 H, 试算出其动能.

1767*. 半径为 $R = 2$ m 的铁球, 以角速度 $\omega = 1000$ 转/min 围绕它自己的直径旋转, 现欲停止其转动, 需要耗费多少功呢 (铁的密度为 $\gamma = 7.8\ \text{g/cm}^3$)?

1768. 底边为 b、高为 h 的垂直向下三角形, 顶点朝下浸入水中, 并使底边位于水

平面上, 求出它所受的水压力.

1769. 垂直水坝的形状为梯形, 上底 $a = 70$ m, 下底 $b = 50$ m, 坝高 $h = 20$ m, 算出水坝所受到的水压力.

1770. 轴长分别为 $2a$ 和 $2b$ 的椭圆垂直地浸入密度为 γ 的液体中, 椭圆中心浸入液体的深度为 h $(h \geqslant b)$, 且椭圆的长轴 $2a$ 与液面平行. 求出它受到的液体压力.

1771. 底面半径为 R、高为 H 的直圆锥体, 顶点朝下浸入水中, 底面位于水平面上, 求出圆锥体所受到的水压力.

杂　　题

1772. 长度为 $l = 100$ cm 的杆, 如果距离其一个端点为 x cm 处的线密度等于

$$\delta = (2 + 0.001x^2)\ \text{g/cm},$$

求出这根杆的质量.

1773. 根据经验, 得出水在温度 t℃ $(0 \leqslant t \leqslant 100)$ 时的比热等于

$$c = 0.9983 - 5.184 \cdot 10^{-5}t + 6.192 \cdot 10^{-7}t^2,$$

其中 c 是用 J / (g · ℃) 表示. 试问: 将 1 g 水从温度 0℃ 加热到温度 100℃ 需要耗费多少热量呢?

1774. 风对门产生均匀压力为 p g/cm^2, 门宽为 b cm, 高为 h cm, 求出使得门围绕门轴转动的风压力的力矩.

1775. 质量为 m 的质点与长为 l、质量为 M 的轴位于同一直线上, 并与轴一端的距离为 a, 试问: 轴对质点产生多大的引力呢?

1776**. 当建立流经截面半径为 a 的圆形管道的液体层流模型时, 距离管道轴心 r 点处的流速 v 由公式

$$v = \frac{p}{4\mu l}(a^2 - r^2)$$

给出, 其中 p 为管道两端的液体压力差, μ 为黏性系数, l 为管道的长度. 试确定液体的流量 Q, 即在单位时间内流经管道横截面的液体数量.

1777*. 条件与第 **1776** 题相同, 但管道的横截面为矩形, 矩形的底长 a 比高 $2b$ 要大得多. 这时在点 $M(x, y)$ 处的流速为

$$v = \frac{p}{2\mu l}[b^2 - (b - y)^2],$$

试确定液体的**流量** Q.

1778**. 当研究汽车的动力特性时, 经常采用构造如此专门形式的图表: 在横轴上放置速度 v, 而在纵轴上放置相应加速度 a 的倒数. 证明: 由此曲线弧与垂直线 $v = v_1$, $v = v_2$ 和横轴所围成的图形面积, 在数量上正好等于汽车行驶速度从 v_1 增加到 v_2 所需要的时间 (增速时间).

1779. 重量为 Q、长度为 l 的水平梁, 在垂直向下、按长度均匀分布的负荷与垂直向上的支点反作用力 A 和 B 作用下处于平衡 $\left(A = B = \dfrac{Q}{2}\right)$. 求出梁截面 x 处的弯曲

力矩 M_x, 亦即作用在梁的一部分 AP 上所有力关于以 x 为横坐标的点 P 的力矩.

1780. 长度为 l 的水平梁, 在支点反作用力 A 和 B 以及按梁长度分布强度 $q=kx$ 的负载作用下处于平衡, 其中 x 为到左边支点的距离, k 为常系数. 求出在截面 x 处的弯曲力矩 M_x.

注 单位长度的负载 (力) 称为负载的分布强度.

1781*. 正弦交流电流

$$I = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \varphi\right)$$

通过电阻为 R 的导体, 求出它在一个周期 T 中所产生的热量. 其中 I_0 为交流电流的振幅, t 为时间, φ 为相位角.

第六章　多元函数

§1. 基本概念

1°. **多元函数的概念. 函数的表示法.** 称变量 z 为两个变量 x, y 的单值函数, 如果从给定区域中每一组值 (x, y), 总对应着唯一确定的值 z. 变量 x, y 称为**自变量**或者**独立变量**. 这样的函数依赖关系表示成

$$z = f(x, y), \text{ 或者 } z = F(x, y) \text{ 等等.}$$

类似地定义三个和更多自变量的函数.

例 1　将圆锥体的体积 V 表示成它的母线长 x 和底面半径 y 的函数.

解　从几何上知道, 圆柱体的体积等于

$$V = \frac{1}{3}\pi y^2 h,$$

其中 h 为圆锥体的高. 但是 $h = \sqrt{x^2 - y^2}$. 于是

$$V = \frac{1}{3}\pi y^2 \sqrt{x^2 - y^2}.$$

这就是所要求的函数关系.

函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(a, b)$ 处, 亦即当 $x = a$ 和 $y = b$ 时的值表示成 $f(a, b)$ 或者 $f(P)$. 在直角坐标系下, 函数 $z = f(x, y)$ 的几何图像, 一般来说, 是某个曲面 (图 63).

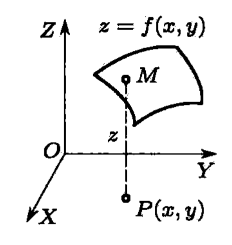


图 63

例 2　如果 $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$, 试求出 $f(2, -3)$ 和 $f\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$.

解　代入 $x = 2$ 和 $y = -3$ 之后, 我们求得

$$f(2, -3) = \frac{2^2 + (-3)^2}{2 \cdot 2 \cdot (-3)} = -\frac{13}{12}.$$

代入 $x=1$ 之后, 再用 $\frac{y}{x}$ 代替 y, 我们就有

$$f(1,\frac{y}{x})=\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\cdot 1\cdot\left(\frac{y}{x}\right)}=\frac{x^2+y^2}{2xy},$$

亦即 $f\left(1,\frac{y}{x}\right)=f(x,y)$.

2°. **函数的存在区域**. 所谓函数 $z=f(x,y)$ 的**存在 (定义) 区域**理解为 XOY 平面上点 (x,y) 的集合, 在这个集合中, 给定函数有定义 (亦即取确定的实值). 在最简单的情况下, 函数的存在区域就是坐标平面 XOY 上由一条或者几条曲线 (区域的边界) 围成的有限或者无限部分.

类似地, 对于三元函数 $u=f(x,y,z)$, 函数的存在区域是三维空间 $O-XYZ$ 中的某个立体.

例 3 求出函数

$$z=\frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

的存在区域.

解 如果 $4-x^2-y^2>0$, 亦即 $x^2+y^2<4$, 则函数有实值. 而满足最后这个不等式的坐标点是位于以坐标原点为中心、以 2 为半径的圆内. 于是函数的存在区域就是这个圆的内部 (图 64).

例 4 求出函数

$$z=\arcsin\frac{x}{2}+\sqrt{xy}$$

的存在区域.

解 函数的第一项当 $-1\leqslant\frac{x}{2}\leqslant 1$, 亦即 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 有定义. 如果 $xy\geqslant 0$, 亦即在如下两种情况下: $\begin{cases}x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0\end{cases}$ 或者 $\begin{cases}x\leqslant 0,\\ y\leqslant 0\end{cases}$ 时, 第二项有实数值.

整个函数的存在区域描绘在图 65 上, 且包括区域的边界.

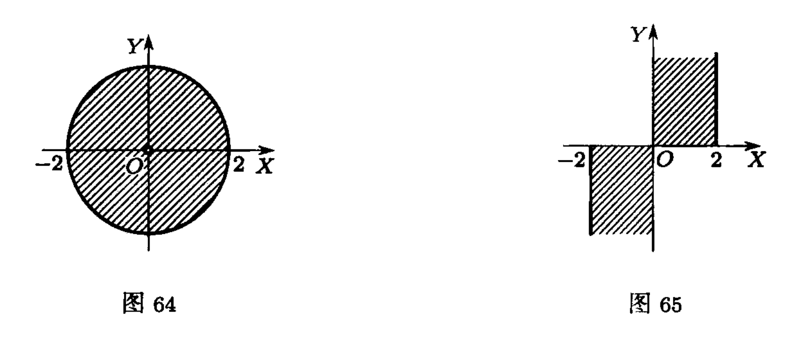


图 64　　图 65

3°. **函数的等位线和等位面**. 称在平面 XOY 上使得 $f(x,y)=C$ 的曲线为函数

$z = f(x, y)$ 的**等位线**, 在它上面的点处, 函数取相同的值 $z = C$ (通常在平面图上用记号注明).

称在三维空间中使得 $f(x, y, z) = C$ 的曲面为三元函数 $u = f(x, y, z)$ 的**等位面**, 在它上面的点处, 函数取常数值 $u = C$.

例 5 作出函数 $z = x^2 y$ 的等位线.

解 等位线方程取 $x^2 y = C$ 的形式, 或者写成 $y = \frac{C}{x^2}$. 令 $C = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, 我们得到一族等位线 (图 66).

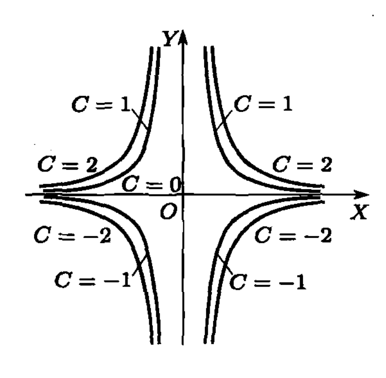


图 66

1782. 将正四棱锥体的体积 V 表示成它的高 x 和侧棱长 y 的函数.

1783. 将正六棱台的体积表示成它的两个底面边长 x 和 y 以及高 z 的函数.

1784. 如果

$$f(x, y) = xy + \frac{x}{y},$$

求出 $f\left(\frac{1}{2}, 3\right), f(1, -1)$.

1785. 如果

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2xy},$$

求出 $f(y, x), f(-x, -y), f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right), \frac{1}{f(x, y)}$.

1786. 求出函数

$$f(x, y) = 1 + x - y$$

在抛物线 $y = x^2$ 上点的值, 并作出函数

$$F(x) = f(x, x^2)$$

的图形.

1787. 求出函数

$$z = \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{1 - x^2 - y^2}$$

在圆周 $x^2 + y^2 = R^2$ 上点的值.

1788*. 如果

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} \quad (xy > 0),$$

确定 $f(x)$.

1789*. 如果

$$f(x + y, x - y) = xy + y^2,$$

求出 $f(x,y)$.

1790*. 假设 $z=\sqrt{z}+f(\sqrt{x}-1)$. 如果当 $y=1$ 时有 $z=x$, 试确定函数 f 和 z.

1791**. 假设 $z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$. 如果当 $x=1$ 时有 $z=\sqrt{1+y^2}$, 试确定函数 f 和 z.

1792. 求下列函数的存在区域并画出图来:

a) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$;　b) $z=1+\sqrt{-(x-y)^2}$;

c) $z=\ln(x+y)$;　d) $z=x+\arccos y$;

e) $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$;　f) $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$;

g) $z=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-y^2}$;　h) $z=\sqrt{(x^2+y^2-a^2)(2a^2-x^2-y^2)}$ $(a>0)$;

i) $z=\sqrt{y\sin x}$;　j) $z=\ln(x^2+y)$;

k) $z=\arctan\dfrac{x-y}{1+x^2y^2}$;　l) $z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$;

m) $z=\dfrac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}$;　n) $z=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{y}$;

o) $z=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$.

1793. 求出下列三元函数的存在区域:

a) $u=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$;　b) $u=\ln(xy_2)$;

c) $u=\arcsin x+\arcsin y+\arcsin z$;　d) $u=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$.

1794. 作出给定函数的等位线, 并阐明用这些函数所描绘曲面的特性:

a) $z=x+y$;　b) $z=x^2+y^2$;　c) $z=x^2-y^2$;

d) $z=\sqrt{xy}$;　e) $z=(1+x+y)^2$;　f) $z=1-|x|-|y|$;

g) $z=\dfrac{y}{x^2}$;　h) $z=\dfrac{y}{\sqrt{x}}$;　i) $z=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$.

1795. 求出下列函数的等位线:

a) $z=\ln(x^2+y)$;　b) $z=\arcsin(xy)$;

c) $z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$;　d) $z=f(y-ax)$;

e) $z=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

1796. 求出下列三元函数的等位面:

a) $u=x+y+z$;　b) $u=x^2+y^2+z^2$;　c) $u=x^2+y^2-z^2$.

§2. 连续性

1°. **函数的极限**. 称数 A 为当点 $P'(x,y)$ 趋于点 $P(a,b)$ 时函数 $z=f(x,y)$ 的极限, 如果对任意的 $\varepsilon>0$, 总存在这样的 $\delta>0$ 使得当 $0<\rho<\delta$ 时有不等式

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立, 其中 $\rho=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ 为点 P 和 P' 之间的距离.

在这种情况下就记作

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=A.$$

2°. **连续性和不连续点**. 称函数 $z=f(x,y)$**在点** $P(a,b)$ **处连续**, 如果

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=f(a,b).$$

一个函数在某个区域的所有点处都连续, 就称它**在这个区域中连续**.

对于函数 $f(x,y)$ 的连续性条件被破坏可能出现在个别点处 (**孤立间断点**), 也可能由一条或者几条曲线组成的点 (**间断线**), 有时候还有更复杂的几何形状.

例 1 求出函数

$$z=\frac{xy+1}{x^2-y}$$

的间断点.

解 如果函数中的分母变成零, 那么它就失去了意义. 然而 $x^2-y=0$ 或者 $y=x^2$ 是抛物线方程. 因此所给函数有间断线抛物线 $y=x^2$.

1797*. 求出下列函数的极限:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}$;

b) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$;

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin(xy)}{x}$;

d) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to k}}\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^x$;

e) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x}{x+y}$;

f) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

1798. 研究函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2-y^2}, & 当\ x^2+y^2\leqslant 1,\\ 0, & 当\ x^2+y^2>1\end{cases}$$

的连续性.

1799. 求出下列函数的间断点:

a) $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$;

b) $z=\dfrac{1}{(x-y)^2}$;

c) $z=\dfrac{1}{1-x^2-y^2}$;

d) $z=\cos\dfrac{1}{xy}$.

1800*. 证明: 函数

$$z=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & 当\ x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & 当\ x=y=0\end{cases}$$

对 x 和 y 中每一个单独的变量都是连续的, 但是在点 $(0,0)$ 处对这两个变量整体却不连续.

§3. 偏导数

1°. **偏导数的定义**. 如果 $z=f(x,y)$, 那么例如, 令 y 为常量, 我们得到导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=f'_x(x,y),$$

就称这个为函数 z 对变量 x 的**偏导数**.类似地, 定义和表示函数 z 对变量 y 的偏导数. 显然, 为了求得偏导数, 可以利用通常的求导公式.

例 1 求函数

$$z=\ln\tan\frac{x}{y}$$

的偏导数.

解 把 y 看成常量之后, 我们得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\tan\dfrac{x}{y}}\frac{1}{\cos^2\dfrac{x}{y}}\frac{1}{y}=\frac{2}{y\sin\dfrac{2x}{y}}.$$

类似地, 将 x 看成常量, 我们就有

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\tan\dfrac{x}{y}}\frac{1}{\cos^2\dfrac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{2x}{y^2\sin\dfrac{2x}{y}}.$$

例 2 求三元函数

$$u=x^3y^2z+2x-3y+z+5$$

的偏导数.

解

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2y^2z+2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2x^3yz-3,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x^3y^2+1.$$

2°. **欧拉定理**. 称函数 $f(x,y)$ 为 n **次齐次**函数, 如果对于任意的实数因子 k, 都有等式

$$f(kx,ky)\equiv k^nf(x,y)$$

成立. 有理整函数是齐次的, 如果它所有的项都有同样的次数.

对于 n 次齐次可微函数成立如下关系式 (**欧拉定理**):

$$xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)=nf(x,y).$$

求出下列函数的偏导数:

1801. $z=x^3+y^3-3axy$.

1802. $z=\dfrac{x-y}{x+y}$.

1803. $z=\dfrac{y}{x}$.

1804. $z=\sqrt{x^2-y^2}$.

1805. $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

1806. $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$.

1807. $z=\arctan\dfrac{y}{x}$.

1808. $z=x^y$.

1809. $z=e^{\sin\frac{y}{x}}$.

1810. $z=\arcsin\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$.

1811. $z=\ln\sin\dfrac{x+a}{\sqrt{y}}$.

1812. $z=(xy)^z$.

1813. $u=z^{xy}$.

1814. 如果 $f(x,y)=\sqrt{xy+\dfrac{x}{y}}$, 求出 $f'_x(2,1)$ 和 $f'_y(2,1)$.

1815. 如果

$$f(x,y,z)=\ln(xy+z),$$

求出 $f'_x(1,2,0), f'_y(1,2,0), f'_z(1,2,0)$.

验证关于齐次函数的欧拉定理 (第 **1816—1819** 题):

1816. $f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2$.

1817. $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

1818. $f(x,y)=\dfrac{x+y}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$.

1819. $z=\ln\dfrac{y}{x}$.

1820. 求出 $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{r}\right)$, 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

1821. 如果 $x=r\cos\varphi$ 和 $y=r\sin\varphi$, 试计算 $\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix}$.

1822. 如果

$$z=\ln(x^2+xy+y^2),$$

证明: $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2$.

1823. 如果

$$z=xy+xe^{\frac{y}{x}},$$

证明: $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy+z$.

1824. 如果

$$u=(x-y)(y-z)(z-x),$$

证明: $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$.

1825. 如果

$$u=x+\frac{x-y}{y-z},$$

证明: $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=1$.

1826. 如果

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2},$$

求出 $z=z(x,y)$.

1827. 已知

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x^2+y^2}{x} \text{ 和当 } x=1 \text{ 时 } z(x,y)=\sin y,$$

求出 $z=z(x,y)$.

1828. 经过曲面 $z=2x^2+y^2$ 上的点 $M(1,2,6)$, 作出分别平行于坐标面 XOZ 和 YOZ 的平面. 确定两平面与曲面相截所得的两条截线的公共点 M 作出的两条切线与坐标轴的交角.

1829. 底边长为 a,b 和高为 h 的梯形面积等于 $S=\frac{1}{2}(a+b)h$. 求出 $\frac{\partial S}{\partial a},\frac{\partial S}{\partial b},\frac{\partial S}{\partial h}$, 并利用作图说明它们的几何意义.

1830*. 证明: 函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{如果 } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{如果 } x=y=0\end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 处有偏导数 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$, 虽然它在这一点处是不连续的. 作出这个函数在点 $(0,0)$ 附近的图像.

§4. 函数的全微分

1°. **函数的全增量**. 称差

$$\Delta z=\Delta f(x,y)=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

为函数 $z=f(x,y)$ 的**全增量**.

2°. **函数的全微分**. 称全增量 Δz 关于自变量增量 Δx 和 Δy 的线性主要部分为函数 $z=f(x,y)$ 的**全微分**.

函数的全增量与全微分之间的差, 与 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 相比是一个高阶无穷小量.

显然, 在其偏导数连续的情况下, 函数有全微分. 如果函数有全微分, 那么就称它是**可微的**. 作为定义, 自变量的微分与它的增量是一样的, 亦即 $dx=\Delta x$ 和 $dy=\Delta y$. 函数 $z=f(x,y)$ 的全微分用公式

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

进行计算. 类似地, 三元函数 $u=f(x,y,z)$ 的全微分用公式

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$$

进行计算.

例 1 求函数

$$f(x,y)=x^2+xy-y^2$$

的全增量和全微分.

解 $f(x+\Delta x,y+\Delta y)=(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)(y+\Delta y)-(y+\Delta y)^2$,

$$\begin{aligned}\Delta f(x,y)&=[(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)(y+\Delta y)-(y+\Delta y)^2]-(x^2+xy-y^2)\\&=2x\cdot\Delta x+\Delta x^2+x\cdot\Delta y+y\cdot\Delta x+\Delta x\cdot\Delta y-2y\cdot\Delta y-\Delta y^2\\&=[(2x+y)\Delta x+(x-2y)\Delta y]+(\Delta x^2+\Delta x\cdot\Delta y-\Delta y^2).\end{aligned}$$

这里表达式 $df=(2x+y)\Delta x+(x-2y)\Delta y$ 就是函数的全微分, 而 $(\Delta x^2+\Delta x\cdot\Delta y-\Delta y^2)$ 与无穷小量 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 相比, 是一个更高阶的无穷小量.

例 2 求出函数

$$z=\sqrt{x^2+y^2}$$

的全微分.

解
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$dz=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3°. **函数全微分对近似计算的应用**. 当 $|\Delta x|$ 和 $|\Delta y|$ 都充分小时, 也就是当 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 充分小时, 对于可微函数 $z=f(x,y)$ 有近似等式 $\Delta z\approx dz$ 或者

$$\Delta z\approx\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

成立.

例 3 圆锥的高 $H=30$ cm, 底面半径 $R=10$ cm. 如果 H 增加 3 mm, 而 R 减小 1 mm, 那么圆锥的体积将如何改变呢?

解 圆锥的体积等于 $V=\frac{1}{3}\pi R^2H$. 体积的改变量可用微分来近似代替:

$$\begin{aligned}\Delta V\approx dV&=\frac{1}{3}\pi(2RHdR+R^2dH)\\&=\frac{1}{3}\pi(-2\cdot10\cdot30\cdot0.1+100\cdot0.3)=-10\pi\approx-31.4\ (\text{cm}^3).\end{aligned}$$

例 4 近似地计算 $1.02^{3.01}$.

解 我们考虑函数 $z=x^y$. 所求数量可以认为是这个函数当 $x=1,y=3,\Delta x=0.02,\Delta y=0.01$ 时的增加值. 函数最初的值 $z=1^3=1$,

$$\Delta z\approx dz=yx^{y-1}\Delta x+x^y\ln x\Delta y=3\cdot1\cdot0.02+1\cdot\ln1\cdot0.01=0.06,$$

于是, $1.02^{3.01}\approx1+0.06=1.06$.

1831. 对于函数 $f(x,y)=x^2y$, 求出它在点 $(1,2)$ 处的全增量和全微分; 如果:

a) $\Delta x=1,\ \Delta y=2$; b) $\Delta x=0.1,\ \Delta y=0.2$,

比较它们的全增量与全微分之差.

1832. 证明: 对于多个 (例如两个) 变量的函数 u 和 v, 通常的微分法则

a) $d(u+v)=du+dv$;

b) $d(uv)=vdu+udv$;

c) $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$

也正确.

求下列函数的全微分:

1833. $z=x^3+y^3-3xy$.

1834. $z=x^2y^3$.

1835. $z=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

1836. $z=\sin^2 x+\cos^2 y$.

1837. $z=yx^y$.

1838. $z=\ln(x^2+y^2)$.

1839. $f(x,y)=\ln\left(1+\frac{x}{y}\right)$.

1840. $z=\arctan\frac{y}{x}+\arctan\frac{x}{y}$.

1841. $z=\ln\tan\frac{y}{x}$.

1842. 如果 $f(x,y)=\frac{x}{y^2}$,求出 $df(1,1)$.

1843. $u=xyz$.

1844. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

1845. $u=\left(xy+\frac{x}{y}\right)^z$.

1846. $u=\arctan\frac{xy}{z^2}$.

1847. 如果 $f(x,y,z)=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 求出 $df(3,4,5)$.

1848. 矩形的一条边 $a=10$ cm, 而另一条边 $b=24$ cm. 如果边 a 增长了 4 mm, 而边 b 缩短了 1 mm, 那么矩形的对角线长度如何改变呢? 求出近似改变量, 并与精确值进行比较.

1849. 用厚度为 2 mm 的三合板做成一个封闭的矩形匣子, 其外部尺寸为 10 cm, 8 cm 和 6 cm. 近似地确定在这个匣子上所耗材料的体积.

1850*. 圆扇形的中心角等于 $80°$, 半径等于 20 cm. 现在要将中心角减小 $1°$, 为了使得它的面积保持不变, 扇形的半径应当伸长多少呢?

1851. 近似算出:

a) $(1.02)^3\cdot(0.97)^2$; b) $\sqrt{(4.05)^2+(2.93)^2}$; c) $\sin 32°\cdot\cos 59°$

(当把度数转换成弧度以及当计算 $\sin 60°$ 时, 取三位的有效数字, 最后一位数字四舍五入).

1852. 证明: 乘积的相对误差近似地等于各因子相对误差的和.

1853. 当测量三角形土地 ABC 时, 得到如下数据: 边 $a=(100\pm 2)$ m, 边 $b=(200\pm 3)$ m, 角 $C=(60\pm 1)°$. 那么由此算出边 c 时可以得到怎样的精确度呢?

1854. 单摆的振动周期 T 用公式

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

进行计算, 其中 l 为单摆的长度, g 为重力加速度. 根据在测量 l 和 g 时产生的小误差

$\Delta l = \alpha$ 和 $\Delta g = \beta$, 求出在确定 T 时所得到的误差.

1855. 点 $P_0(x_0, y_0)$ 与 $P(x, y)$ 之间的距离等于 ρ, 而向量 $\overrightarrow{P_0P}$ 与 OX 轴的夹角等于 α. 如果固定点 P_0, 而让点 P 处于 $P_1(x + dx, y + dy)$ 位置, 那么角 α 会如何变化呢?

§5. 复合函数的微分法

1°. **一个自变量的情形**. 如果 $z = f(x, y)$ 是自变量 x 和 y 的可微函数, 而 x 和 y 又是自变量 t 的可微函数:

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

那么复合函数 $z = f[\varphi(t), \psi(t)]$ 的导数可以用公式

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{1}$$

进行计算.

特别地, 如果 t 与自变量之一 (例如 x) 重合, 那么函数 z 对 x 的 “全” 导数为

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{2}$$

例 1 如果

$$z = e^{3x+2y}, \quad 其中\ x = \cos t,\ y = t^2,$$

求出 $\dfrac{dz}{dt}$.

解 按照公式 (1), 我们有

$$\frac{dz}{dt} = e^{3x+2y} \cdot 3(-\sin t) + e^{3x+2y} \cdot 2 \cdot 2t = e^{3x+2y}(4t - 3\sin t)$$
$$= e^{3\cos t + 2t^2}(4t - 3\sin t).$$

例 2 如果

$$z = e^{xy}, \quad 其中\ y = \varphi(x),$$

求出偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和全导数 $\dfrac{dz}{dx}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}$. 根据公式 (2), 我们得到

$$\frac{dz}{dx} = ye^{xy} + xe^{xy}\varphi'(x).$$

2°. **多个自变量的情形**. 如果 z 是几个自变量的复合函数, 例如 $z = f(x, y)$, 这里 $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$ (u 和 v 为自变量, f, φ, ψ 为可微函数), 那么 z 对 u 和 v 的偏导数即可表示成

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \tag{3}$$

和

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{4}$$

在所有被考虑的情况下, 公式

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

总是正确的 (**全微分的不变性**).

例 3 如果

$$z = f(x, y), \quad \text{其中 } x = uv,\ y = \frac{u}{v},$$

求出 $\frac{\partial z}{\partial u}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial v}$.

解 应用公式 (3) 和 (4), 我们得到

$$\frac{\partial z}{\partial u} = f'_x(x, y)v + f'_y(x, y)\frac{1}{v}$$

和

$$\frac{\partial z}{\partial v} = f'_x(x, y)u - f'_y(x, y)\frac{u}{v^2}.$$

例 4 证明: 函数 $z = \varphi(x^2 + y^2)$ 满足方程 $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

解 由于函数 φ 通过中间变量 $t = x^2 + y^2$ 而依赖于 x 和 y, 所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{dt}\frac{\partial t}{\partial x} = \varphi'(x^2 + y^2)2x$$

和

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{dt}\frac{\partial t}{\partial y} = \varphi'(x^2 + y^2)2y.$$

将偏导数代入方程的左端, 我们有

$$\begin{aligned} y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} &= y\varphi'(x^2 + y^2)2x - x\varphi'(x^2 + y^2)2y \\ &= 2xy\varphi'(x^2 + y^2) - 2xy\varphi'(x^2 + y^2) \equiv 0. \end{aligned}$$

亦即函数 z 满足给定方程.

1856. 如果

$$z = \frac{x}{y}, \quad \text{其中 } x = e^t,\ y = \ln t,$$

求出 $\frac{dz}{dt}$.

1857. 如果

$$u = \ln\sin\frac{x}{\sqrt{y}}, \quad \text{其中 } x = 3t^2,\ y = \sqrt{t^2 + 1},$$

求出 $\frac{du}{dt}$.

1858. 如果

$$u = xyz, \quad \text{其中 } x = t^2 + 1,\ y = \ln t,\ z = \tan t,$$

求出 $\frac{du}{dt}$.

1859. 如果

$$u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \text{其中 } x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = H,$$

求出 $\frac{du}{dt}$.

1860. 如果

$$z = u^v, \quad \text{其中 } u = \sin x,\ v = \cos x,$$

求出 $\frac{dz}{dx}$.

1861. 如果

$$z = \arctan\frac{y}{x} \quad \text{和} \quad y = x^2,$$

求出 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{dz}{dx}$.

1862. 如果

$$z = x^y, \quad \text{其中 } y = \varphi(x),$$

求出 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{dz}{dx}$.

1863. 如果

$$z = f(u, v), \quad \text{其中 } u = x^2 - y^2,\ v = e^{xy},$$

求出 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

1864. 如果

$$z = \arctan\frac{x}{y}, \quad \text{其中 } x = u\sin v,\ y = u\cos v,$$

求出 $\frac{\partial z}{\partial u}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial v}$.

1865. 如果

$$z = f(u), \quad \text{其中 } u = xy + \frac{y}{x},$$

求出 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

1866. 证明: 如果

$$u = \Phi(x^2 + y^2 + z^2),$$

其中 $x = R\cos\varphi\cos\psi$, $y = R\cos\varphi\sin\psi$, $z = R\sin\varphi$, 那么

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0 \text{ 和 } \frac{\partial u}{\partial \psi} = 0.$$

1867. 如果

$$u = f(x, y, z), \quad \text{其中 } y = \varphi(x),\ z = \psi(x, y),$$

求出 $\frac{du}{dx}$.

1868. 证明: 如果

$$z = f(x + ay),$$

这里 f 是可微函数, 那么

$$\frac{\partial z}{\partial y} = a\frac{\partial z}{\partial x}.$$

1869. 证明: 函数

$$w = f(u, v), \quad 其中\ u = x + at,\ v = y + bt,$$

满足方程

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y}.$$

1870. 证明: 函数

$$z = y\varphi(x^2 - y^2)$$

满足方程

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

1871. 证明: 函数

$$z = xy + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

满足方程

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

1872. 证明: 函数

$$z = e^y\varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$$

满足方程

$$(x^2 - y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = xyz.$$

1873. 矩形的一条边 $x = 20$ m 以 5 m/s 的速度增大, 而另一条边 $y = 30$ m 以 4 m/s 的速度减小. 试问矩形的周长和面积以怎样的速度变动?

1874. 质点的运动方程为

$$x = t, \qquad y = t^2, \qquad z = t^3.$$

试问: 这个质点与坐标原点的距离以怎样的速度增大?

1875. 两艘机动船同时从地点 A 出发, 一艘向北航行, 另一艘向东北航行. 机动船的速度分别为 20 km/h 和 40 km/h. 它们之间的距离以怎样的速度增大?

§6. 函数在给定方向上的导数和梯度

1°. **函数在给定方向上的导数.** 称

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{P_1P \to 0} \frac{f(P_1) - f(P)}{P_1P}$$

为函数 $z = f(x, y)$ **在给定方向** $\mathbf{l} = \overrightarrow{PP_1}$ **上的导数**, 其中 $f(P)$ 和 $f(P_1)$ 是函数在点 P 和 P_1 处的值. 如果函数 z 可微, 那么公式

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha \tag{1}$$

成立, 其中 α 为向量 $\mathbf{l}$ 与 OX 轴的夹角 (图 67).

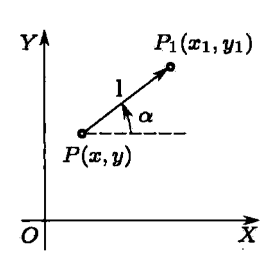


图 67

类似地定义三个自变量的函数 $u = f(x, y, z)$ 在给定方向 $\mathbf{l}$ 上的导数. 在这种情况下有

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \tag{2}$$

其中 α, β, γ 是方向 $\mathbf{l}$ 与相应坐标轴之间的夹角. 在给定方向上的导数描述了函数在这个方向上的变化率.

例 1 求出函数 $z = 2x^2 - 3y^2$ 在点 $P(1, 0)$ 处沿着与 OX 轴成 $120°$ 角方向上的导数.

解 我们首先求出给定函数的偏导数及其在点 P 处的值:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x, \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = 4,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -6y, \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = 0.$$

其次有

$$\cos\alpha = \cos 120° = -\frac{1}{2},$$

$$\sin\alpha = \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

应用公式 (1), 我们得到

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 4\left(-\frac{1}{2}\right) + 0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -2.$$

负号说明: 在给定点处和沿给定方向上, 函数是递减的.

2°. **函数的梯度**. 称这样的向量: 它在坐标轴上的投影就是对应于给定函数 $z = f(x, y)$ 的偏导数

$$\operatorname{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j}, \tag{3}$$

为函数 $z = f(x, y)$ 的**梯度**. 给定函数在方向 $\mathbf{l}$ 上的导数与该函数的梯度之间有如下关系:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \operatorname{pr}_{\mathbf{l}}\operatorname{grad} z,$$

亦即在给定方向上的导数等于函数的梯度在求导方向上的投影.

函数在每一点的梯度都指向函数过该点相应等位线的法线方向. 函数在给定点处梯度的方向就是函数在该点处最大增长速度的方向. 亦即当 $\mathbf{l} = \operatorname{grad} z$ 时, 方向导数 $\frac{\partial z}{\partial l}$ 取等于

$$\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

的最大值. 类似地, 定义三元函数 $u = f(x, y, z)$ 的梯度

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}.$$

三元函数在每一点处的梯度都指向函数经过该点等位面的法线方向.

例 2　求出和作出函数 $z = x^2y$ 在点 $P(1,1)$ 处的梯度.

解　计算给定函数的偏导数及其在点 P 处的值:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy, \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = 2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2, \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = 1.$$

于是, $\operatorname{grad} z = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ (图 68).

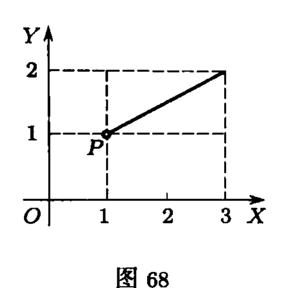


图 68

1876. 求出函数 $z = x^2 - xy - 2y^2$ 在点 $P(1,2)$ 处沿着与 OX 轴成 60° 夹角方向上的导数.

1877. 求出函数 $z = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$ 在点 $M(1,2)$ 处沿着从这点到点 $N(4,6)$ 的方向导数.

1878. 求出函数 $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ 在点 $P(1,1)$ 处沿着第一象限的角平分线方向上的导数.

1879. 求出函数 $u = x^2 - 3yz + 5$ 在点 $M(1,2,-1)$ 处沿着与各坐标轴成相同夹角方向上的导数.

1880. 求出函数 $u = xy + yz + zx$ 在点 $M(2,1,3)$ 处沿着从这点到点 $N(5,5,15)$ 的方向导数.

1881. 求出函数 $u = \ln(e^x + e^y + e^z)$ 在坐标原点处沿着与坐标轴 OX, OY, OZ 分别成 α, β, γ 夹角的方向导数.

1882. 使得函数在任意方向上的导数都等于零的点称为这个函数的**驻点**. 求出下列函数的驻点:

a) $z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$;

b) $z = x^3 + y^3 - 3xy$;

c) $u = 2y^2 + z^2 - xy - yz + 2x$.

1883. 证明: 函数 $z = \dfrac{y^2}{x}$ 在椭圆曲线 $2x^2 + y^2 = C^2$ 上的任一点处沿着椭圆在该点法线方向的导数等于零.

1884. 如果

$$z = x^3 + y^3 - 3xy,$$

求出在点 $(2,1)$ 处的 $\operatorname{grad} z$.

1885. 如果

$$z = \sqrt{x^2 - y^2},$$

求出在点 $(5,3)$ 处的 $\operatorname{grad} z$.

1886. 如果 $u = xyz$, 求出在点 $(1,2,3)$ 处的 $\operatorname{grad} u$.

1887. 如果

$$u = x^2 + y^2 + z^2,$$

求出在点 $(2, -2, 1)$ 处 $\operatorname{grad} z$ 的模和方向.

1888. 求出函数 $z = \ln \frac{y}{x}$ 在点 $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ 和点 $B(1, 1)$ 处的梯度之间的夹角.

1889. 求出曲面

$$z = x^2 + 4y^2$$

在点 $(2, 1, 8)$ 处最大上升坡度.

1890. 作出下列函数的梯度向量场:

a) $z = x + y$;　　b) $z = xy$;

c) $z = x^2 + y^2$;　　d) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

§7. 高阶导数和高阶微分

1°. **高阶偏导数.** 将函数 $z = f(x, y)$ 的一阶偏导数再求偏导数就称为函数 $z = f(x, y)$ 的**二阶偏导数.**

对于二阶偏导数, 通常利用如下记号:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y) \text{ 等等.}$$

类似地定义和表示高于二阶的偏导数.

如果必须继续不断地计算偏导数, 那么**多次求导的结果并不依赖于求导的顺序.**

例 1 求出函数

$$\arctan \frac{x}{y}$$

的二阶偏导数.

解 我们首先求出一阶偏导数:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

其次我们再求偏导:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{1\cdot(x^2+y^2)-2y\cdot y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

我们注意到这个所谓“混合”偏导数可以用另一种办法求出, 也就是

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{1\cdot(x^2+y^2)-2x\cdot x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

2°. **高阶微分**. 从函数 $z=f(x,y)$ 的 (一阶) 微分再求微分就称为这个函数的**二阶微分**

$$d^2z=d(dz).$$

类似地定义函数 z 高于二阶的微分, 例如

$$d^3z=d(d^2z)$$

以及, 一般地, 有

$$d^nz=d(d^{n-1}z).$$

如果 $z=f(x,y)$, 这里 x 和 y 为自变量, 而函数 f 有连续的二阶偏导数, 那么函数 z 的二阶微分用公式

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 \tag{1}$$

进行计算.

一般来说, 当相应的导数存在时, 符号公式

$$d^nz=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z$$

是正确的, 其中展开式是按二项式规律进行形式展开的.

如果 $z=f(x,y)$, 其中自变量 x 和 y 是一个或者几个自变量的函数, 那么

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial z}{\partial x}d^2x+\frac{\partial z}{\partial y}d^2y. \tag{2}$$

如果 x 和 y 都是自变量, 那么有 $d^2x=0, d^2y=0$, 从而公式 (2) 等同于公式 (1).

例 2 求出函数

$$z=2x^2-3xy-y^2$$

的一阶和二阶全微分.

解 第一种方法. 我们有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4x-3y,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-3x-2y.$$

所以

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=(4x-3y)dx-(3x+2y)dy.$$

其次

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$$

由此得出

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 = 4dx^2 - 6dxdy - 2dy^2.$$

第二种方法. 我们求出微分

$$dz = 4xdx - 3(ydx + xdy) - 2ydy = (4x - 3y)dx - (3x + 2y)dy.$$

再一次微分, 并注意到 dx 和 dy 不依赖于 x 和 y, 我们得到

$$d^2 z = (4dx - 3dy)dx - (3dx + 2dy)dy = 4dx^2 - 6dxdy - 2dy^2.$$

1891. 如果

$$z = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}},$$

求出 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

1892. 如果

$$z = \ln(x^2 + y),$$

求出 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

1893. 如果

$$z = \sqrt{2xy + y^2},$$

求出 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

1894. 如果

$$z = \arctan\frac{x + y}{1 - xy},$$

求出 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

1895. 如果

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

求出 $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$.

1896. 求出函数

$$u = xy + yz + zx$$

的所有二阶偏导数.

1897. 如果

$$u = x^\alpha y^\beta z^\gamma,$$

求出 $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.

1898. 如果

$$z = \sin(xy),$$

求出 $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$.

1899. 如果

$$f(x,y) = (1+x)^m(1+y)^n,$$

求出 $f''_{xx}(0,0), f''_{xy}(0,0), f''_{yy}(0,0)$.

1900. 如果

$$z = \arcsin\sqrt{\frac{x-y}{x}},$$

证明: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

1901. 如果

$$z = x^y,$$

证明: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

1902*. 证明: 对于函数

$$f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

及补充条件 $f(0,0)=0$, 我们有

$$f''_{xy}(0,0) = -1, \qquad f''_{yx}(0,0) = +1.$$

1903. 如果

$$z = f(u,v),$$

其中 $u = x^2+y^2, v = xy$. 求出 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

1904. 如果

$$u = f(x,y,z), \quad \text{其中 } z = \varphi(x,y),$$

求出 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

1905. 如果

$$z = f(u,v), \quad \text{其中 } u = \varphi(x,y),\ v = \psi(x,y),$$

求出 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

1906. 证明: 函数

$$u = \arctan\frac{y}{x}$$

满足拉普拉斯 (Laplace) 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

1907. 证明: 函数

$$u = \ln\frac{1}{r},$$

其中 $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, 满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

1908. 证明: 函数

$$u(x,t)=A\sin(a\lambda t+\varphi)\sin\lambda x$$

满足弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

1909. 证明: 函数

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}e^{-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{4a^2t}}$$

$(x_0, y_0, z_0, a$ 都是常数) 满足热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

1910. 证明: 函数

$$u=\varphi(x-at)+\psi(x+at),$$

满足弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

其中 φ 和 ψ 为任意二次连续可微函数.

1911. 证明: 函数

$$z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+\psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

满足方程

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

1912. 证明: 函数

$$u=\varphi(xy)+\sqrt{xy}\psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

满足方程

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

1913. 证明: 函数 $z=f[x+\varphi(y)]$ 满足方程

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

1914. 如果

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0,$$

求出 $u=u(x,y)$.

1915. 确定满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

的函数 $u=u(x,y)$ 的形式.

1916. 如果

$$z=e^{xy},$$

求出 d^2z.

1917. 如果

$$u=xyz,$$

求出 d^2u.

1918. 如果

$$z=\varphi(t),\quad \text{其中 } t=x^2+y^2,$$

求出 d^2z.

1919. 如果

$$z=u^v,\quad \text{其中 } u=\frac{x}{y},\ v=xy,$$

求出 dz 和 d^2z.

1920. 如果

$$z=f(u,v),\quad \text{其中 } u=ax,\ v=by,$$

求出 d^2z.

1921. 如果

$$z=f(u,v),\quad \text{其中 } u=xe^y,\ v=ye^x,$$

求出 d^2z.

1922. 如果

$$z=e^x\cos y,$$

求出 d^3z.

1923. 求出函数

$$z=x\cos y+y\sin x$$

的三阶微分, 并确定所有三阶偏导数.

1924. 如果

$$f(x,y)=x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y,$$

求出 $df(1,2)$, 和 $d^2f(1,2)$.

1925. 如果

$$f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-2xy+4xz+2yz,$$

求出 $d^2f(0,0,0)$.

§8. 全微分的积分法

1°. **全微分的条件**. 假设函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 及其一阶偏导数均在单连通区域 D 中连续, 为了使得表达式 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 是某个函数 $u(x,y)$ 在区域 D 中的全微分, 其充要条件是满足

$$\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y}.$$

例 1 验证表达式

$$(2x+y)dx+(x+2y)dy$$

是某个函数的全微分, 并求出这个函数.

解 在给定的情况下, $P=2x+y, Q=x+2y$, 所以 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=1$, 于是

$$(2x+y)dx+(x+2y)dy=du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy,$$

其中 u 为待求的函数.

按照条件, $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+y$, 于是

$$u=\int(2x+y)dx=x^2+xy+\varphi(y).$$

其中 $\varphi(y)$ 为 y 的任意可微函数. 但是, 从另一方面有 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=x+\varphi'(y)=x+2y$. 由此得出 $\varphi'(y)=2y$, $\varphi(y)=y^2+C$, 从而

$$u=x^2+xy+y^2+C.$$

最后得到

$$(2x+y)dx+(x+2y)dy=d(x^2+xy+y^2+C).$$

2°. **三个变量的情形**. 类似地, 表达式

$$P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

是某个函数 $u(x,y,z)$ 在空间单连通区域 D 中的全微分当且仅当在 D 中满足条件

$$\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial z}\equiv\frac{\partial R}{\partial x},$$

其中 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 以及它们自己的一阶偏导数均都是变量 x,y 和 z 在 D 中的连续函数.

例 2 验证: 表达式

$$(3x^2+3y-1)dx+(z^2+3x)dy+(2yz+1)dz$$

是某个函数的全微分, 并求出这个函数.

解 在此有 $P=3x^2+3y-1,\ Q=z^2+3x,\ R=2yz+1$. 这就建立了

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=3,\quad \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}=2z,\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}=0.$$

亦即

$$(3x^2+3y-1)dx+(z^2+3x)dy+(2yz+1)dz=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz,$$

其中 u 为待求函数.

我们有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+3y-1,$$

这就意味着

$$u=\int(3x^2+3y-1)dx=x^3+3xy-x+\varphi(y,z).$$

从另一方面,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=3x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}=z^2+3x,$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}=2yz+1,$$

由此得出 $\frac{\partial\varphi}{\partial y}=z^2$ 和 $\frac{\partial\varphi}{\partial z}=2yz+1$. 问题归结为寻找二元函数 $\varphi(y,z)$, 它的偏导数是已知的, 而且满足全微分条件.

我们来求出 φ:

$$\varphi(y,z)=\int z^2dy=yz^2+\psi(z),$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=2yz+\psi'(z)=2yz+1,$$
$$\psi'(z)=1,\ \text{从而}\ \psi(z)=z+C,$$

亦即 $\varphi(y,z)=yz^2+z+C$. 最后我们得到

$$u=x^3+3xy-x+yz^2+z+C.$$

验证: 下面给出的表达式是某些函数的全微分, 并求出这些函数.

1926. $ydx+xdy$.

1927. $(\cos x+3x^2y)dx+(x^3-y^2)dy$.

1928. $\frac{(x+2y)dx+ydy}{(x+y)^2}$.

1929. $\frac{x+2y}{x^2+y^2}dx-\frac{2x-y}{x^2+y^2}dy$.

1930. $\frac{1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy$.

1931. $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$.

1932. 确定常数 a 和 b 使得表达式

$$\frac{(ax^2+2xy+y^2)dx-(x^2+2xy+by^2)dy}{(x^2+y^2)^2}$$

是某个函数 z 的全微分, 并求出它.

验证: 下面给出的表达式是某些函数的全微分, 并求出这些函数.

1933. $(2x+y+z)dx+(x+2y+z)dy+(x+y+2z)dz$.

1934. $(3x^2+2y^2+3z)dx+(4xy+2y-z)dy+(3x-y-2)dz$.

1935. $(2xyz-3y^2z+8xy^2+2)dx+(x^2z-6xyz+8x^2y+1)dy+(x^2y-3xy^2+3)dz$.

1936. $\left(\frac{1}{y}-\frac{z}{x^2}\right)dx+\left(\frac{1}{z}-\frac{x}{y^2}\right)dy+\left(\frac{1}{x}-\frac{y}{z^2}\right)dx$.

1937. $\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

1938*. 假设力在坐标轴上的投影为

$$X = \frac{y}{(x+y)^2}, \qquad Y = \frac{\lambda x}{(x+y)^2},$$

其中 λ 是常量. 系数 λ 应当是怎样才能使得这个力有势函数呢?

1939. 函数 $f(x,y)$ 应该满足怎样的条件, 才能使得表达式

$$f(x,y)(dx+dy)$$

是全微分呢?

1940. 如果

$$du = f(xy)(ydx + xdy),$$

求出函数 u.

§9. 隐函数的微分法

1°. **一个自变量的情况**. 如果方程 $f(x,y)=0$ 确定 y 作为 x 的函数, 这里 $f(x,y)$ 是变量 x 和 y 的可微函数, 那么所给隐函数的导数在条件 $f'_y(x,y) \neq 0$ 之下可用公式

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)} \tag{1}$$

求出. 高阶导数可用公式 (1) 逐次求导求出.

例 1 如果

$$(x^2+y^2)^3 - 3(x^2+y^2) + 1 = 0,$$

求出 $\dfrac{dy}{dx}$ 和 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解 用 $f(x,y)$ 表示给定方程的左端部分, 我们求出偏导数

$$f'_x(x,y) = 3(x^2+y^2)^2 \cdot 2x - 3 \cdot 2x = 6x[(x^2+y^2)^2 - 1],$$

$$f'_y(x,y) = 3(x^2+y^2)^2 \cdot 2y - 3 \cdot 2y = 6y[(x^2+y^2)^2 - 1].$$

由此应用公式 (1), 我们得到

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)} = -\frac{6x[(x^2+y^2)^2-1]}{6y[(x^2+y^2)^2-1]} = -\frac{x}{y}.$$

为了求出二阶导数, 将已求出的一阶导数对 x 求导, 这时考虑到 y 是 x 的函数, 我们得出

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{y}\right) = -\frac{1 \cdot y - x\dfrac{dy}{dx}}{y^2} = \frac{y - x\dfrac{x}{y}}{y^2} = \frac{y^2+x^2}{y^3}.$$

2°. **多个自变量的情况**. 类似地, 如果方程 $F(x,y,z)=0$ 确定 z 作为自变量 x 和 y 的函数以及 $F'_z(x,y,z) \neq 0$, 这里 $F(x,y,z)$ 是变量 x,y 和 z 的可微函数, 那么所给隐函数的导数可用公式

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} \tag{2}$$

求出. 求函数 z 的偏导数的另一个方法如下: 对方程 $F(x,y,z)=0$ 进行微分, 我们得到

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0,$$

由此可以确定 dz, 从而求得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

例 2　如果

$$x^2-2y^2+3z^2-yz+y=0,$$

求出 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解　第一种方法. 通过用 $F(x,y,z)$ 表示给定方程的左端部分, 我们求出偏导数

$$F'_x(x,y,z)=2x,\quad F'_y(x,y,z)=-4y-z+1,\quad F'_z(x,y,z)=6z-y.$$

应用公式 (2), 我们得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}=-\frac{2x}{6z-y},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}=-\frac{1-4y-z}{6z-y}.$$

第二种方法. 微分给定方程, 我们得到

$$2xdx-4ydy+6zdz-ydz-zdy+dy=0.$$

由此确定 dz, 亦即隐函数的全微分

$$dz=\frac{2xdx+(1-4y-z)dy}{y-6z}.$$

再与公式 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$ 比较之后, 我们得出

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x}{6z-y},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1-4y-z}{6z-y}.$$

3°. **隐函数方程组**. 如果两个方程的方程组

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0,\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases}$$

确定 u 和 v 作为变量 x 和 y 的可微函数, 而且雅可比 (Jacobi) 行列式

$$\frac{D(F,G)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v}\\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0,$$

那么这些函数的微分 (从而及其偏导数) 可以由方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}dx+\dfrac{\partial F}{\partial y}dy+\dfrac{\partial F}{\partial u}du+\dfrac{\partial F}{\partial v}dv=0,\\ \dfrac{\partial G}{\partial x}dx+\dfrac{\partial G}{\partial y}dy+\dfrac{\partial G}{\partial u}du+\dfrac{\partial G}{\partial v}dv=0\end{cases}\tag{3}$$

求出.

例 3　方程组

$$u+v=x+y,\qquad xu+yv=1$$

确定 u 和 v 作为 x 和 y 的函数. 求出 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

解 第一种方法. 将两个方程对 x 求偏导数, 我们得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}=1,$$

$$u+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

由此得出

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{u+y}{x-y},\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{u+x}{x-y}.$$

用类似的方法求出

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{v+y}{x-y},\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{v+y}{x-y}.$$

第二种方法. 我们用微分法求出把所有四个变量的微分联系在一起的两个方程

$$du+dv=dx+dy,$$

$$xdu+udx+ydv+vdy=0.$$

求解这个关于微分 du 和 dv 的方程组, 我们得到

$$du=-\frac{(u+y)dx+(v+y)dy}{x-y},\quad dv=\frac{(u+x)dx+(v+x)dy}{x-y}.$$

由此得出

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{u+y}{x-y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{v+y}{x-y},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{u+x}{x-y},\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{v+y}{x-y}.$$

4°. **函数的参数化问题**. 如果变量 x 和 y 的可微函数 z 是用参数方程

$$x=x(u,v),\qquad y=y(u,v),\qquad z=z(u,v)$$

给出, 而且有

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0,$$

那么这个函数的微分可以从方程组

$$\begin{cases} dx=\dfrac{\partial x}{\partial u}du+\dfrac{\partial x}{\partial v}dv,\\[2mm] dy=\dfrac{\partial y}{\partial u}du+\dfrac{\partial y}{\partial v}dv,\\[2mm] dz=\dfrac{\partial z}{\partial u}du+\dfrac{\partial z}{\partial v}dv \end{cases}\tag{4}$$

求出. 知道了微分 $dz=pdx+qdy$ 之后, 我们即可求出偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=p$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=q$.

例 4 自变量 x 和 y 的函数 z 由方程

$$x=u+v,\qquad y=u^2+v^2,\qquad z=u^3+v^3\ (u\neq v)$$

给出. 求出 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解 第一种方法. 我们用微分法求出把所有五个变量的微分联系在一起的三个方程

$$\begin{cases} dx = du + dv, \\ dy = 2udu + 2vdv, \\ dz = 3u^2du + 3v^2dv. \end{cases}$$

我们从前两个方程确定 du 和 dv:

$$du = \frac{2vdx - dy}{2(v-u)}, \qquad dv = \frac{dy - 2udx}{2(v-u)}.$$

将求出的 du 和 dv 的表达式代入第三个方程:

$$dz = 3u^2\frac{2vdx - dy}{2(v-u)} + 3v^2\frac{dy - 2udx}{2(v-u)} = \frac{6uv(u-v)dx + 3(v^2-u^2)dy}{2(v-u)}$$

$$= -3uvdx + \frac{3}{2}(u+v)dy.$$

由此得出

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -3uv, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2}(u+v).$$

第二种方法. 从第三个给定方程可以求出:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3u^2\frac{\partial u}{\partial x} + 3v^2\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3u^2\frac{\partial u}{\partial y} + 3v^2\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{5}$$

将前两个方程先对 x, 后对 y 求偏导:

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x}, \\ 0 = 2u\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2v\dfrac{\partial v}{\partial x}, \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ 0 = 2u\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2v\dfrac{\partial v}{\partial y}. \end{cases}$$

从第一组方程求得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v}{v-u}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{u}{u-v}.$$

从第二组方程求得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2(u-v)}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2(v-u)}.$$

把这些结果代入公式 (5) 中 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 的表达式, 得到

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3u^2\frac{v}{v-u} + 3v^2\frac{u}{u-v} = -3uv,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3u^2\frac{1}{2(u-v)} + 3v^2\frac{1}{2(v-u)} = \frac{3}{2}(u+v).$$

1941. 设 y 是用方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

确定的 x 的函数. 求 $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 和 $\dfrac{d^3y}{dx^3}$

1942. 设 y 是由方程

$$x^2+y^2+2axy=0\ (a>1)$$

确定的函数. 证明: $\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$, 并说明所得结果.

1943. 如果 $y=1+y^x$, 求 $\dfrac{dy}{dx}$.

1944. 如果 $y=x+\ln y$, 求 $\dfrac{dy}{dx}$ 和 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

1945. 如果

$$x^2-2xy+y^2+x+y-2=0,$$

求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$ 和 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=1}$. 利用得到的结果, 近似地作出给定曲线在 $x=1$ 邻域中的图形.

1946. 函数 y 由方程

$$\ln\sqrt{x^2+y^2}-a\arctan\frac{y}{x}\ (a\neq 0)$$

所确定, 求 $\dfrac{dy}{dx}$ 和 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

1947. 如果

$$1+xy-\ln(e^{xy}+e^{-xy})=0,$$

求 $\dfrac{dy}{dx}$ 和 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

1948. 变量 x 和 y 的函数 z 由方程

$$x^3+2y^3+z^3-3xyz-2y+3=0$$

所确定, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

1949. 如果

$$x\cos y+y\cos z+z\cos x=1,$$

求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

1950. 函数 z 由方程

$$x^2+y^2-z^2-xy=0$$

所确定, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在 $x=-1, y=0, z=1$ 处的值.

1951. 如果

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

1952. 若 $f(x,y,z)=0$, 证明: $\dfrac{\partial x}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=-1$.

1953. 令 $z=\varphi(x,y)$, 其中 y 是由方程 $\psi(x,y)=0$ 确定的 x 的函数. 求 $\dfrac{dz}{dx}$.

1954. 如果

$$x^2+y^2+z^2=a^2,$$

求 dz 和 d^2z.

1955. 设 z 是由方程

$$2x^2+2y^2+z^2-8xz-z+8=0$$

确定的变量 x 和 y 的函数, 求出对于数组 $x=2, y=0, z=1$ 的 dz 和 d^2z.

1956. 如果 $\ln z=x+y+z-1$, 求出 dz 和 d^2z. 函数 z 的一阶和二阶偏导数等于什么?

1957. 设函数 z 由方程

$$x^2+y^2+z^2=\varphi(ax+by+cz)$$

所确定, 其中 φ 为任意可微函数, a, b, c 都是常数. 证明:

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay.$$

1958. 证明: 由方程

$$F(x-az, y-bz)=0$$

所确定的函数 z 满足方程

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1,$$

其中 F 是其变量的任意可微函数.

1959. 设 $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)=0$, 证明: $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$.

1960. 证明: 由方程 $y=x\varphi(z)+\psi(z)$ 所确定的函数 z 满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2=0.$$

1961. 以 x 为自变量的函数 y 和 z 由方程组

$$x^2+y^2-z^2=0, \qquad x^2+2y^2+3z^2=4$$

给出, 求当 $x=1, y=0, z=1$ 时的 $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx^2}$.

1962. 以 x 为自变量的函数 y 和 z 由方程组

$$xyz=a, \qquad x+y+z=b$$

给出, 求 dy, dz, d^2y, d^2z.

1963. 以 x, y 为自变量的函数 u 和 v 由隐式方程组

$$u=x+y, \qquad uv=y$$

给出, 计算当 $x=0, y=1$ 时的 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$.

1964. 以 x, y 为自变量的函数 u 和 v 由隐式方程组

$$u+v=x, \qquad u-yv=0$$

给出, 求 du, dv, d^2u, d^2v.

1965. 以 x, y 为自变量的函数 u 和 v 由隐式方程组

$$x=\varphi(u,v),\qquad y=\psi(u,v)$$

给出, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

1966. 求:

a) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, 如果 $x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=cv$;

b) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, 如果 $x=u+v,\ y=u-v,\ z=uv$;

c) dz, 如果 $x=e^{u+v},\ y=e^{u-v},\ z=uv$.

1967. 设 $z=F(r,\varphi)$, 其中 r 和 φ 是由方程组

$$x=r\cos\varphi,\qquad y=r\sin\varphi$$

所确定的变量 x 和 y 的函数, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

1968. 如果

$$x=a\cos\varphi\cos\psi,\quad y=b\sin\varphi\cos\psi,\quad z=c\sin\psi,$$

并将 z 看成 x 和 y 的函数, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

§10. 变量变换

当在含有导数的微分表达式中作变量变换时, 应当利用复合函数的微分法, 用新变量的导数表示之.

1°. **在含有通常导数表达式中的变量变换.**

例 1 令 $x=\dfrac{1}{t}$, 变换方程

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}+\frac{a^2}{x^2}y=0.$$

解 我们通过 y 对 t 的导数来表示 y 对 x 的导数. 我们有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{-\dfrac{1}{t^2}}=-t^2\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}=-\left(2t\frac{dy}{dt}+t^2\frac{d^2y}{dt^2}\right)(-t^2)=2t^3\frac{dy}{dt}+t^4\frac{d^2y}{dt^2}.$$

将算出的导数表达式代入给定的方程, 并用 $\dfrac{1}{t}$ 代替 x, 得到

$$\frac{1}{t^2}\cdot t^3\left(2\frac{dy}{dt}+t\frac{d^2y}{dt^2}\right)+2\cdot\frac{1}{t}\left(-t^2\frac{dy}{dt}\right)+a^2t^2y=0$$

或者

$$\frac{d^2y}{dt^2}+a^2y=0.$$

例 2 取 y 作为自变量, 而 x 作为函数, 变换方程

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-\frac{dy}{dx}=0.$$

解 通过 x 对 y 的导数来表示 y 对 x 的导数:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)\frac{dy}{dx}=-\left(\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}.$$

将这些导数表达式代入给定方程, 我们就有

$$x\left[-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}\right]+\frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}-\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=0,$$

或者最后

$$x\frac{d^2x}{dy^2}-1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=0.$$

例 3 转移到极坐标

$$x=r\cos\varphi,\qquad y=r\sin\varphi \tag{1}$$

来变换方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}.$$

解 将 r 看成 φ 的函数, 从公式 (1) 我们得到

$$dx=\cos\varphi dr-r\sin\varphi d\varphi,\qquad dy=\sin\varphi dr+r\cos\varphi d\varphi,$$

由此得出

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\varphi dr+r\cos\varphi d\varphi}{\cos\varphi dr-r\sin\varphi d\varphi}=\frac{\sin\varphi\frac{dr}{d\varphi}+r\cos\varphi}{\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi}-r\sin\varphi}.$$

将 x,y 和 $\frac{dy}{dx}$ 的表达式代入给定方程, 我们就有

$$\frac{\sin\varphi\frac{dr}{d\varphi}+r\cos\varphi}{\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi}-r\sin\varphi}=\frac{r\cos\varphi+r\sin\varphi}{r\cos\varphi-r\sin\varphi},$$

或者最后简化成

$$\frac{dr}{d\varphi}=r.$$

2°. **在含有偏导数表达式中的变量变换.**

例 4 将弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ (a \neq 0)$$

变换到新自变量 α 和 β 的方程, 这里 $\alpha = x - at$, $\beta = x + at$.

解 我们把 u 对 x 和 t 的偏导数用 u 对 α 和 β 的偏导数表示出来. 运用复合函数的求导公式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial t}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x},$$

我们得到

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}(-a) + \frac{\partial u}{\partial \beta}a = a\left(\frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{\partial u}{\partial \alpha}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\cdot 1 + \frac{\partial u}{\partial \beta}\cdot 1 = \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta}.$$

运用同一公式, 再求导一次得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial \beta}{\partial t} \\ &= a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}\right)(-a) + a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}\right)a \\ &= a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial \beta}{\partial x} \\ &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}\right)\cdot 1 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right)\cdot 1 \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}.\end{aligned}$$

将 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 和 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 代入给定方程, 有

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right) = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right),$$

或者

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} = 0.$$

例 5 取 $u = x, v = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}$ 作为新的自变量, 而取 $w = \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{x}$ 作为新的函数, 变换方程 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial z}{\partial y} = z^2$.

解 我们用偏导数 $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ 和 $\dfrac{\partial w}{\partial v}$ 来表示偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. 为此我们微分老变量与新变量之间的关系式:

$$du = dx, \quad dv = \frac{dx}{x^2} - \frac{dy}{y^2}, \quad dw = \frac{dx}{x^2} - \frac{dz}{z^2}.$$

从另一方面有

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv.$$

因此

$$\frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv = \frac{dx}{x^2} - \frac{dz}{z^2},$$

或者

$$\frac{\partial w}{\partial u}dx + \frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{dx}{x^2} - \frac{dy}{y^2}\right) = \frac{dx}{x^2} - \frac{dz}{z^2}.$$

由此得出

$$dz = z^2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}\right)dx + \frac{z^2}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}dy,$$

从而

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z^2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}\right)$$

和

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^2}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}.$$

将这些表达式代入给定的方程, 得到

$$x^2z^2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}\right) + z^2\frac{\partial w}{\partial v} = z^2,$$

或者

$$\frac{\partial w}{\partial u} = 0.$$

1969. 设 $x = e^t$, 变换方程

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + y = 0.$$

1970. 设 $x = \cos t$, 变换方程

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0.$$

1971. 取 y 作为自变量后, 变换下列方程:

a) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$;　　b) $\frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3} - 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0$.

1972. 切线 MT 与切点的向径 OM (图 69) 所组成的角 μ 的正切用如下公式

$$\tan\mu = \frac{y' - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}y'}$$

表示. 转到极坐标 $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, 变换这个表达式.

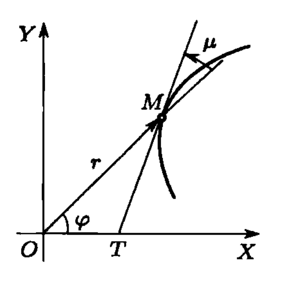


图 69

1973. 用极坐标 $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ 表示曲线的曲率公式

$$K = \frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}}.$$

1974. 如果 $u = x$, $v = x^2 + y^2$, 将方程

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

变换到新自变量 u 和 v 的方程.

1975. 如果 $u = x$, $v = \dfrac{y}{x}$, 将方程

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z = 0$$

变换到新自变量 u 和 v 的方程.

1976. 令

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

将拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

变换到极坐标 r 和 φ 的方程.

1977. 设 $u = xy$ 和 $v = \dfrac{x}{y}$, 变换方程

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

1978. 引进新的自变量

$$u = x^2 + y^2, \qquad v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

和新的函数 $w = \ln z - (x+y)$, 变换方程

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = (y-x)z.$$

1979. 取 $u = x+y$, $v = \dfrac{y}{x}$ 作为新的自变量, 而取 $w = \dfrac{z}{x}$ 作为新的函数, 变换方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

1980. 令 $u = x+y$, $v = x-y$, $w = xy - z$, 其中 $w = w(u,v)$, 变换方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

§11. 曲面的切平面和法线

1°. **在显式给出曲面情况下, 切平面和法线的方程**. 对于在曲面上经过点 M 的不同曲线, 都在该点作出其切线, 所有这些切线所在平面称为曲面在点 M (切点) 的**切平面**.

切平面在切点处的垂线称为曲面的**法线**.

如果在笛卡儿坐标系中, 曲面方程由显式 $z = f(x,y)$ 给出, 其中 $f(x,y)$ 是可微函数, 则曲面上点 M 处的切平面方程为

$$Z - z_0 = f'_x(x_0,y_0)(X - x_0) + f'_y(x_0,y_0)(Y - y_0), \tag{1}$$

其中 $z_0=f(x_0,y_0)$, 而 X,Y,Z 为切平面上点的流动坐标.

法线方程有形式

$$\frac{X-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{Y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{Z-z_0}{-1}, \tag{2}$$

其中 X,Y,Z 为法线上点的流动坐标.

例 1　写出曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}-y^2$ 上点 $M(2,-1,1)$ 处的切平面方程和法线方程.

解　求出给定函数的偏导数及其在点 M 的值:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=x,\qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M=2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-2y,\qquad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M=2.$$

由此应用公式 (1) 和 (2), 我们就有: $z-1=2(x-2)+2(y+1)$ 或者 $2x+2y-z-1=0$ 为切平面方程, $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$ 为法线方程.

2°. **在隐式给出曲面情况下, 切平面和法线的方程**. 在这种情况下, 当光滑曲面由隐式方程

$$F(x,y,z)=0$$

给出, 且有 $F(x_0,y_0,z_0)=0$ 时, 对应的方程就有如下形式:

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(X-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(Y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(Z-z_0)=0 \tag{3}$$

为切平面方程,

$$\frac{X-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{Y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{Z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}, \tag{4}$$

为法线方程.

例 2　写出曲面 $3xyz-z^3=a^3$ 在 $x=0,y=a$ 的点处的切平面方程和法线方程.

解　将 $x=0,y=a$ 代入曲面方程, 求出切点的竖坐标: $-z^3=a^3$, 由此得出 $z=-a$, 于是切点为 $M(0,a,-a)$.

用 $F(x,y,z)$ 表示方程的左端, 求出它的偏导数及其在点 M 处的值:

$$F'_x=3yz,\qquad (F'_x)_M=-3a^2,$$

$$F'_y=3xz,\qquad (F'_y)_M=0,$$

$$F'_z=3xy-3z^2,\qquad (F'_z)_M=-3a^2.$$

应用公式 (3) 和 (4), 得到切平面方程

$$-3a^2(x-0)+0(y-a)-3a^2(z+a)=0$$

或者 $x+z+a=0$. 法线方程为

$$\frac{x-0}{-3a^2}=\frac{y-a}{0}=\frac{z+a}{-3a^2},$$

或者 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-a}{0}=\dfrac{z+a}{1}$.

1981. 写出下列曲面在指定点处的切平面方程和法线方程:

a) 旋转抛物面 $z=x^2+y^2$, 在点 $(1,-2,5)$ 处;

b) 锥面 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{8}=0$, 在点 $(4,3,4)$ 处;

c) 球面 $x^2+y^2+z^2=2Rz$, 在点 $(R\cos\alpha, R\sin\alpha, R)$ 处.

1982. 在椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

上求一点, 使在该点处的法线与各坐标轴构成相等的角?

1983. 在球面 $x^2+y^2+z^2=169$ 上的点 $M(3,4,12)$ 处, 作垂直于 OX 和 OY 轴的平面, 在所得到截线的公共点 M 处, 作出截线的切线. 写出过这两条切线的平面方程.

1984. 证明: 在有心二次曲面

$$ax^2+by^2+cz^2=k$$

上点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为

$$ax_0x+by_0y+cz_0z=k.$$

1985. 求出曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 的平行于平面 $x+4y+6z=0$ 的切平面.

1986. 求出椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面, 使得它在各坐标轴上的截距相等.

1987. 在曲面 $x^2+y^2-z^2-2x=0$ 上, 求出其切平面平行于各坐标面的各点.

1988. 证明: 曲面族 $xyz=m^3$ 的切平面与坐标面构成的四面体的体积为常数.

1989. 证明: 曲面族 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ 的切平面在各坐标轴上的截取的线段之和为常数.

1990. 证明: 锥面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$

和球面

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{b^2+c^2}{c}\right)^2=\frac{b^2}{c^2}(b^2+c^2)$$

在点 $(0,\pm b,c)$ 处彼此相切.

1991. 在两个曲面交线上的点处各作切平面, 这两个切平面之间所夹的角称为在该交点处**两曲面的夹角**.

试求圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 与球面 $(x-R)^2+y^2+z^2=R^2$ 在点 $M\left(\dfrac{R}{2},\dfrac{R\sqrt{3}}{2},0\right)$ 处夹角.

1992. 如果两个曲面在它们交线上的每一点处的夹角均为直角, 则称这两个曲面是**正交的**.

证明: 球坐标 r,φ,ψ 的坐标曲面, 即曲面 $x^2+y^2+z^2=r^2$ (球面), $y=x\tan\varphi$ (平面) 和 $z^2=(x^2+y^2)\tan^2\psi$ (圆锥面) 相互正交.

1993. 证明: 锥面 $z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 上任意点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面都通过坐标原

点, 其中 $x_0 \neq 0$.

1994*. 求出椭球面

$$x^2+y^2+z^2-xy-1=0$$

在各坐标面上的投影.

1995. 证明: 旋转曲面 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})(f'\neq 0)$ 上任一点处的法线与旋转轴相交.

§12. 多元函数的泰勒公式

假设函数 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 的邻域内有直到 $(n+1)$ 阶的连续偏导数, 那么在所考虑的邻域内有**泰勒公式**

$$\begin{aligned}f(x,y)=f(a,b)&+\frac{1}{1!}[f'_x(a,b)(x-a)+f'_y(a,b)(y-b)]\\&+\frac{1}{2!}[f''_{xx}(a,b)(x-a)^2+2f''_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)+f''_{yy}(a,b)(y-b)^2]\\&+\cdots+\frac{1}{n!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(a,b)+R_n(x,y)\end{aligned}\tag{1}$$

成立, 其中

$$R_n(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f\big(a+\theta(x-a),b+\theta(y-b)\big)\quad(0<\theta<1).$$

泰勒公式的另一种表示法:

$$\begin{aligned}f(x+h,y+k)=f(x,y)&+\frac{1}{1!}[hf'_x(,y)+kf'_y(x,y)]\\&+\frac{1}{2!}[h^2f''_{xx}(x,y)+2hkf''_{xy}(x,y)+k^2f''_{yy}(x,y)]+\cdots\\&+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y)\\&+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x+\theta h,y+\theta k),\end{aligned}\tag{2}$$

或者

$$\begin{aligned}\Delta f(x,y)=df(x,y)&+\frac{1}{2!}d^2f(x,y)+\cdots\\&+\frac{1}{n!}d^nf(x,y)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x+\theta h,y+\theta k).\end{aligned}\tag{3}$$

当 $a=b=0$ 时公式 (1) 的特殊情况称为**麦克劳林公式**.

对于三个和更多自变量的函数, 类似的公式也成立.

例 求出当自变量从值 $x=1,y=2$ 变到值 $x_1=1+h,y_1=2+k$ 时, 函数 $f(x,y)=x^3-2y^3+3xy$ 所得到的增量.

解 应用公式 (2), 可以求出所待求的增量. 首先计算逐阶偏导数及其在已知点

(1, 2) 处的值:

$$
\begin{aligned}
&f'_x(x,y) = 3x^2 + 3y, && f'_x(1,2) = 3\cdot 1 + 3\cdot 2 = 9,\\
&f'_y(x,y) = -6y^2 + 3x, && f'_y(1,2) = -6\cdot 4 + 3\cdot 1 = -21,\\
&f''_{xx}(x,y) = 6x, && f''_{xx}(1,2) = 6\cdot 1 = 6,\\
&f''_{xy}(x,y) = 3, && f''_{xy}(1,2) = 3,\\
&f''_{yy}(x,y) = -12y, && f''_{yy}(1,2) = -12\cdot 2 = -24,\\
&f'''_{xxx}(x,y) = 6, && f'''_{xxx}(1,2) = 6,\\
&f'''_{xxy}(x,y) = 0, && f'''_{xxy}(1,2) = 0,\\
&f'''_{xyy}(x,y) = 0, && f'''_{xyy}(1,2) = 0,\\
&f'''_{yyy}(x,y) = -12, && f'''_{yyy}(1,2) = -12.
\end{aligned}
$$

所有更高阶导数都恒等于零. 其次将求出的结果代入公式 (2), 我们得到

$$
\begin{aligned}
\Delta f(1,2) &= f(1+h, 2+k) - f(1,2)\\
&= h\cdot 9 + k(-21) + \frac{1}{2}[h^2\cdot 6 + 2hk\cdot 3 + k^2(-24)]\\
&\quad + \frac{1}{6}[h^3\cdot 6 + 3h^2k\cdot 0 + 3hk^2\cdot 0 + k^3(-12)]\\
&= 9h - 21k + 3h^2 + 3hk - 12k^2 + h^3 - 2k^3.
\end{aligned}
$$

1996. 如果

$$f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

将 $f(x+h, y+k)$ 按 h 和 k 的正整数幂进行展开.

1997. 在点 $(-2, 1)$ 的邻域内, 把函数

$$f(x,y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$$

按泰勒公式进行展开.

1998. 求当自变量从值 $x = 1, y = 1$ 变到值

$$x_1 = 1 + h, \qquad y_1 = 1 + k$$

时, 函数 $f(x,y) = x^2y$ 的增量.

1999. 在点 $(1, 1, 1)$ 的邻域内, 把函数

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z + 4$$

按泰勒公式进行展开.

2000. 如果

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz,$$

将 $f(x+h, y+k, z+l)$ 按 h, k 和 l 的正整数幂进行展开.

2001. 将函数

$$f(x,y) = e^x \sin y$$

用麦克劳林公式展开到三次项.

2002. 将函数

$$f(x,y)=\cos x\cos y$$

用麦克劳林公式展开到四次项.

2003. 在点 $(1,1)$ 的邻域内, 把函数

$$f(x,y)=y^x$$

按泰勒公式展开到二次项.

2004. 在点 $(1,-1)$ 的邻域内, 把函数

$$f(x,y)=e^{x+y}$$

按泰勒公式展开到三次项.

2005. 如果 $|\alpha|$ 和 $|\beta|$ 与 1 相比较是很小的量, 那么对于表达式:

a) $\arctan\dfrac{1+\alpha}{1-\beta}$; b) $\sqrt{\dfrac{(1+\alpha)^m+(1+\beta)^n}{2}}$,

推导出关于 α 和 β 精确到二次项的近似公式.

2006*. 利用直到二次项的泰勒公式, 近似地算出:

a) $\sqrt{1.03}\cdot\sqrt[3]{0.98}$; b) $(0.95)^{2.01}$.

2007. 假设 z 是由方程 $z^3-2xz+y=0$ 所确定的 x 和 y 的隐函数, 且当 $x=1$ 和 $y=1$ 时取值 $z=1$. 写出函数 z 对于差 $x-1$ 和 $y-1$ 的若干项升幂展开式.

§13. 多元函数的极值

1°. **函数极值的定义**. 所谓函数 $f(x,y)$ 在点 $P(a,b)$ 处有**极大值** (**极小值**)$f(a,b)$ 是指: 如果在点 P 的充分小邻域内中, 对所有不同于 P 的点 $P'(x,y)$ 都满足不等式 $f(a,b)>f(x,y)$ (或者相应地 $f(a,b)<f(x,y)$). 函数的极大值或者极小值统称为**极值**. 类似地定义三元和更多自变量函数的极值.

2°. **极值的必要条件**. 可微函数 $f(x,y)$ 可以取得极值的点 (称其为**驻点**) 是用求解方程组

$$f'_x(x,y)=0,\qquad f'_y(x,y)=0 \tag{1}$$

(极值的**必要条件**) 求出的. 方程组 (1) 等价于一个方程 $df(x,y)=0$. 在一般情况下, 函数 $f(x,y)$ 在其极值点 $P(a,b)$ 处, 或者 $df(a,b)=0$, 或者 $df(a,b)$ 不存在.

3°. **极值的充分条件**. 假设 $P(a,b)$ 是函数 $f(x,y)$ 的驻点, 亦即 $df(a,b)=0$, 于是:

a) 当 $dx^2+dy^2>0$ 时, 如果 $d^2f(a,b)<0$, 那么 $f(a,b)$ 是函数 $f(x,y)$ 的**极大值**;

b) 当 $dx^2+dy^2>0$ 时, 如果 $d^2f(a,b)>0$, 那么 $f(a,b)$ 是函数 $f(x,y)$ 的**极小值**;

c) 如果 $d^2f(a,b)$ 改变符号, 那么 $f(a,b)$ 不是函数 $f(x,y)$ 的极值.

上述条件等价于下列条件: 设 $f'_x(a,b)=f'_y(a,b)=0$ 并记 $A=f''_{xx}(a,b),B=f''_{xy}(a,b),C=f''_{yy}(a,b)$, 建立**判别式**:

$$\Delta=AC-B^2.$$

于是: 1) 如果 $\Delta > 0$, 那么函数在点 $P(a,b)$ 处有极值, 这就是说, 当 $A < 0$ (或者 $C < 0$) 时有极大值, 而当 $A > 0$ (或者 $C > 0$) 时有极小值; 2) 如果 $\Delta < 0$, 那么函数在点 $P(a,b)$ 处没有极值; 3) 如果 $\Delta = 0$, 那么关于函数在点 $P(a,b)$ 处的极值问题尚待解决 (需要进一步研究).

4°. **多元函数的情形**. 对于三个和更多自变量的函数, 其极值存在的必要条件, 类似于 2° 中的条件 (1), 而充分条件类似于 3° 中的条件 a), b), c).

例 1 讨论函数

$$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$$

的极值.

解 求出偏导数并建立方程组 (1):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12 = 0$$

或者

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0, \\ xy - 2 = 0. \end{cases}$$

解出方程组之后, 我们得到四个驻点:

$$P_1(1,2), \qquad P_2(2,1), \qquad P_3(-1,-2), \qquad P_4(-2,-1).$$

求出二阶偏导数

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x,$$

并对每一个驻点建立判别式 $\Delta = AC - B^2$:

1) 对于点 P_1: $A = \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{P_1} = 6$, $B = \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{P_1} = 12$, $C = \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{P_1} = 6$, $\Delta = AC - B^2 = 36 - 144 < 0$. 这就意味着在点 P_1 处没有极值.

2) 对于点 P_2: $A = 12, B = 6, C = 12$, $\Delta = 144 - 36 > 0, A > 0$. 函数在点 P_2 处有极小值. 这个极小值等于函数当 $x = 2, y = 1$ 时的值:

$$z_{\min} = 8 + 6 - 30 - 12 = -28.$$

3) 对于点 P_3: $A = -6, B = -12, C = -6$, $\Delta = 36 - 144 < 0$. 没有极值.

4) 对于点 P_4: $A = -12, B = -6, C = -12$, $\Delta = 144 - 36 > 0, A < 0$. 函数在点 P_4 处有极大值, 它等于

$$z_{\max} = -8 - 6 + 30 + 12 = 28.$$

5°. **条件极值**. 在最简单的情况下, 所谓函数 $f(x,y)$ 的**条件极值**是指在限制自变量的方程 $\varphi(x,y) = 0$ (**约束方程**) 条件下, 达到这个函数的极大值或者极小值. 为了求出当存在关系式 $\varphi(x,y) = 0$ 时, 函数 $f(x,y)$ 的条件极值, 可建立**拉格朗日函数**

$$F(x,y) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$$

的表达式, 其中 λ 为待定的常数因子, 并寻找这个辅助函数的极值. 这时, 极值的必要条件归结为含有三个未知量 x, y, λ 的三个方程的方程组:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

一般来说, 从这些方程可以确定这三个未知量.

关于条件极值的存在性及其特性的问题, 有待于研究拉格朗日函数的二阶微分

$$d^2F(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2$$

对于 x, y, λ 一组值的符号, 其中这组值是用方程

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy = 0 \quad (dx^2 + dy^2 \neq 0)$$

约束 x 和 y 的条件下由 (2) 求得的. 这就是, 如果 $d^2F < 0$, 函数 $f(x, y)$ 有条件极大值; 如果 $d^2F > 0$, 则有条件极小值. 特别地, 如果函数 $F(x, y)$ 的判别式 Δ 在驻点为正, 那么如果 $A < 0$ (或 $C < 0$), 函数 $f(x, y)$ 在该点有条件极大值; 如果 $A > 0$ (或 $C > 0$), 函数有条件极小值.

三元或多于三元的函数在具有一个或多个约束方程的条件下 (但是方程的个数必须少于变量的个数) 的条件极值可类似求出. 这里, 拉格朗日函数中所引入的待定因子个数与约束方程的个数相等.

例 2 当变量 x 和 y 满足方程

$$x^2 + y^2 = 1$$

的条件时, 求函数

$$z = 6 - 4x - 3y$$

的极值.

解 在几何上, 问题归结为求平面 $z = 6 - 4x - 3y$ 与圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 交线上点的竖坐标 z 的最大值和最小值.

建立拉格朗日函数

$$F(x, y) = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

我们有 $\dfrac{\partial F}{\partial x} = -4 + 2\lambda x$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = -3 + 2\lambda y$, 由必要条件得到方程组

$$\begin{cases} -4 + 2\lambda x = 0, \\ -3 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

解得

$$\lambda_1 = \frac{5}{2}, \qquad x_1 = \frac{4}{5}, \qquad y_1 = \frac{3}{5}$$

和

$$\lambda_2 = -\frac{5}{2}, \qquad x_2 = -\frac{4}{5}, \qquad y_2 = -\frac{3}{5}.$$

因为

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=2\lambda,\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=0,\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=2\lambda,$$

所以

$$d^2F=2\lambda(dx^2+dy^2).$$

如果 $\lambda=\frac{5}{2}$, $x=\frac{4}{5}$, $y=\frac{3}{5}$, 则 $d^2F>0$, 因此, 函数在这点有条件极小值. 如果 $\lambda=-\frac{5}{2}$, $x=-\frac{4}{5}$, $y=-\frac{3}{5}$, 则 $d^2F<0$, 因此, 函数在这点有条件极大值.

于是

$$z_{\max}=6+\frac{16}{5}+\frac{9}{5}=11,$$

$$z_{\min}=6-\frac{16}{5}-\frac{9}{5}=1.$$

6°. **函数的最大值和最小值**. 有界闭区域上的可微函数在驻点或在区域边界上达到它的最大值 (最小值).

例 3 确定函数

$$z=x^2+y^2-xy+x+y$$

在区域

$$x\leqslant 0,\quad y\leqslant 0,\quad x+y\geqslant -3$$

上的最大值与最小值.

解 指定区域是三角形 (图 70).

1) 求驻点:

$$\begin{cases} z'_x\equiv 2x-y+1=0,\\ z'_y\equiv 2y-x+1=0.\end{cases}$$

由此得出 $x=-1, y=-1$; 我们得到驻点 $M(-1,-1)$.

在点 M 处函数值 $z_M=-1$. 不必研究极值的性态.

2) 在区域边界上研究函数.

当 $x=0$ 时有 $z=y^2+y$, 从而问题归结为在闭区间 $-3\leqslant y\leqslant 0$ 上求这个一元函数的最大值与最小值. 通过讨论可求得: 在点 $(0,-3)$ 处 $(z_{最大})_{x=0}=6$; 在点 $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ 处 $(z_{最小})_{x=0}=-\frac{1}{4}$.

图 70

当 $y=0$ 时得 $z=x^2+x$. 类似地求得: 在点 $(-3,0)$ 处 $(z_{最大})_{y=0}=6$, 在点 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ 处 $(z_{最小})_{y=0}=-\frac{1}{4}$.

当 $x+y=-3$ 或者 $y=-3-x$ 时, 有 $z=3x^2+9x+6$. 用类似的方法求得: 在点 $\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$ 处 $(z_{最小})_{x+y=-3}=-\frac{3}{4}$; $(z_{最大})_{x+y=-3}=6$ 和 $(z_{最大})_{x=0}$ 以及 $(z_{最大})_{y=0}$

相等. 在直线 $x+y=-3$ 上, 也可以研究函数的条件极值, 而不必化为一元函数的极值.

3) 比较所得函数 z 全部的值, 即知: 在点 $(0,-3)$ 与 $(-3,0)$ 处 $z_{最大}=6$; 在驻点 M 处 $z_{最小}=-1$.

研究下列二元函数的极值:

2008. $z=(x-1)^2+2y^2$.

2009. $z=(x-1)^2-2y^2$.

2010. $z=x^2+xy+y^2-2x-y$.

2011. $z=x^3y^2(6-x-y)\ (x>0,\ y>0)$.

2012. $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$.

2013. $z=xy\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$.

2014. $z=1-(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}$.

2015. $z=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

2016. $z=\dfrac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$.

2016.1. $z=\dfrac{8}{x}+\dfrac{x}{y}+y\ (x>0,\ y>0)$.

2016.2. $z=e^{x-y}(x^2-2y^2)$.

求三元函数的极值:

2017. $u=x^2+y^2+z^2-xy+x-2z$.

2018. $u=x+\dfrac{y^2}{4x}+\dfrac{z^2}{y}+\dfrac{2}{z}\ (x>0,y>0,z>0)$.

求给定隐函数 z 的极值:

2019*. $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$.

2020. $x^3-y^2-3x+4y+z^2+z-8=0$.

确定函数的条件极值:

2021. $z=xy$, 当 $x+y=1$ 时.

2022. $z=x+2y$, 当 $x^2+y^2=5$ 时.

2023. $z=x^2+y^2$, 当 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1$ 时.

2024. $z=\cos^2 x+\cos^2 y$, 当 $y-x=\dfrac{\pi}{4}$ 时.

2025. $u=x-2y+2z$, 当 $x^2+y^2+z^2=9$ 时.

2026. $u=x^2+y^2+z^2$, 当 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\ (a>b>c>0)$ 时.

2027. $u=xy^2z^3$, 当 $x+y+z=12\ (x>0,y>0,z>0)$ 时.

2028. $u=xyz$, 在 $x+y+z=5$, $xy+yz+xz=8$ 条件下.

2029. 如果 $x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0$, 证明不等式

$$\frac{x+y+z}{3}\geqslant\sqrt[3]{xyz}.$$

提示　在 $x+y+z=S$ 条件下, 求函数 $u=xyz$ 的极大值.

2030. 在下列区域上确定函数 $z=1+x+2y$ 的最大值:

a) $x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant 1$;　　b) $x\geqslant 0,y\leqslant 0,x-y\leqslant 1$.

2031. 在区域 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上, 确定函数 a) $z=x^2y$; b) $z=x^2-y^2$ 的最大值与最小值.

2032. 在区域 $0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2}, 0\leqslant y\leqslant \frac{\pi}{2}$ 上, 确定函数 $z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$ 的最大值与最小值.

2033. 在区域 $0\leqslant x\leqslant 2, -1\leqslant y\leqslant 2$ 上, 确定函数 $z=x^3+y^3-3xy$ 的最大值与最小值.

§14. 求函数的最大值和最小值问题

例 要求把正数 a 分成三个非负数的和, 使得它们的乘积为最大.

解 假设所要求的各相加项为 $x, y, a-x-y$. 我们来求函数 $f(x,y)=xy(a-x-y)$ 的最大值.

根据题意, 应该在闭三角形 $x\geqslant 0, y\geqslant 0, x+y\leqslant a$ (图 71) 内考察函数 $f(x,y)$.

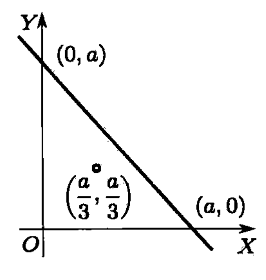


图 71

解方程组

$$\begin{cases} f'_x(x,y)\equiv y(a-2x-y)=0, \\ f'_y(x,y)\equiv x(a-x-2y)=0, \end{cases}$$

得到三角形内唯一驻点 $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$. 为了验证它满足充分条件, 我们有

$$f''_{xx}(x,y)=-2y, \quad f''_{xy}(x,y)=a-2x-2y, \quad f''_{yy}(x,y)=-2x.$$

因此

$$A=f''_{xx}\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)=-\frac{2}{3}a,$$

$$B=f''_{xy}\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)=-\frac{1}{3}a,$$

$$C=f''_{yy}\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)=-\frac{2}{3}a,$$

$$\Delta=AC-B^2>0, \ A<0.$$

于是, 函数在点 $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ 处达到极大值. 因为在三角形的边界上函数 $f(x,y)=0$, 所以这个极大值就是函数的最大值, 即当 $x=y=a-x-y=\frac{a}{3}$ 时, 乘积最大, 且乘积的最大值等于 $\frac{a^3}{27}$.

注 这个问题也可以用条件极值的方法求解, 即在 $x+y+z=a$ 的条件下, 求函数 $u=xyz$ 的极大值.

2034. 在所有体积为 V 的直平行六面体中, 求表面积最小者.

2035. 给定容积为 V 的开口长方浴盆, 问当其尺寸怎样时, 它有最小的表面积?

2036. 在所有周长为 $2p$ 的三角形中, 求出具有最大面积的三角形.

2037. 试求表面积为 S 且有最大体积的直平行六面体.

2038. 把正数 a 表示为四个正因子的积, 使得它们的和为最小.

2039. 在 XOY 平面上求点 $M(x,y)$, 使得它到三条直线 $x=0, y=0, x-y+1=0$ 的距离的平方和为最小.

2040. 试求周长为 $2p$ 的三角形, 使得绕它的一边旋转而成的立体具有最大的体积.

2041. 平面上给出质量分别为 m_1, m_2, m_3 的三个质点 $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2), P_3(x_3,y_3)$. 试问点 $P(x,y)$ 在怎样的位置, 该质点组关于点 P 的二次矩 (惯性矩, 即和 $m_1\overline{P_1P}^2+m_2\overline{P_2P}^2+m_3\overline{P_3P}^2$) 为最小?

2042. 过点 $M(a,b,c)$ 作平面, 使它与坐标面构成最小体积的四面体.

2043. 在椭球内嵌入具有最大体积的直平行六面体.

2044. 制造容积 (内部的) 为 V 且壁厚为 δ 的开顶矩形箱子, 试确定它的外表的尺寸, 使得所用的材料最省.

2045. 在椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

上求一点, 使其切线与坐标轴构成最小面积的三角形.

2046*. 求椭圆

$$5x^2+8xy+5y^2=9$$

的轴.

2047. 在已给的球内嵌入具有最大表面积的圆柱.

2048. 两条河流 (在某个确定区域内) 的形状和位置近似于抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y-2=0$. 要在它们之间连接一条长度最短的直线水渠, 试问应该在哪一点处连接?

2049. 求点 $M(1,2,3)$ 到直线

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{2}$$

的最短距离.

2050*. 点 A, B 位于彼此沿直线分开的不同光介质中 (图 72). 光的传播速度在第一介质中等于 v_1, 在第二介质中等于 v_2. 应用 "费马原理": 光线沿着经历时间为最短路线 AMB 传播, 试导出光的折线定律.

2051. 利用 "费马原理", 导出光线在同一介质中对平面的反射定律 (图 73).

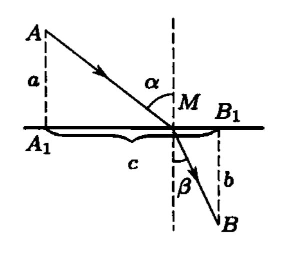


图 72

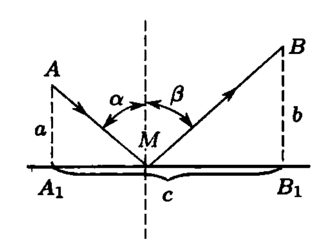


图 73

2052*. 如果电路中的电阻为 R, 通过的电流为 I, 则单位时间内放出热量的数量与 I^2R 成正比. 试确定: 应该怎样把电流 I 分成 I_1, I_2, I_3, 使得它们分别流过电阻 R_1, R_2, R_3 的支路时, 放出的热量为最小?

§15. 平面曲线的奇点

1°. **奇点的定义**. 如果点 $M(x_0, y_0)$ 的坐标同时满足三个方程:

$$f(x_0,y_0)=0,\qquad f'_x(x_0,y_0)=0,\qquad f'_y(x_0,y_0)=0,$$

则称点 M 为平面曲线 $f(x,y)=0$ 的**奇点**.

2°. **奇点的基本类型**. 假设在奇点 $M(x_0, y_0)$ 处, 二阶导数

$$A=f''_{xx}(x_0,y_0),\qquad B=f''_{xy}(x_0,y_0),\qquad C=f''_{yy}(x_0,y_0)$$

不全为零, 而且 $\Delta = AC - B^2$. 那么:

a) 如果 $\Delta > 0$, 则点 M 为**孤立点** (图 74);

b) 如果 $\Delta < 0$, 则点 M 为**结点** (二重点) (图 75);

c) 如果 $\Delta = 0$, 则点 M 或者为**第一类尖点** (图 76), 或者为**第二类尖点** (图 77), 或者为**孤立点**, 或者为**自切点** (图 78).

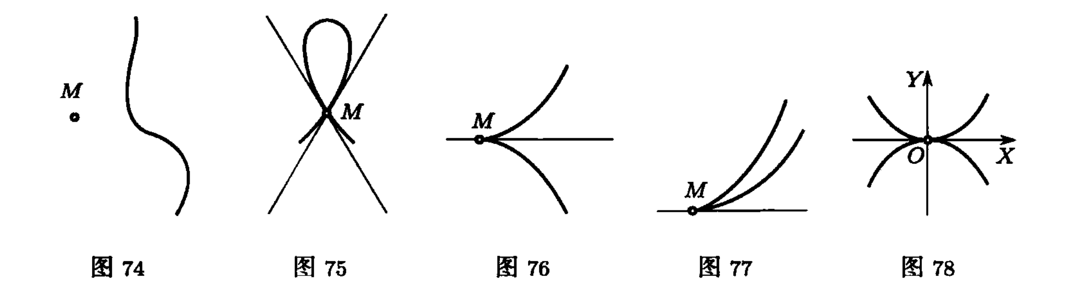


图 74　　图 75　　图 76　　图 77　　图 78

求解本节的问题时, 总是要求作出曲线.

例　证明: 曲线 $y^2 = ax^2 + x^3$ 当 $a > 0$ 时有结点; 当 $a < 0$ 时有孤立点; 当 $a = 0$ 时有第一类尖点.

解　这里 $f(x,y) = ax^2 + x^3 - y^2$. 求偏导数并使它们等于零:

$$f'_x(x,y) \equiv 2ax + 3x^2 = 0,$$

$$f'_y(x,y) \equiv -2y = 0.$$

这个方程组有两个解: $O(0,0)$ 和 $N\left(-\frac{2a}{3}, 0\right)$. 但是点 N 的坐标不满足给定的曲线方程, 亦即只有唯一的奇点 $O(0,0)$.

求出二阶导数及其在点 O 的值:

$$f''_{xx}(x,y)=2a+6x,\quad A=2a,$$
$$f''_{xy}(x,y)=0,\quad B=0,$$
$$f''_{yy}(x,y)=-2,\quad C=-2,$$
$$\Delta=AC-B^2=-4a.$$

因此,

如果 $a>0$, 则 $\Delta<0$, 从而点 O 为结点 (图 79);

如果 $a<0$, 则 $\Delta>0$, 从而点 O 为孤立点 (图 80);

如果 $a=0$, 则 $\Delta=0$, 这时曲线方程为 $y^2=x^3$ 或者 $y=\pm\sqrt{x^3}$, 其中 $x\geqslant 0$. 曲线关于切线 OX 轴对称, 因此点 M 是第一类尖点 (图 81).

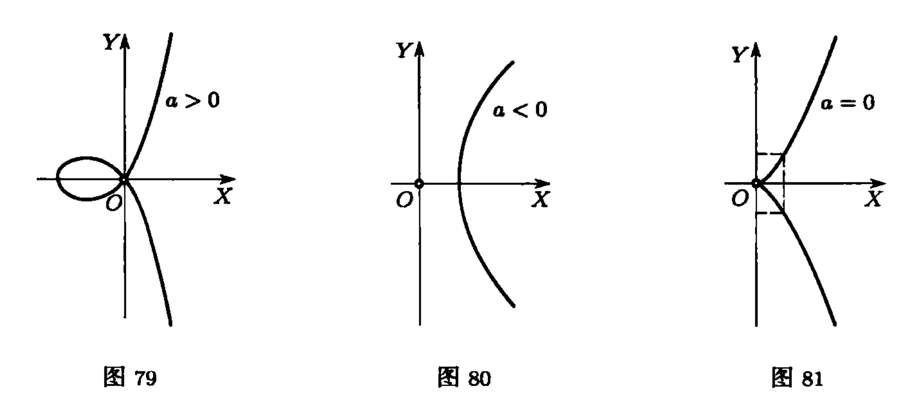


图 79　　图 80　　图 81

说明下列曲线奇点的特性:

2053. $y^2=-x^2+x^4$.

2054. $(y-x^2)^2=x^5$.

2055. $a^4y^2=a^2x^4-x^6$.

2056. $x^2y^2-x^2-y^2=0$.

2057. $x^3+y^3-3axy=0$ (笛卡儿叶形线).

2058. $y^2(a-x)=x^3$ (蔓叶线).

2059. $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ (双纽线).

2060. $(a+x)y^2=(a-x)x^2$ (环索线).

2061. $(x^2+y^2)(x-a)^2=b^2x^2$ $(a>0,b>0)$ (蚌线). 研究三种情形: 1) $a>b$, 2) $a=b$, 3) $a<b$.

2062. 说明曲线 $y^2=(x-a)(x-b)(x-c)$ 的奇点性态随着值 a,b,c 的变化情形 (实数 $a\leqslant b\leqslant c$).

§16. 包络线

1°. **包络的定义**. 与给定曲线族的所有曲线相切, 并且在它的每一点处总与该曲线族的某曲线相切的曲线 (或者若干条曲线的全体) 称为**平面曲线族的包络**.

2°. **包络的方程**. 如果依赖于单参数 α 的曲线族

$$f(x,y,\alpha)=0$$

有包络, 则包络的参数方程由方程组

$$\begin{cases} f(x,y,\alpha)=0, \\ f'_x(x,y,\alpha)=0 \end{cases} \tag{1}$$

确定.

方程组 (1) 消去参数 α 后, 就得到形如

$$D(x,y)=0 \tag{2}$$

的方程.

应当注意: 从形式上得到的曲线 (2) (称为 “判别曲线”) 除了包络外, 如果它存在, 还可能含有给定曲线族奇点的几何轨迹, 它们不在该曲线族的包络之中.

解本节的问题时, 建议作出图形.

例 求直线族

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0\ (p=\text{常数},\ p>0)$$

的包络.

解 给定的直线族依赖于参数 α. 建立方程组 (1):

$$\begin{cases} x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0, \\ -x\sin\alpha+y\cos\alpha=0. \end{cases}$$

关于 x 和 y 求解这个方程组, 即得包络的参数方程

$$x=p\cos\alpha,\qquad y=p\sin\alpha.$$

将这两个方程平方再相加, 就消去参数 α:

$$x^2+y^2=p^2.$$

于是, 给定直线族的包络就是中心在坐标原点、半径为 p 的圆周, 直线族正是这个圆周的切线族 (图 82).

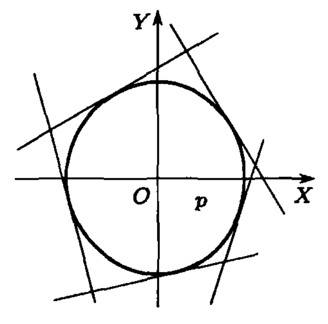


图 82

2063. 求圆族

$$(x-a)^2+y^2=\frac{a^2}{2}$$

的包络.

2064. 求直线族

$$y=kx+\frac{p}{2k}\quad (k\text{为参数}, p\text{为常数})$$

的包络.

2065. 求中心在 OX 轴上、半径均为 R 之圆族的包络.

2066. 试求长为 l、两端沿坐标轴滑动的直线段族的包络.

2067. 假设直线与坐标轴构成固定面积 S 的三角形, 求出这个直线族的包络.

2068. 求出有不变面积 S, 且对称轴都相同的椭圆族的包络.

2069. 研究下列曲线族中 “判别曲线” 的特性 (C 为参数):

a) 三次抛物线族 $y=(x-C)^3$;

b) 半立方抛物线族 $y^2=(x-C)^3$;

c) 尼尔抛物线族 $y^3=(x-C)^2$;

d) 环索线族 $(a+x)(y-C)^2=x^2(a-x)$.

2070. 炮弹从点 O 与水平线成 α 角、以初速度 v_0 射出, 它的运动方程为 (不计空气阻力)

$$y=x\tan\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}.$$

取角 α 为参数, 求在同一垂直平面上所有弹道曲线的包络 (“**安全抛物线**”) (图 83).

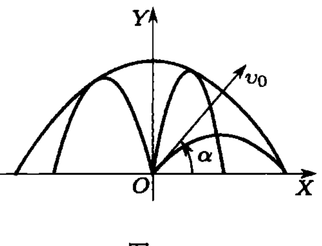


图 83

§17. 空间曲线的弧长

在笛卡儿直角坐标中, 空间曲线的**弧长微分**等于

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2},$$

其中 x,y,z 是曲线上点的流动坐标.

如果

$$x=x(t),\qquad y=y(t),\qquad z=z(t)$$

是空间曲线的参数方程, 则从 $t=t_1$ 到 $t=t_2$ 这一段弧的长度等于

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}dt.$$

在第 2071—2076 题中, 求各曲线的弧长:

2071. $x=t,\ y=t^2,\ z=\dfrac{2t^3}{3}$, 从 $t=0$ 到 $t=2$.

2072. $x=2\cos t,\ y=2\sin t,\ z=\dfrac{3}{\pi}t$, 从 $t=0$ 到 $t=\pi$.

2073. $x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t,\ z=e^t$, 从 $t=0$ 到任意 t 值.

2074. $y=\dfrac{x^2}{2},\ z=\dfrac{x^3}{6}$, 从 $x=0$ 到 $x=6$.

2075. $x^2=3y,\ 2xy=9z$, 从点 $O(0,0,0)$ 到点 $M(3,3,2)$.

2076. $y=a\arcsin\dfrac{x}{a},\ z=\dfrac{a}{4}\ln\dfrac{a+x}{a-x}$, 从点 $O(0,0,0)$ 到点 $M(x_0,y_0,z_0)$.

2077. 设点在任一时刻 $t(t>0)$ 的位置由方程

$$x=2t,\qquad y=\ln t,\qquad z=t^2$$

确定. 求在时刻 $t_1=1$ 与 $t_2=10$ 之间该点运动的平均速度.

§18. 数值自变量的向量函数

1°. **数值自变量向量函数的导数.** **向量函数** $\mathbf{a}=\mathbf{a}(t)$ 可以用三个给定的数值函数

$a_x(t), a_y(t), a_z(t)$—— 向量在坐标轴上的投影 —— 来确定:

$$\mathbf{a} = a_x(t)\mathbf{i} + a_y(t)\mathbf{j} + a_z(t)\mathbf{k}.$$

向量函数 $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ 关于数值自变量 t 的导数是一个新的向量函数, 它由下式定义:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{a}(t+\Delta t) - \mathbf{a}(t)}{\Delta t} = \frac{da_x(t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{da_y(t)}{dt}\mathbf{j} + \frac{da_z(t)}{dt}\mathbf{k}.$$

向量函数导数的模等于

$$\left|\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{da_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{da_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{da_z}{dt}\right)^2}.$$

可变向径 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 的端点在空间中描绘出的曲线

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

称为向量 $\mathbf{r}$ 的**速端曲线**.

导数 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ 是速端曲线在相应点处的切向量, 并且

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \frac{ds}{dt},$$

其中 s 是从某点起算的速端曲线的弧长. 特别有 $\left|\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right| = 1$.

如果参数 t 是时间, 则 $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$ 是向量 $\mathbf{r}$ 端点的**速度向量**, $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{w}$ 是向量 $\mathbf{r}$ 端点的**加速度向量**.

2°. **数值自变量向量函数的微分基本规则**.

1) $\frac{d}{dt}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{b}}{dt} + \frac{d\mathbf{c}}{dt}$;

2) $\frac{d}{dt}(m\mathbf{a}) = m\frac{d\mathbf{a}}{dt}$, 其中 m 为常数量;

3) $\frac{d}{dt}(\varphi\mathbf{a}) = \frac{d\varphi}{dt}\mathbf{a} + \varphi\frac{d\mathbf{a}}{dt}$, 其中 φ 为 t 的数值函数;

4) $\frac{d}{dt}(\mathbf{a}\mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt}\mathbf{b} + \mathbf{a}\frac{d\mathbf{b}}{dt}$;

5) $\frac{d}{dt}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\frac{d\mathbf{b}}{dt}$;

6) $\frac{d}{dt}\mathbf{a}\big(\varphi(t)\big) = \frac{d\mathbf{a}}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}$;

7) 如果 $|\mathbf{a}| =$ 常数, 则 $\mathbf{a}\frac{d\mathbf{a}}{dt} = 0$.

例 动点在任一时刻的向径由方程

$$\mathbf{r} = \mathbf{i} - 4t^2\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k} \tag{1}$$

给出. 试确定动点的运动轨道、运动速度与加速度.

解 由方程 (1) 得:

$$x = 1, \qquad y = -4t^2, \qquad z = 3t^2.$$

消去时间 t, 即得动点运动轨道为直线

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{3}.$$

对方程 (1) 求导, 得出动点运动的速度向量

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -8t\mathbf{j} + 6t\mathbf{k}$$

以及动点运动的加速度向量

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -8\mathbf{j} + 6\mathbf{k}.$$

速度等于

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{(-8t)^2 + (6t)^2} = 10|t|.$$

注意到加速度是常量, 且等于

$$\left|\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right| = \sqrt{(-8)^2 + (6)^2} = 10.$$

2078. 证明: 向量方程 $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)t$ 是直线方程, 其中 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ 是两个已知点的向径.

2079. 确定下列向量函数的速端曲线是什么曲线:

a) $\mathbf{r} = \mathbf{a}t + \mathbf{c}$;

b) $\mathbf{r} = \mathbf{a}t^2 + \mathbf{b}t$;

c) $\mathbf{r} = \mathbf{a}\cos t + \mathbf{b}\sin t$;

d) $\mathbf{r} = \mathbf{a}\,\mathrm{ch}\ t + \mathbf{b}\,\mathrm{sh}\ t$,

其中 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为常向量, 且向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 互相垂直.

2080. 设向量函数 $\mathbf{a}(t) = a(t)\mathbf{a}^0(t)$, 其中 $a(t)$ 是数值函数, $\mathbf{a}^0(t)$ 是单位向量. 当向量 $\mathbf{a}(t)$ 做如下变化时, 求 $\mathbf{a}(t)$ 的向量导数: 1) 只有长度变化; 2) 只有方向变化; 3) 长度和方向都变化 (一般情形). 解释所得结果的几何意义.

2081. 利用向量函数关于数值自变量的微分规则, 导出三个向量函数 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 混合积的微分公式.

2082. 由三个向量

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k},$$

$$\mathbf{b} = 2t\mathbf{i} - \mathbf{j} + t^3\mathbf{k},$$

$$\mathbf{c} = -t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

作出平行六面体, 试求其体积对参数 t 的导数.

2083. 运动方程为

$$\mathbf{r} = 3\mathbf{i}\cos t + 4\mathbf{j}\sin t,$$

其中 t 为时间. 确定运动轨道、运动的速度向量和加速度向量. 并画出运动轨道及对于时刻 $t = 0, t = \frac{\pi}{4}$ 和 $t = \frac{\pi}{2}$ 的速度向量和加速度向量.

2084. 运动方程为

$$\mathbf{r} = 2\mathbf{i}\cos t + 2\mathbf{j}\sin t + 3\mathbf{k}t.$$

确定运动轨道、运动的速度向量和加速度向量. 问当 $t=0$ 和 $t=\frac{\pi}{2}$ 时运动速度和运动加速度的数值等于多少? 它们的方向如何?

2085. 运动方程为

$$\mathbf{r}=\mathbf{i}\cos\alpha\cos\omega t+\mathbf{j}\sin\alpha\cos\omega t+\mathbf{k}\sin\omega t.$$

其中 α 和 ω 为常数, t 为时间. 确定运动轨道、运动的速度向量和加速度向量, 以及它们的方向.

2086. 炮弹的运动方程 (不计空气阻力) 为

$$\mathbf{r}=\mathbf{v}_0 t-\frac{gt^2}{2}\mathbf{k},$$

其中 $\mathbf{v}_0\{v_{0x},v_{0y},v_{0z}\}$ 为初速度. 求出炮弹在任一时刻的速度和加速度.

2087. 证明: 如果点沿着抛物线 $y=\frac{x^2}{a}$, $z=0$ 运动, 且速度在 OX 轴上的投影保持常量 ($\frac{dx}{dt}=$ 常量), 则加速度也保持常量.

2088. 位于螺丝钉螺纹上的点, 旋紧螺丝钉时描出螺纹曲线

$$x=a\cos\theta,\qquad y=a\sin\theta,\qquad z=h\theta,$$

其中 θ 为其旋转角, a 为螺丝钉半径, h 是旋转一弧度时上升的高度, 试确定点的运动速度.

2089. 半径为 a 的圆轮以不变的角速度 ω 旋转, 同时它的中心以不变的速度 v_0 沿直线运动, 求出圆轮上点的速度.

§19. 空间曲线的自然三面形

在空间曲线 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ 的每一个非奇异点 $M(x,y,z)$ 处, 都可以作出由如下三个相互垂直平面组成的**自然三面形 (trihedral)** (图 84):

1) **密切面** MM_1M_2, 它包含向量 $\frac{d\mathbf{r}}{dt},\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$;

2) **法平面** MM_2M_3, 它垂直于向量 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$;

3) **从切面** MM_1M_3, 它垂直于前两个平面.

相交得三条直线: 1) **切线** MM_1; 2) **主法线** MM_2; 3) **次法线** MM_3, 它们分别由下列向量确定:

1) $\mathbf{T}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ (切向量);

2) $\mathbf{B}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ (次法向量);

3) $\mathbf{N}=\mathbf{B}\times\mathbf{T}$ (主法向量).

相应的单位向量

$$\tau=\frac{\mathbf{T}}{|\mathbf{T}|},\qquad \beta=\frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|},\qquad \nu=\frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}$$

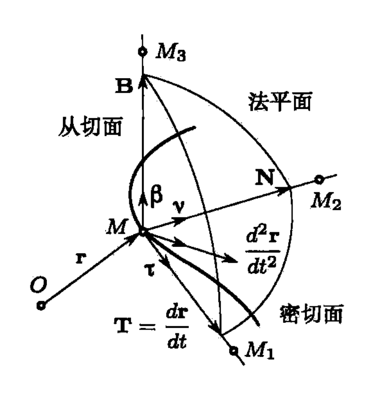


图 84

可按公式

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{d\mathbf{r}}{ds},\qquad \boldsymbol{\nu}=\frac{\dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}}{\left|\dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right|},\qquad \boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\nu}$$

进行计算.

如果 X,Y,Z 是切线上点的流动坐标, 则在点 $M(x,y,z)$ 处的切线方程具有形式

$$\frac{X-x}{T_x}=\frac{Y-y}{T_y}=\frac{Z-z}{T_z},\tag{1}$$

其中 $T_x=\frac{dx}{dt}$, $T_y=\frac{dy}{dt}$, $T_z=\frac{dz}{dt}$. 由直线与平面垂直的条件得出法平面方程为

$$T_x(X-x)+T_y(Y-y)+T_z(Z-z)=0.\tag{2}$$

用 B_x,B_y,B_z 与 N_x,N_y,N_z 代替方程 (1), (2) 中的 T_x,T_y,T_z, 就分别得到次法线方程、主法线方程与密切面方程、从切面方程.

例 1 求曲线

$$x=t,\qquad y=t^2,\qquad z=t^3$$

在点 $t=1$ 的基本单位向量 $\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta}$. 并写出在该点的切线方程、主法线方程与次法线方程.

解 我们有

$$\mathbf{r}=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}$$

和

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{i}+2t\mathbf{j}+3t^2\mathbf{k},$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=2\mathbf{j}+6t\mathbf{k}.$$

由此得出当 $t=1$ 时有

$$\mathbf{T}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k},$$

$$\mathbf{B}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&2&3\\0&2&6\end{vmatrix}=6\mathbf{i}-6\mathbf{j}+2\mathbf{k},$$

$$\mathbf{N}=\mathbf{B}\times\mathbf{T}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\6&-6&2\\1&2&3\end{vmatrix}=-22\mathbf{i}-16\mathbf{j}+18\mathbf{k}.$$

因此,

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}}{\sqrt{14}},\qquad \boldsymbol{\beta}=\frac{3\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{19}},\qquad \boldsymbol{\nu}=\frac{-11\mathbf{i}-8\mathbf{j}+9\mathbf{k}}{\sqrt{266}}.$$

由于当 $t=1$ 时有 $x=1,y=1,z=1$, 所以切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3},$$

次法线方程为

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-1}{1},$$

主法线方程为

$$\frac{x-1}{-11}=\frac{y-1}{-8}=\frac{z-1}{9}.$$

如果空间曲线作为两个曲面

$$F(x,y,z)=0,\qquad G(x,y,z)=0$$

的交线给出, 则可取向量 $d\mathbf{r}\{dx,dy,dz\}$ 与 $d^2\mathbf{r}\{d^2x,d^2y,d^2z\}$ 代替向量 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ 与 $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$, 并且变量 x,y,z 之一可看作自变量, 这时令它的二阶微分等于零.

例 2 求圆周

$$x^2+y^2+z^2=6,\qquad x+y+z=0 \tag{3}$$

上点 $M(1,1,-2)$ 处的密切平面方程.

解 把 x 看作自变量, 对方程组 (3) 微分, 可得

$$xdx+ydy+zdz=0,$$

$$dx+dy+dz=0$$

以及

$$dx^2+dy^2+yd^2y+dz^2+zd^2z=0,$$

$$d^2y+d^2z=0.$$

令 $x=1,y=1,z=-2$, 得

$$dy=-dx,\qquad dz=0,$$

$$d^2y=-\frac{2}{3}dx^2,\qquad d^2z=\frac{2}{3}dx^2.$$

因此, 密切面由向量

$$\{dx,\ -dx,\ 0\}\quad 与\quad \left\{0,\ \frac{2}{3}dx^2,\ \frac{2}{3}dx^2\right\}$$

或者

$$\{1,\ -1,\ 0\}\quad 与\quad \{0,\ -1,\ 1\}$$

所确定. 由此密切面的法向量为

$$\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=-\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}.$$

于是它的方程为

$$-1\cdot(x-1)-(y-1)-(z+2)=0,$$

亦即

$$x+y+z=0.$$

由于我们的曲线在这个平面上, 因此它就是密切面.

2090. 求曲线

$$x = 1 - \cos t, \qquad y = \sin t, \qquad z = t$$

在点 $t = \frac{\pi}{2}$ 的基本单位向量 $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}$.

2091. 求出在圆锥螺线

$$\mathbf{r} = e^t(\mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\sin t + \mathbf{k})$$

上任一点处的单位切向量与单位法向量. 并确定这两条直线与 OZ 轴的夹角.

2092. 求曲线

$$y = x^2, \qquad z = 2x$$

在点 $x = 2$ 处的基本单位向量 $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}$.

2093. 写出在螺旋线

$$x = a\cos t, \qquad y = a\ \sin t, \qquad z = bt$$

上任一点处自然三面形各条棱的方程, 并确定切线、主法线的方向余弦.

2094. 写出曲线

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6, \quad x^2 - y^2 + z^2 = 4$$

上点 $M(1, 1, 2)$ 处自然三面形各面的方程.

2095. 建立曲线

$$x = t, \qquad y = t^2, \qquad z = t^3$$

在点 $M(2, 4, 8)$ 处的切线方程、法平面方程和密切面方程.

2096. 建立曲线

$$x = \frac{t^4}{4}, \qquad y = \frac{t^3}{3}, \qquad z = \frac{t^2}{2}$$

在任意点处的切线方程、主法线方程和次法线方程. 并在曲线上求出这样一些点, 使得过这些点的切线平行于平面 $x + 3y + 2z - 10 = 0$ 的诸点.

2097. 建立曲线

$$x = t, \qquad y = -t, \qquad z = \frac{t^2}{2}$$

在点 $t = 2$ 处的切线方程、密切面方程、主法线方程和次法线方程. 计算在该点处次法线的方向余弦.

2098. 写出下列曲线的切线方程和法平面方程:

a) $x = R\cos^2 t,\ y = R\sin t\cos t,\ z = R\sin t$, 当 $t = \frac{\pi}{4}$ 时;

b) $z = x^2 + y^2,\ x = y$, 在点 $(1, 1, 2)$ 处;

c) $x^2 + y^2 + z^2 = 25,\ x + z = 5$, 在点 $(2, 2\sqrt{3}, 3)$ 处.

2099. 求曲线 $z = x^2 - y^2,\ y = x$ 在坐标原点处的法平面方程.

2100. 求曲线 $x = e^t,\ y = e^{-t},\ z = \sqrt{2}t$ 在点 $t = 0$ 处的密切平面方程.

2101. 求下列各曲线的密切面方程:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ x^2 - y^2 = 3$, 在点 $(2, 1, 2)$ 处;

b) $x^2=4y,\ x^3=24z$, 在点 $(6,9,9)$ 处;

c) $x^2+z^2=a^2,\ y^2+z^2=b^2$, 在曲线上的任意一点处.

2102. 建立曲线

$$y^2=x, \qquad x^2=z$$

在点 $(1,1,1)$ 处的密切面方程、主法线方程和次法线方程.

2103. 建立圆锥螺旋线 $x=t\cos t,\ y=t\sin t,\ z=bt$ 在坐标原点处的密切面方程、主法线方程和次法线方程. 求出在坐标原点处的单位切向量、单位主法向量和单位次法向量.

§20. 空间曲线的曲率和挠率

1°. **曲率**. 曲线在点 M 处的曲率是指数值

$$K=\frac{1}{R}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\varphi}{\Delta s},$$

其中 φ 是曲线段 $\widehat{MN}$ 上切线的转动角 (**邻角**), Δs 是曲线段的弧长. R 称为**曲率半径**. 如果曲线由方程 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$ 给出, 其中 s 为弧长, 则

$$\frac{1}{R}=\left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right|.$$

当曲线用一般参数给出时, 有

$$\frac{1}{R}=\frac{\left|\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\times\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|}{\left|\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right|^3}. \tag{1}$$

2°. **挠率**. 曲线在点 M 处的挠率 (**第二曲率**) 是指数值

$$T=\frac{1}{\rho}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\theta}{\Delta s},$$

其中 θ 是曲线段 $\widehat{MN}$ 上次法线的转动角 (**第二类邻角**), 量 ρ 称为**挠率半径**或者**第二曲率半径**. 如果 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$, 则

$$\frac{1}{\rho}=\mp\left|\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}\right|=\frac{\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}\,\dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\,\dfrac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}}{\left(\dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right)^2},$$

其中当向量 $\dfrac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}$ 与 $\boldsymbol{\nu}$ 同方向时取负号, 反方向时取正号.

如果 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$, 其中 t 为任意参数, 则

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\,\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\,\dfrac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}}{\left(\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\times\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)^2}. \tag{2}$$

例 求螺旋线

$$\mathbf{r}=\mathbf{i}a\cos t+\mathbf{j}a\sin t+\mathbf{k}bt \qquad (a>0)$$

的曲率和挠率.

解 我们有

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\mathbf{i}a\sin t + \mathbf{j}a\cos t + \mathbf{k}b,$$
$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\mathbf{i}a\cos t - \mathbf{j}a\sin t,$$
$$\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} = \mathbf{i}a\sin t - \mathbf{j}a\cos t.$$

由此得

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}ab\sin t - \mathbf{j}ab\cos t + \mathbf{k}a^2$$

以及

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} = \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix} = a^2 b.$$

因此, 根据公式 (1) 和 (2) 得

$$\frac{1}{R} = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(a^2+b^2)^{3/2}} = \frac{a}{a^2+b^2},$$
$$\frac{1}{\rho} = \frac{a^2 b}{a^2(a^2+b^2)} = \frac{a}{a^2+b^2},$$

即螺旋线的曲率和挠率都是常数.

3°. **弗雷内 (Frenet) 公式.**

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{\boldsymbol{\nu}}{R}, \qquad \frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds} = -\frac{\boldsymbol{\nu}}{R} + \frac{\boldsymbol{\beta}}{\rho}, \qquad \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = -\frac{\boldsymbol{\nu}}{\rho}.$$

2104. 证明: 如果在曲线上的所有点处都有曲率等于零, 则此曲线是直线.

2105. 证明: 如果在曲线上的所有点处都有挠率等于零, 则此曲线是平面曲线.

2106. 证明: 曲线

$$x = 1 + 3t + 2t^2, \qquad y = 2 - 2t + 5t^2, \qquad z = 1 - t^2$$

是平面曲线, 求出此曲线所在的平面.

2107. 计算下列曲线的曲率:

a) $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = \operatorname{ch} t$, 当 $t = 0$ 时;

b) $x^2 - y^2 + z^2 = 1,\ y^2 - 2x + z = 0$, 在点 $(1,1,1)$ 处.

2108. 计算下列曲线在任意点处的曲率和挠率:

a) $x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t,\ z = e^t$;

b) $x = a\operatorname{ch} t,\ y = a\operatorname{sh} t,\ z = at$ (双曲螺旋线).

2109. 求出下列曲线在任意点 (x,y,z) 处的曲率半径和挠率半径:

a) $x^2 = 2ay,\ x^3 = 6a^2 z$; b) $x^3 = 3p^2 y,\ 2xz = p^2$.

2110. 证明: 加速度向量 $\mathbf{w}$ 的切向分量与法向分量用公式

$$\mathbf{w}_\tau = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}, \qquad \mathbf{w}_\nu = \frac{v^2}{R}\boldsymbol{\nu}$$

表示, 其中 v 是速度, R 是轨道的曲率半径, $\boldsymbol{\tau}$ 和 $\boldsymbol{\nu}$ 分别是曲线的单位切向量和单位主法向量.

2111. 点沿着螺旋线 $\mathbf{r} = \mathbf{i}a\cos t + \mathbf{j}a\sin t + \mathbf{k}bt$ 以速度 v 做等速运动. 试计算它的加速度 w.

2112. 设运动方程为

$$\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}.$$

试确定在时刻 $t = 0, t = 1$: 1) 轨道的曲率; 2) 运动加速度向量的切向分量与法向分量.

第七章　重积分与曲线积分

§1. 直角坐标下的二重积分

1°. **二重积分的直接算法**. 有界闭区域 (S) 上连续函数 $f(x,y)$ 的二重积分和的极限

$$\iint_{(S)} f(x,y)dxdy = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_k \to 0}} \sum_i \sum_k f(x_i, y_k)\Delta x_i \Delta y_k \tag{1}$$

称为 $f(x,y)$ 展布在 XOY 平面的有界闭区域 S 上的二重积分. 其中 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$, 而和式是对所有使得点 (x_i, y_k) 属于区域 S 的值 i, k 来进行求和的.

2°. **二重积分中积分限的配置**. 积分区域可分为两种基本形式.

1) 积分区域 S (图 85) 的左边和右边由直线 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ $(x_2 > x_1)$, 而下边和上边由连续曲线 $y = \varphi_1(x)(AB)$ 和 $y = \varphi_2(x)\,(CD)$ $[\varphi_2(x) \geqslant \varphi_1(x)]$ 所围成, 其中每条曲线与垂直线 $x = X\,(x_1 < X < x_2)$ 仅有一个交点 (见图 85). 在区域 S 中变量 x 从 x_1 变到 x_2, 而变量 y 对为常量的 x 从 $y_1 = \varphi_1(x)$ 变到 $y_2 = \varphi_2(x)$. 积分 (1) 的计算可以按照下面公式归结为累次积分的方法进行:

$$\iint_{(S)} f(x,y)dxdy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy,$$

其中在计算 $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ 时, 把量 x 看作常量.

2) 积分区域 S 的下边和上边由直线 $y = y_1$ 和 $y = y_2$ $(y_2 > y_1)$, 而左边和右边由连续曲线 $x = \psi_1(y)\,(AB)$ 和 $x = \psi_2(y)\,(CD)$ $[\psi_2(y) \geqslant \psi_1(y)]$ 所围成, 其中每条曲线与水平线 $y = Y\,(y_1 < Y < y_2)$ 仅有一个交点 (图 86).

与上面类似, 我们有:

$$\iint_{(S)} f(x,y)dxdy = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx,$$

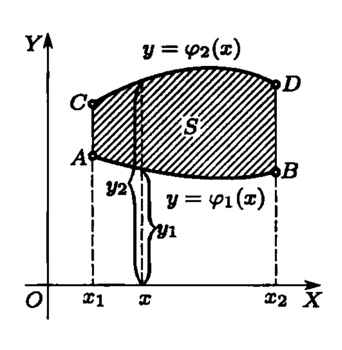


图 85

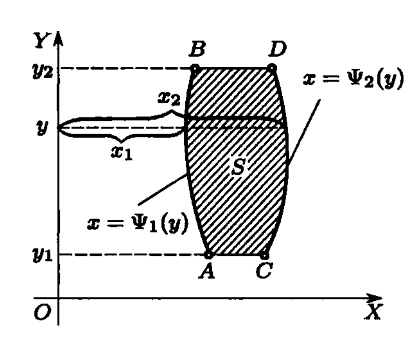


图 86

其中在计算积分 $\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$ 时, 把量 y 看作常量.

如果积分区域不属于上面形式中的任一种, 则设法将区域分为若干部分, 使每个部分都属于这两种形式中的一种.

例 1 计算积分

$$I=\int_0^1 dx\int_x^1 (x+y)dy.$$

解

$$I=\int_0^1\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=x}^{y=1}dx=\int_0^1\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)-\left(x^2+\frac{x^2}{2}\right)\right]dx=\frac{1}{2}.$$

例 2 确定积分

$$\iint_{(S)} f(x,y)dxdy$$

的积分限, 其中积分区域 S (图 87) 由双曲线 $y^2-x^2=1$ 和两条直线 $x=2$, $x=-2$ 所围成 (注意区域包含坐标原点).

解 积分区域 $ABDC$ (图 87) 由直线 $x=-2$, $x=2$ 和双曲线的两个分支

$$y=\sqrt{1+x^2},\ y=-\sqrt{1+x^2}$$

所围成, 即属于第一种形式. 我们有:

$$\iint_{(S)} f(x,y)dxdy=\int_{-2}^{2}dx\int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x,y)dy.$$

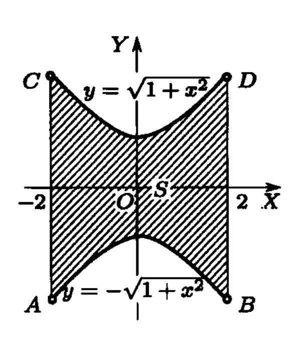


图 87

计算下列累次积分:

2113. $\int_0^2 dy\int_0^1 (x^2+2y)dx.$

2114. $\int_3^4 dx\int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}.$

2115. $\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{x^2dy}{1+y^2}.$

2116. $\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2dy}{y^2}.$

2117. $\int_{-3}^{3} dy \int_{y^2-4}^{5} (x+2y)dx.$　　**2118.** $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{a\sin\varphi}^{a} r dr.$

2119. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{3\cos\varphi} r^2 \sin^2\varphi dr.$　　**2120.** $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}dy.$

对以下累次积分所展布的区域, 写出其边界的曲线方程, 并画出这些区域:

2121. $\int_{-6}^{2} dy \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x,y)dx.$　　**2122.** $\int_1^3 dx \int_{x^2}^{x+9} f(x,y)dy.$

2123. $\int_0^4 dy \int_y^{10-y} f(x,y)dx.$　　**2124.** $\int_1^3 dx \int_{\frac{x}{3}}^{2x} f(x,y)dy.$

2125. $\int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy.$　　**2126.** $\int_{-1}^{2} dx \int_{x^2}^{x+2} f(x,y)dy.$

对指定的区域 S, 配置二重积分

$$\iint_{(S)} f(x,y)dxdy$$

按不同顺序求积时的积分限:

2127. S 是顶点为 $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(2,1)$, $C(0,1)$ 的矩形.

2128. S 是顶点为 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$ 的三角形.

2129. S 是顶点为 $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(1,1)$, $C(0,1)$ 的梯形.

2130. S 是顶点为 $A(1,2)$, $B(2,4)$, $C(2,7)$, $D(1,5)$ 的平行四边形.

2131. S 是中心在点 $O(0,0)$, 弧的端点为 $A(1,1)$, $B(-1,1)$ 的圆扇形 OAB (图 88).

2132. S 是由抛物线 BOA 和连接点 $B(-1,2)$, $A(1,2)$ 的直线段 BA 所围成的直抛物线弓形 AOB (图 89).

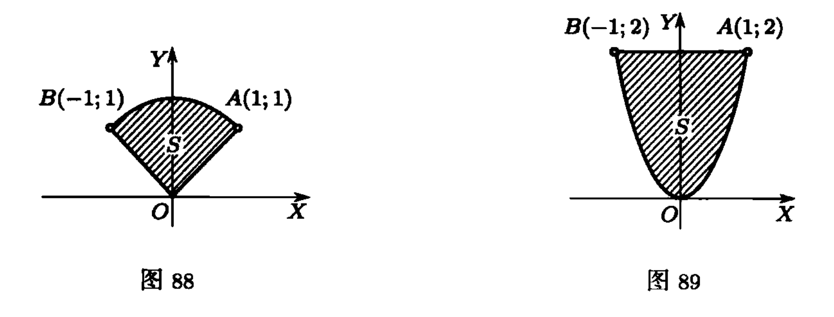


图 88　　图 89

2133. S 是以点 $O(0,0)$ 为公共中心, 半径为 $r=1$ 和 $R=2$ 的圆周所围成的圆环.

2134. S 由双曲线 $y^2-x^2=1$ 和圆周 $x^2+y^2=9$ 所围成 (注意区域包含坐标原点).

2135. 配置二重积分

$$\iint_{(S)} f(x,y)dxdy$$

的积分限, 其积分区域 S 由下列不等式确定:

a) $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x+y \leqslant 1$;　　b) $x^2+y^2 \leqslant a^2$;

c) $x^2+y^2 \leqslant x$;　　d) $y \geqslant x,\ x \geqslant -1,\ y \leqslant 1$;

e) $y \leqslant x \leqslant y+2a,\quad 0 \leqslant y \leqslant a$.

改变下列累次积分的积分顺序:

2136. $\int_0^4 dx \int_{3x^2}^{12x} f(x,y)dy$.　　**2137.** $\int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x,y)dy$.

2138. $\int_0^a dx \int_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy$.　　**2139.** $\int_{\frac{a}{2}}^a dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)dy$.

2140. $\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x,y)dy$.　　**2141.** $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$.

2142. $\int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx$.

2143. $\int_0^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^x f(x,y)dy + \int_{\frac{R\sqrt{2}}{2}}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)dy$.

2144. $\int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)dy$.

计算下列二重积分:

2145. $\iint_{(S)} xdxdy$, 其中 S 是顶点为 $O(0,0)$, $A(1,1)$ 和 $B(0,1)$ 的三角形.

2146. $\iint_{(S)} xdxdy$, 其中积分区域 S 由过点 $A(2,0)$, $B(0,2)$ 的直线和以点 $C(0,1)$ 为中心, 半径为 1 的圆周所围成 (图 90).

2147. $\iint_{(S)} \frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, 其中 S 是中心在 $O(0,0)$ 半径为 a 的圆落在第一象限的部分.

2148. $\iint_{(S)} \sqrt{x^2-y^2}dxdy$, 其中 S 是顶点为 $O(0,0)$, $A(1,-1)$ 和 $B(1,1)$ 的三角形.

2149. $\iint_{(S)} \sqrt{xy-y^2}dxdy$, 其中 S 是顶点为 $O(0,0)$, $A(10,1)$ 和 $B(1,1)$ 的三角形.

2150. $\iint_{(S)} e^{\frac{x}{y}}dxdy$, 其中 S 是由抛物线 $y^2=x$ 和直线 $x=0$, $y=1$ 所围成的曲边三角形 OAB (图 91).

2151. $\iint_{(S)} \frac{xdxdy}{x^2+y^2}$, 其中 S 是由抛物线 $y=\frac{x^2}{2}$ 和直线 $y=x$ 所围成的抛物

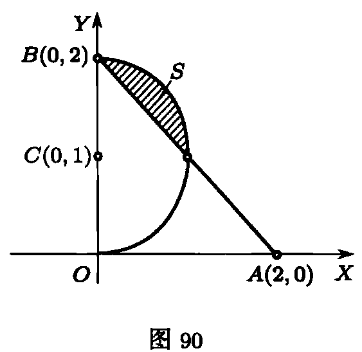


图 90

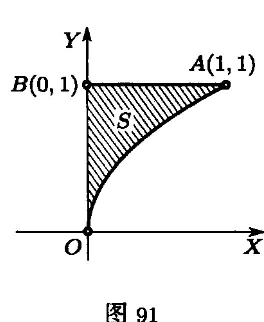


图 91

弓形.

2152. 计算积分并画出积分所展布的区域:

a) $\int_0^{\pi} dx \int_0^{1+\cos x} y^2 \sin x dy$;　　b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\cos x}^{1} y^4 dy$;

c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{3\cos y} x^2 \sin^2 y dx$.

在解 2153—2157 题时, 建议先作出图形.

2153. 计算二重积分

$$\iint_{(S)} xy^2 dxdy,$$

其中 S 是由抛物线 $y^2 = 2px$ 和直线 $x = p$ 所围成的区域.

2154*. 计算二重积分

$$\iint_{(S)} xydxdy,$$

它所展布的区域 S 由 OX 轴和圆周 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 的上半部分所围成.

2155. 计算二重积分

$$\iint_{(S)} \frac{dxdy}{\sqrt{2a-x}},$$

其中 S 是半径为 a 且与两坐标轴相切的位于第一象限的圆.

2156*. 计算二重积分

$$\iint_{(S)} ydxdy,$$

其中区域 S 由横轴和摆线的一拱

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t), \\ y = R(1 - \cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi) \end{cases}$$

所围成.

2157. 计算二重积分

$$\iint_{(S)} xydxdy,$$

积分区域 S 由两坐标轴和星形线弧

$$x = R\cos^3 t, \quad y = R\sin^3 t \quad (0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2})$$

所围成.

2158. 求函数 $f(x,y) = xy^2$ 在区域 $S\{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ 的平均值.

提示 数

$$\bar{f} = \frac{1}{S\text{ 的面积}} \iint_{(S)} f(x,y)dxdy$$

称为函数 $f(x,y)$ 在区域 S 上的平均值.

2159. 求坐标原点到圆 $(x-a)^2 + y^2 \leqslant R^2$ 内各点 $M(x,y)$ 的距离平方的平均值.

§2. 二重积分的变量变换

1°. **极坐标下的二重积分**. 当直角坐标 x, y 变换到极坐标 r, φ 时, 它们的对应关系为

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

这时对二重积分成立公式

$$\iint_{(S)} f(x,y)dxdy = \iint_{(S)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi. \tag{1}$$

如果积分区域 S 由射线 $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta\,(\alpha < \beta)$ 和曲线 $r = r_1(\varphi)$, $r = r_2(\varphi)$ 所围成, 其中 $r_1(\varphi)$ 和 $r_2(\varphi)\,(r_1(\varphi) \leqslant r_2(\varphi))$ 是闭区间 $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$ 上的单值函数, 则二重积分可以按公式

$$\iint_{(S)} F(\varphi, r)rdrd\varphi = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(\varphi, r)rdr$$

计算, 其中 $F(\varphi, r) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. 在计算积分 $\displaystyle\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(\varphi, r)rdr$ 时, 把量 φ 看作常量.

如果积分区域不属于所讨论的形式, 则把它分为若干部分, 使每一部分都是所给形式的区域.

2°. **曲线坐标下的二重积分**. 在更一般情况下, 如果 $f(x,y)$ 是连续函数, 且在二重积分

$$\iint_{(S)} f(x,y)dxdy$$

中, 需要从变量 x, y 变换到变量 u, v, 它们之间用连续可微的关系式

$$x = \varphi(u,v), \quad y = \psi(u,v)$$

联系起来, 且在平面 XOY 中区域 S 的点与平面 $UO'V$ 中区域 S' 的点之间建立了相互单值并连续的对应关系, 同时雅可比式

$$I = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

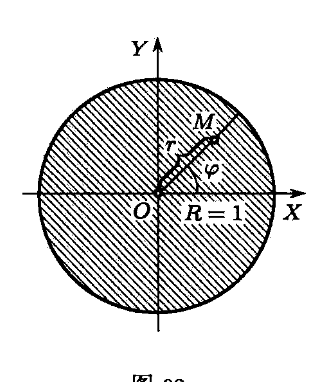


图 92

在区域 S' 中保持符号不变, 则成立公式

$$\iint_{(S)} f(x,y)dxdy = \iint_{(S')} f[\varphi(u,v),\psi(u,v)]|I|dudv.$$

新的积分限根据 S' 的形状按一般法则来确定.

例　变换到极坐标, 计算

$$\iint_{(S)} \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy,$$

其中区域 S 为半径 $R=1$, 中心在坐标原点的圆 (图 92).

解　令 $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$, 得

$$\sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{1-(r\cos\varphi)^2-(r\sin\varphi)^2} = \sqrt{1-r^2}.$$

因为在区域 S 上对任意 φ, 坐标 r 从 0 变到 1, 而 φ 从 0 变到 2π, 所以

$$\iint_{(S)} \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\sqrt{1-r^2}dr = \frac{2}{3}\pi.$$

将下列积分变换为极坐标 $r,\ \varphi$, 并按新变量配置积分限:

2160. $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy.$

2161. $\int_0^2 dx \int_0^x f(\sqrt{x^2+y^2})dy.$

2162. $\iint_{(S)} f(x,y)dxdy$, 其中 S 是由直线 $y=x,\ y=-x,\ y=1$ 所围成的三角形.

2163. $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f\left(\frac{y}{x}\right) dy.$

2164. $\iint_{(S)} f(x,y)dxdy$, 其中区域 S 由双纽线

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$$

所围成.

2165. 变换为极坐标, 计算二重积分

$$\iint_{(S)} ydxdy,$$

其中 S 是直径为 a, 中心在点 $C\left(\frac{a}{2},0\right)$ 的上半圆 (图 93).

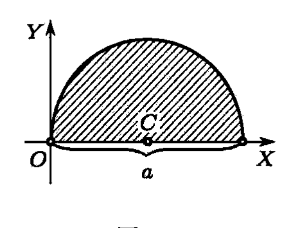


图 93

2166. 变换为极坐标, 计算二重积分

$$\iint_{(S)} (x^2+y^2)dxdy,$$

其展布区域由圆周 $x^2+y^2=2ax$ 所围成.

2167. 变换为极坐标, 计算二重积分

$$\iint_{(S)} \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy,$$

其中积分区域 S 是半径为 a, 中心在坐标原点的上半圆.

2168. 计算函数 $f(r,\varphi)=r$ 在由心脏线 $r=a(1+\cos\varphi)$ 和圆周 $r=a$ 所围成的区域上的二重积分 (注意区域不包含极点).

2169. 变换为极坐标, 计算

$$\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dy.$$

2170. 变换为极坐标, 计算

$$\iint_{(S)} \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy,$$

其中区域 S 由双纽线的一瓣

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\quad (x\geqslant 0)$$

所围成.

2171*. 变换为由公式

$$\frac{x}{a}=r\cos\varphi,\quad \frac{y}{b}=r\sin\varphi$$

所定义的广义极坐标 r, φ, 计算二重积分

$$\iint_{(S)} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy,$$

它的展布区域 S 由椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围成.

2172**. 引入新变量 $u=x+y$, $uv=y$ 后, 变换积分

$$\int_0^c dx\int_{\alpha x}^{\beta x} f(x,y)dy\quad (0<\alpha<\beta,\ c>0).$$

2173*. 在积分

$$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$$

中进行变量变换 $u=x+y$, $v=x-y$.

2174**. 计算二重积分

$$\iint_{(S)} dxdy,$$

其中 S 是由曲线

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{h^2}-\frac{y^2}{k^2}$$

所围成的区域.

提示 进行变量变换

$$x=ar\cos\varphi,\quad y=br\sin\varphi.$$

§3. 图形面积的计算

1°. **在直角坐标下的面积.** 平面区域 S 的面积等于

$$S=\iint_{(S)} dxdy.$$

如果区域 S 由不等式 $a\leqslant x\leqslant b,\ \varphi(x)\leqslant y\leqslant \psi(x)$ 所确定, 则

$$S=\int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy.$$

2°. **在极坐标下的面积.** 如果区域 S 在极坐标下由 r 和 φ 的不等式 $\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta,\ f(\varphi)\leqslant r\leqslant F(\varphi)$ 所确定, 则面积

$$S=\iint_{(S)} rd\varphi dr=\int_\alpha^\beta d\varphi\int_{f(\varphi)}^{F(\varphi)} rdr.$$

2175. 作出其面积由积分

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} dx\int_{x^2}^{x+2} dy$, b) $\displaystyle\int_0^a dy\int_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx$

表示的区域图形. 计算这些面积, 并改变积分顺序.

2176. 作出其面积由积分

a) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} d\varphi\int_0^{3\sec\varphi} rdr$, b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_a^{a(1+\cos\varphi)} rdr$

表示的区域图形. 算出这些面积.

2177. 计算由直线 $x=y,\ x=2y,\ x+y=a,\ x+3y=a\ (a>0)$ 所围成的面积.

2178. 计算位于 OX 轴上方并由 OX 轴, 抛物线 $y^2=4ax$ 和直线 $x+y=3a$ 所围成的面积.

2179*. 计算由椭圆

$$(y-x)^2+x^2=1$$

所围成的面积.

2180. 求出由抛物线

$$y^2=10x+25 \quad 和 \quad y^2=-6x+9$$

所围成的面积.

2181. 变换为极坐标, 求出由曲线

$$x^2+y^2=2x,\ x^2+y^2=4x,\ y=x,\ y=0$$

所围成的面积.

2182. 求出由直线 $r\cos\varphi=1$ 和圆周 $r=2$ 所围成的面积 (注意区域不包含极点).

2183. 求出由曲线

$$r=a(1+\cos\varphi) \quad 和 \quad r=a\cos\varphi \quad (a>0)$$

所围成的面积

2184. 求出由曲线

$$\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)^2=\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}$$

所围成的面积.

2185*. 求出由椭圆

$$(x-2y+3)^2+(3x+4y-1)^2=100$$

所围成的面积.

2186. 求出由抛物线弧 $x^2=ay$, $x^2=by$, $y^2=\alpha x$, $y^2=\beta x$ $(0<a<b,\ 0<\alpha<\beta)$ 所围成的曲线四边形的面积.

提示 引入新变量 u 和 v, 使得

$$x^2=uy,\ y^2=vx.$$

2187. 求出由曲线弧 $y^2=ax$, $y^2=bx$, $xy=\alpha$, $xy=\beta$ $(0<a<b,\ 0<\alpha<\beta)$ 所围成的曲线四边形的面积.

提示 引入新变量 u, v, 使 $xy=u$, $y^2=vx$.

§4. 立体体积的计算

以连续曲面 $z=f(x,y)$ 为顶, 平面 $z=0$ 为底, 在 XOY 平面上切割出区域 S 的垂直柱面为侧面的柱体体积 V (图 94) 等于

$$V=\iint_{(S)}f(x,y)dxdy.$$

2188. 用二重积分表示顶点为 $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(1,1,0)$ 和 $C(0,0,1)$ 的棱锥体积 (图 95), 确定其积分限.

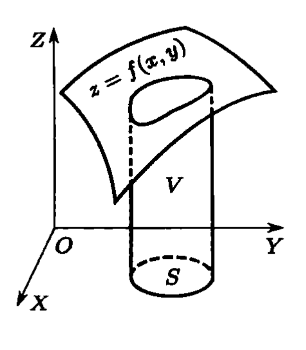


图 94

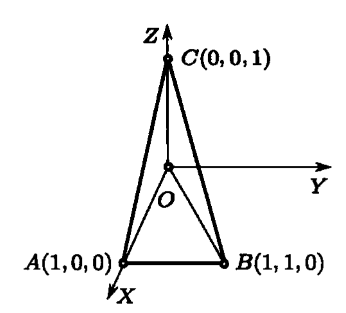


图 95

在 2189—2192 题中, 画出其体积由给定累次积分所表示的立体图形:

2189. $\displaystyle\int_0^1dx\int_0^{1-x}(1-x-y)dy.$ **2190**. $\displaystyle\int_0^2dx\int_0^{2-x}(4-x-y)dy.$

2191. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-x)dy.$　　**2192.** $\int_0^2 dx \int_{2-x}^2 (4-x-y)dy.$

2193. 画出体积由积分 $\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}dy$ 所表示的立体图形, 并根据几何的考虑求出这个积分值.

2194. 求出由椭圆抛物面 $z=2x^2+y^2+1$, 平面 $x+y=1$ 和坐标面所围成的立体体积.

2195. 立体由双曲抛物面 $z=x^2-y^2$ 和平面 $y=0$, $z=0$, $x=1$ 所围成. 计算其体积.

2196. 立体由柱面 $x^2+z^2=a^2$ 和平面 $y=0$, $z=0$, $y=x$ 所围成. 计算其体积[1].

求由下列曲面所围成的立体体积:

2197. $az=y^2,\ x^2+y^2=r^2,\ z=0.$

2198. $y=\sqrt{x},\ y=2\sqrt{x},\ x+z=6,\ z=0.$

2199. $z=x^2+y^2,\ y=x^2,\ y=1,\ z=0.$

2200. $x+y+z=a,\ 3x+y=a,\ \frac{3}{2}x+y=a,\ y=0, z=0.$

2201. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ y=\frac{b}{a}x,\ y=0,\ z=0.$

2202. $x^2+y^2=2ax,\ z=\alpha x,\ z=\beta x\quad (\alpha>\beta).$

在 2203—2211 题中利用极坐标或广义极坐标.

2203. 计算由柱面 $x^2+y^2=a^2$ 和双曲面 $x^2+y^2-z^2=-a^2$ 所围成的立体体积.

2204. 计算由圆锥面 $2(x^2+y^2)-z^2=0$ 和双曲面 $x^2+y^2-z^2=-a^2$ 所围成的立体体积.

2205. 求由曲面 $2az=x^2+y^2$, $x^2+y^2-z^2=a^2$, $z=0$ 所围成的立体体积.

2206. 确定椭球

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

的体积.

2207. 求由抛物面 $2az=x^2+y^2$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=3a^2$ 所围成的立体体积 (指位于抛物面内部的区域).

2208. 计算由 XOY 平面, 圆柱面 $x^2+y^2=2ax$ 和圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 所围成的立体体积.

2209. 计算由 XOY 平面, 曲面 $z=ae^{-(x^2+y^2)}$ 和圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 所围成的立体体积.

2210. 计算由 XOY 平面, 抛物面 $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ 和圆柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{2x}{a}$ 所围成

[1] 这里应假设区域位于第一卦限, 否则区域不唯一. —— 译注

的立体体积.

2211. 抛物面 $x^2+y^2-z^2=a^2$ 按怎样的比例将球 $x^2+y^2+z^2 \leqslant 3a^2$ 的体积分为两部分?

2212*. 求由曲面 $z=x+y$, $xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=2x, z=0$ $(x>0,\ y>0)$ 所围成的立体体积.

§5. 曲面面积的计算

在 XOY 平面上的投影为区域 S 的光滑单值曲面 $z=f(x,y)$, 其面积 σ 等于

$$\sigma=\iint_{(S)}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy.$$

2213. 求出平面 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ 位于三个坐标平面之间的那部分面积.

2214. 求出圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ $(z \geqslant 0)$ 包含在平面 $z=mx$ 和 $z=nx$ $(m>n>0)$ 之间的那部分面积.

2215*. 计算圆锥面 $x^2-y^2=z^2$ 位于第一卦限并由平面 $y+z=a$ 所围成的那部分面积.

2216. 计算圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 被球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 截下的那部分面积.

2217. 计算球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 截下的那部分面积.

2218. 计算抛物面 $y^2+z^2=2ax$ 包含在柱面 $y^2=ax$ 与平面 $x=a$ 之间的那部分面积.

2219. 计算圆柱面 $x^2+y^2=2ax$ 包含在 XOY 平面和圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 之间的那部分面积.

2220.1*. 计算圆锥面 $x^2-y^2=z^2$ 位于圆柱 $x^2+y^2=2ax$ 内部的那部分面积.

2220.2*. 求出柱面 $y^2=4x$ 被球面 $x^2+y^2+z^2=5x$ 截下的那部分面积.

2220.3*. 求出圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 截下的那部分面积.

2221*. 证明: 抛物面 $x^2+y^2=2az$ 和 $x^2-y^2=2az$ 被圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 截下的那部分面积相等.

2222*. 半径为 a 的球被直径等于球半径的两个圆柱体贯穿, 这两个圆柱沿球的一条直径相切. 求球的剩下部分的体积和表面面积.

2223*. 在半径为 a 的球内穿一个边长也等于 a 的正方形孔, 孔的轴线与球的一条直径相重合. 求由孔所切割下来的球面面积.

2224*. 计算螺旋面 $z=c\arctan\dfrac{y}{x}$ 位于第一卦限并包含在柱面 $x^2+y^2=a^2$ 和 $x^2+y^2=b^2$ $(0<a<b)$ 之间的那部分面积.

§6. 二重积分在力学上的应用

1°. **薄板的质量和静力矩**. 如果把 XOY 平面上的区域 S 看作薄板, 而 $\rho(x,y)$ 为薄板在点 (x,y) 的面密度, 则薄板质量 M 和它关于 OX 轴、OY 轴的静力矩 M_X, M_Y 分别表示为二重积分

$$M=\iint_{(S)}\rho(x,y)dxdy,$$

$$M_X=\iint_{(S)}y\rho(x,y)dxdy, \tag{1}$$

$$M_Y=\iint_{(S)}x\rho(x,y)dxdy.$$

如果薄板是均匀的, 则 $\rho(x,y)=$ 常数.

2°. **薄板的质心坐标**. 如果 $C(\bar{x},\bar{y})$ 是薄板的质心, 则

$$\bar{x}=\frac{M_Y}{M},\ \bar{y}=\frac{M_x}{M},$$

其中 M 是薄板的质量, M_X, M_Y 是它关于坐标轴的静力矩 (参阅 1°). 如果薄板是均匀的, 那么在公式 (1) 中可以置 $\rho=1$.

3°. **薄板的转动惯量**. 薄板关于 OX 轴和 OY 轴的转动惯量分别等于

$$I_X=\iint_{(S)}y^2\rho(x,y)dxdy,\quad I_Y=\iint_{(S)}x^2\rho(x,y)dxdy. \tag{2}$$

薄板关于原点的转动惯量为

$$I_O=\iint_{(S)}(x^2+y^2)\rho(x,y)dxdy=I_X+I_Y. \tag{3}$$

在公式 (2) 和 (3) 中令 $\rho(x,y)=1$, 我们得到平面图形的几何转动惯量.

2225. 半径为 R 的圆形薄板, 如果它的密度与点到薄板中心的距离成正比, 且薄板边缘处的密度等于 δ, 求薄板的质量.

2226. 薄板形状是以 $OB=a$, $OA=b$ 为直角边的直角三角形, 而且它在任意点的密度等于这点到 OA 的距离. 求薄板关于直角边 OA 和 OB 的静力矩.

2227. 计算由曲线 $y=\sin x$ 及过坐标原点和正弦曲线顶点 $A\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ 的直线 OA 所围成的图形 $OmAnO$ 的质心坐标 (图 96).

2228. 求由心脏线 $r=a(1+\cos\varphi)$ 所围成图形的质心坐标.

2229. 求半径为 a 顶角为 2α 扇形的质心坐标 (图 97).

2230. 计算由抛物线 $y^2=4x+4$ 和 $y^2=-2x+4$ 所围成图形的质心坐标.

2231. 计算由直线 $x+y=2$, $x=2$, $y=2$ 所围成的三角形关于 OX 轴的转动惯量.

2232. 求直径为 d 和 $D\,(d<D)$ 的圆环 a) 关于它的中心和 b) 关于它的直径的转动惯量.

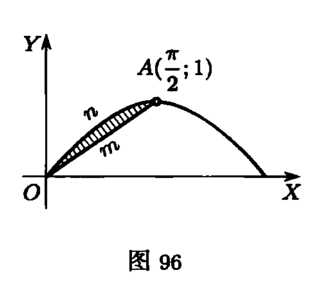


图 96

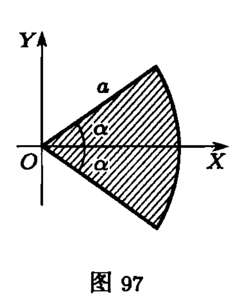


图 97

2233. 计算边长为 a 的正方形关于过它的一个顶点并与正方形所在平面垂直的轴的转动惯量.

2234*. 计算抛物线 $y^2 = ax$ 被直线 $x = a$ 所截成的弓形关于直线 $y = -a$ 的转动惯量.

2235*. 计算由双曲线 $xy = 4$ 和直线 $x + y = 5$ 所围成的区域关于直线 $x = y$ 的转动惯量.

2236*. 在边长为 a 的正方形薄板中, 它的密度与到其中一个顶点的距离成正比, 计算薄板关于过此顶点的一边的转动惯量.

2237. 求心脏线 $r = a(1 + \cos\varphi)$ 的图形关于极点的转动惯量.

2238. 计算双纽线 $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$ 的图形关于过极点并和它的所在平面垂直的轴的转动惯量.

2239*. 计算由摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ 的一拱和 OX 轴所围成的均匀薄板关于 OX 轴的转动惯量.

§7. 三重积分

1°. **直角坐标下的三重积分**. 对应于三重和的极限

$$\iiint_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\substack{\max\Delta x_i\to 0\\ \max\Delta y_j\to 0\\ \max\Delta z_k\to 0}} \sum_i\sum_j\sum_k f(x_i,y_j,z_k)\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k$$

称为展布于区域 V 上的函数 $f(x,y,z)$ 的三重积分. 三重积分的计算可归结为依次计算三个通常的 (单重) 积分或计算一个二重积分和一个单重积分.

例 1 计算

$$I = \iiint_{(V)} x^3y^2z dxdydz,$$

其中区域 V 由不等式

$$0 \leqslant x \leqslant 1,\quad 0 \leqslant y \leqslant x,\quad 0 \leqslant z \leqslant xy$$

所确定.

解　我们有

$$I=\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^{xy} x^3y^2zdz=\int_0^1 dx\int_0^x x^3y^2\frac{z^2}{2}\Big|_0^{xy}dy$$
$$=\int_0^1 dx\int_0^x \frac{x^5y^4}{2}dy=\int_0^1 \frac{x^5}{2}\cdot\frac{y^5}{5}\Big|_0^x dx=\int_0^1\frac{x^{10}}{10}dx=\frac{1}{110}.$$

例 2　计算

$$\iiint_{(V)} x^2dxdydz,$$

其中 V 为椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的内部.

解　$\iiint_{(V)} x^2dxdydz=\int_{-a}^a x^2dx\iint_{(S_{yz})}dydz=\int_{-a}^a x^2S_{yz}dx,$

其中 S_{yz} 是椭圆 $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$ 内部的区域, $x=$ 常数时它的面积等于

$$S_{yz}=\pi b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\dot{c}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

所以最后我们有

$$\iiint_{(V)} x^2dxdydz=\pi bc\int_{-a}^a x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{4}{15}\pi a^3bc.$$

2°. **三重积分中的变量变换**. 如果在三重积分

$$\iiint_{(V)} f(x,y,z)dxdydz$$

中要从变量 x, y, z 变换到变量 u, v, w, 它们之间的关系为 $x=\varphi(u,v,w)$, $y=\psi(u,v,w)$, $z=\chi(u,v,w)$, 其中函数 φ, ψ, χ 满足:

1) 函数及其一阶偏导数连续;

2) 建立了空间 $OXYZ$ 中积分区域 V 的点与空间 $O'UVW$ 中某区域 V' 的点之间的双方单值的连续对应;

3) 这些函数的函数行列式 (雅可比式)

$$I=\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}$$

在区域 V' 中保持不变号, 则成立公式

$$\iiint_{(V)} f(x,y,z)dxdydz$$
$$=\iiint_{(V')} f[\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w)]|I|dudvdw.$$

特别地:

1) 对柱面坐标 r, φ, h (图 98), 其中

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\cos\psi\sin\varphi, \quad z = h,$$

我们得到 $I = r$;

2) 对球面坐标 φ, ψ, r (φ 为经度, ψ 为纬度, r 为向径 (图 99)), 其中

$$x = r\cos\psi\cos\varphi, \quad y = r\cos\psi\sin\varphi, \quad z = r\sin\psi,$$

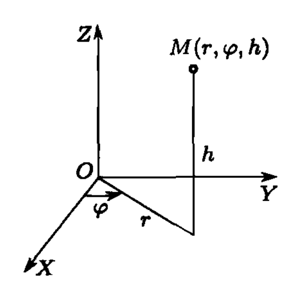


图 98

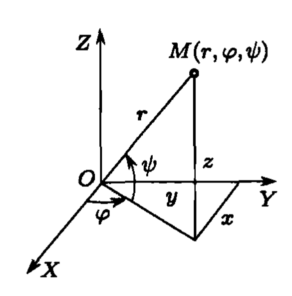


图 99

我们有 $I = r^2\cos\psi$.

例 3 变换为球面坐标, 计算

$$\iiint_{(V)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz,$$

其中 V 是半径为 R 的球.

解 对于球体来说, 球面坐标 φ (经度), ψ (纬度), r (向径) 的变化范围为:

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} < \psi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant r \leqslant R.$$

所以我们有

$$\iiint_{(V)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$$
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^R rr^2\cos\psi dr = \pi R^4.$$

3°. **三重积分的应用.** 三维空间 $OXYZ$ 中区域的体积等于

$$V = \iiint_{(V)} dxdydz.$$

区域 V 的物体的质量为

$$M = \iiint_{(V)} \gamma(x,y,z)dzdydz,$$

体积为 V 的物体的质量为

$$M = \iiint_{(V)} \gamma(x,y,z)dxdydz,$$

其中 $\gamma(x,y,z)$ 是物体在点 (x,y,z) 处的密度.

物体关于坐标平面的静力矩为

$$M_{XY} = \iiint_{(V)} \gamma(x, y, z) z dx dy dz;$$

$$M_{YZ} = \iiint_{(V)} \gamma(x, y, z) x dx dy dz;$$

$$M_{ZX} = \iiint_{(V)} \gamma(x, y, z) y dx dy dz.$$

质心坐标为

$$\bar{x} = \frac{M_{YZ}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{ZX}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{XY}}{M}.$$

如果物体是均匀的, 则在质心坐标的公式中可以令 $\gamma(x, y, z) = 1$.

关于坐标轴的转动惯量为

$$I_X = \iiint_{(V)} (y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz;$$

$$I_Y = \iiint_{(V)} (z^2 + x^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz;$$

$$I_Z = \iiint_{(V)} (x^2 + y^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz.$$

在这些公式中令 $\gamma(x, y, z) = 1$, 就得到了立体的几何转动惯量.

A. 三重积分的计算

对指定的区域 V, 配置三重积分

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz$$

的积分限:

2240. V 为由平面

$$x + y + z = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

所围成的四面体.

2241. V 为由曲面

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad z = 0, \quad z = H$$

所围成的圆锥体.

2242. V 为由曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, \quad z = c$$

所围成的锥体.

2243. V 为由曲面

$$z = 1 - x^2 - y^2, \quad z = 0$$

所围成的立体.

计算下列积分:

2244. $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}}$.

2245. $\int_0^2 dx \int_0^{2\sqrt{x}} dy \int_0^{\sqrt{\frac{4x-y^2}{2}}} xdz$.

2246. $\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}$.

2247. $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} xyzdz$.

2248. 计算

$$\iiint_{(V)} \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3},$$

其中 V 为由坐标平面和平面 $x+y+z=1$ 所围成的积分区域.

2249. 计算

$$\iiint_{(V)} (x+y+z)^2 dxdydz,$$

其中 V 为抛物体 $2az \geqslant x^2+y^2$ 和球 $x^2+y^2+z^2 \leqslant 3a^2$ 的公共部分.

2250. 计算

$$\iiint_{(V)} z^2 dzdydz,$$

其中 V 为球 $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$ 和 $x^2+y^2+z^2 \leqslant 2Rz$ 的公共部分.

2251. 计算

$$\iiint_{(V)} zdxdydz,$$

其中 V 为由平面 $z=0$ 和椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的上半部分所围成的区域.

2252. 计算

$$\iiint_{(V)} \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) dxdydz,$$

其中 V 为椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的内部.

2253. 计算

$$\iiint_{(V)} zdxdydz,$$

其中 V 为由圆锥面 $z^2=\frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)$ 和平面 $z=h$ 所围成的区域.

2254. 变换为柱面坐标, 计算

$$\iiint_{(V)} dxdydz,$$

其中 V 为由曲面 $x^2+y^2+z^2=2Rz$ 和 $x^2+y^2=z^2$ 所围成并包含点 $(0,0,R)$ 的区域.

2255. 首先变换为柱面坐标, 而后计算

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}dz.$$

2256. 首先变换为柱面坐标, 而后计算

$$\int_0^{2r} dx \int_{-\sqrt{2rx-x^2}}^{\sqrt{2rx-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{4r^2-x^2-y^2}} dz.$$

2257. 首先变换为球面坐标, 而后计算

$$\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)dz.$$

2258. 变换为球面坐标, 计算积分

$$\iiint_{(V)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz,$$

其中 V 为球体 $x^2+y^2+z^2 \leqslant x$.

B. 利用三重积分计算体积

2259. 利用三重积分计算由曲面

$$y^2 = 4a^2 - 3ax, \ y^2 = ax, \ z = \pm h$$

所围成的立体体积.

2260**. 计算圆柱体 $x^2+y^2=2ax$ 被包含在抛物面 $x^2+y^2=2az$ 和 XOY 平面之间那部分的体积.

2261*. 计算由球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和圆锥面 $z^2=x^2+y^2$ 所围成的 (关于圆锥外部的) 立体体积.

2262*. 计算由球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 和抛物面 $x^2+y^2=3z$ 所围成的 (关于抛物面内部的) 立体体积.

2263. 计算由 XOY 平面, 圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 所围成的 (关于柱面内部的) 立体体积.

2264.1 计算由抛物面 $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=2\frac{x}{a}$ 和平面 $x=a$ 所围成的立体体积.

2264.2. 计算由曲面

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}$$

所围成的立体体积.

2264.3. 求由曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=2, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \quad z \geqslant 0$$

所围成的立体体积.

C. 三重积分在力学和物理学上的应用

2265. 在长方体 $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$ 中, 如果在点 (x,y,z) 处的密度

为 $\rho(x,y,z)=x+y+z$, 求它的质量 M.

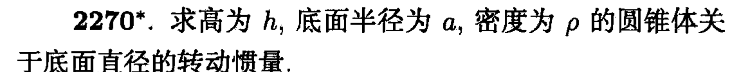
2266. 从球的第一卦限的部分 $x^2+y^2+z^2\leqslant c^2,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0$ 截下由坐标面和平面 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1\ (a\leqslant c,\ b\leqslant c)$ 所围成的立体 $OABC$ (图 100). 如果它在每一点 (x,y,z) 的密度等于这点的 Z 坐标, 求此立体的质量.

2267*. 物体呈半球形 $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2,\ z\geqslant 0$, 它的密度变化与点到中心的距离成正比, 求此物体的质心.

2268. 求由抛物面 $y^2+2z^2=4x$ 和平面 $x=2$ 所围成的立体质心.

2269. 求高为 h, 底面半径为 a 的圆柱体关于圆柱底的直径的转动惯量.

2270*. 求高为 h, 底面半径为 a, 密度为 ρ 的圆锥体关于底面直径的转动惯量.



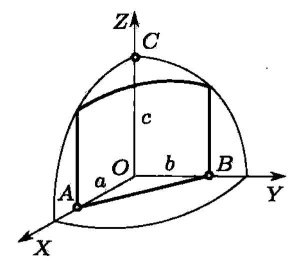


图 100

2271**. 求高为 h, (在过轴的截面上) 半顶角为 α 的均匀圆锥体对于位在其顶点的具有单位质量的点的引力.

2272**. 证明一个匀质球对球外质点的引力与球的全部质量集中于球心时的引力一样.

§8. 依赖于参数的反常积分. 反常重积分

1°. **对参数的微分法**. 对函数 $f(x,\alpha)$, $f'_\alpha(x,\alpha)$ 和相应的反常积分作某些限制[①], 就成立莱布尼茨法则

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^\infty f(x,\alpha)dx=\int_a^\infty f'_\alpha(x,\alpha)dx.$$

例 1 利用对参数的微分法计算

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx \quad (\alpha>0,\ \beta>0).$$

解 设

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx=F(\alpha,\beta).$$

于是

$$\frac{\partial F(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}=-\int_0^\infty xe^{-\alpha x^2}dx=\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha x^2}\Big|_0^\infty=-\frac{1}{2\alpha}.$$

由此得出 $F(\alpha,\beta)=-\dfrac{1}{2}\ln\alpha+C(\beta)$. 为了求出 $C(\beta)$, 在最后一式中令 $\alpha=\beta$, 我们有 $0=-\dfrac{1}{2}\ln\beta+C(\beta)$.

① 参看Л.Д.Кудрявцев (库德里亚夫采夫) 的 Краткий курс математического анализа, т.2.гл.5.§49. 50 – Висагинас: 《Alfa》, 1998. (译者注: 读者可参考我国数学分析教材中的有关内容, 也可参阅菲赫金哥尔茨《微积分学教程》(第 8 版) (中译本第十四章和第十六章 §5)).

这样 $C(\beta) = \frac{1}{2}\ln\beta$, 亦即得到

$$F(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2}\ln\alpha + \frac{1}{2}\ln\beta = \frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

2°. **反常二重积分**. a) **无界区域的情形**. 如果函数 $f(x, y)$ 在无界区域 S 上连续, 则令

$$\iint_{(S)} f(x,y)dxdy = \lim_{\sigma\to S}\iint_{(\sigma)} f(x,y)dxdy, \tag{1}$$

其中 σ 是完全落在 S 中的有界区域, 而且 $\sigma \to S$ 表示按任意方式扩大区域 σ, 使区域 S 中的任意一点总包含在足够大的 σ 里面. 如果右面的极限存在且不依赖于区域 σ 的选择, 则相应的反常积分称为收敛, 在相反的情形, 称为发散.

如果被积函数 $f(x, y)$ 非负 ($f(x, y) \geqslant 0$), 则反常积分收敛的充分必要条件为: 至少有一系列以区域 S 为极限的区域 σ, 使等式 (1) 右面的极限存在.

b) **函数间断的情形**. 如果函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 S 中除点 $P(a, b)$ 外的所有点连续, 则令

$$\iint_{(S)} f(x,y)dxdy = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{(S_\varepsilon)} f(x,y)dxdy, \tag{2}$$

其中 S_ε 是从 S 中除去包含 P 点的直径为 ε 的小区域而得到. 如果极限 (2) 不依赖于 S 中所除去小区域为怎样的形状而总存在, 那么所讨论的反常积分称为收敛, 相反的情形称为发散.

如果 $f(x, y) \geqslant 0$, 则等式 (2) 右面的极限总是不依赖于从区域 S 中除去小区域的形状; 特别地, 可以取半径为 $\frac{\varepsilon}{2}$, P 点为中心的圆作为这样的小区域.

反常二重积分的概念可以容易地推广到三重积分的情形.

例 2 研究积分

$$\iint_{(S)} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^p} \tag{3}$$

的收敛性, 其中 S 为整个 XOY 平面.

解 设 σ 是半径为 ρ, 中心在坐标原点的圆. 变换为极坐标, 当 $p \neq 1$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} I(\sigma) &= \iint_{(\sigma)} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^p} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho} \frac{rdr}{(1+r^2)^p} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\frac{(1+r^2)^{1-p}}{1-p}\bigg|_0^{\rho} d\varphi = \frac{\pi}{1-p}[(1+\rho^2)^{1-p}-1]. \end{aligned}$$

如果 $p < 1$, 则 $\lim\limits_{\sigma\to S} I(\sigma) = \lim\limits_{\rho\to\infty} I(\sigma) = \infty$, 积分发散. 如果 $p > 1$, 则 $\lim\limits_{\rho\to\infty} I(\sigma) = \frac{\pi}{p-1}$, 积分收敛. 当 $p = 1$, 有 $I(\sigma) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho} \frac{rdr}{1+r^2} = \pi\ln(1+\rho^2)$, $\lim\limits_{\rho\to\infty} I(\sigma) = \infty$, 即积分发散.

因此, 积分 (3) 当 $p > 1$ 时收敛.

2273. 如果

$$f(x)=\int_x^{\infty} e^{-xy^2}dy \quad (x>0),$$

求出 $f'(x)$.

2274. 证明: 函数

$$u=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xf(z)}{x^2+(y-z)^2}dz$$

满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

2275. 对函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换 $F(p)$, 由公式

$$F(p)=\int_0^{\infty} e^{-pt}f(t)dt$$

定义. 如果: a) $f(t)=1$; b) $f(t)=e^{\alpha t}$; c) $f(t)=\sin\beta t$; d) $f(t)=\cos\beta t$, 求出 $F(p)$.

2276. 利用公式

$$\int_0^1 x^{n-1}dx=\frac{1}{n} \quad (n>0),$$

计算积分

$$\int_0^1 x^{n-1}\ln x dx.$$

2277*. 利用公式

$$\int_0^{\infty} e^{-pt}dt=\frac{1}{p} \quad (p>0),$$

计算积分

$$\int_0^{\infty} t^2 e^{-pt}dt.$$

应用对参数的微分法, 计算下列积分:

2278. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx \quad (\alpha>0,\ \beta>0).$

2279. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx dx \quad (\alpha>0,\ \beta>0).$

2280. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\arctan \alpha x}{x(1+x^2)}dx.$

2281. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx \ (|\alpha|<1).$

2282. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}dx \ (\alpha\geqslant 0).$

计算下列反常积分:

2283. $\displaystyle\int_0^{\infty} dx\int_0^{\infty} e^{-(x+y)}dy.$

2284. $\displaystyle\int_0^1 dy\int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}dx.$

2285. $\displaystyle\iint_{(S)} \frac{dxdy}{x^4+y^2}$, 其中区域 S 由不等式 $x\geqslant 1,\ y\geqslant x^2$ 所确定.

2286*. $\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \frac{dy}{(x^2+y^2+a^2)^2}$ $(a>0)$.

2287. 由公式 $I=\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$ 定义的欧拉 - 泊松积分, 也可写成 $I=\int_0^{\infty} e^{-y^2}dy$ 的形式, 将这两式相乘, 然后变换为极坐标, 计算 I.

2288. 计算 $\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} \frac{dz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}$.

研究下列二重反常积分的收敛性:

2289**. $\iint_{(S)} \ln\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, 其中 S 是圆 $x^2+y^2\leqslant 1$.

2290. $\iint_{(S)} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{\alpha}}$, 其中 S 为由不等式 $x^2+y^2\geqslant 1$ 所确定的区域 (圆的"外部").

2291*. $\iint_{(S)} \frac{dxdy}{\sqrt[3]{(x-y)^2}}$, 其中 S 为正方形 $|x|\leqslant 1$, $|y|\leqslant 1$.

2292. $\iiint_{(V)} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}}$, 其中 V 为由不等式 $x^2+y^2+z^2\geqslant 1$ 所确定的区域 (球的"外部").

§9. 曲线积分

1°. **第一类曲线积分**. 设 $f(x,y)$ 为连续函数. $y=\varphi(x)[a\leqslant x\leqslant b]$ 为某一光滑曲线 C 的方程.

作点列 $M_i(x_i,y_i)(i=0,1,2,\cdots,n)$, 将曲线 C 划分为小弧段元 $\widehat{M_{i-1}M_i}=\Delta s_i$, 并作积分和 $S_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta s_i$, 其中 Δs_i 是弧 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 的长度. 当 $n\to\infty$ 且 $\max\Delta s_i\to 0$ 时, 这个和的极限

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \max\Delta s_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta s_i = \int_C f(x,y)ds$$

称为第一类曲线积分 (ds 为弧长微分), 并按公式

$$\int_C f(x,y)ds=\int_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}dx$$

计算.

在用参数给出的曲线 C 的情况下: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ $[\alpha\leqslant t\leqslant\beta]$, 我们有:

$$\int_C f(x,y)ds=\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(x)+\psi'^2(t)}dt.$$

可以同样讨论三元函数 $f(x,y,z)$ 沿空间曲线的第一类曲线积分, 它的计算方法是类似的. 第一类曲线积分与积分路径的方向无关; 如果被积函数 f 解释为积分曲线 C 的线密度, 那么这个积分是曲线 C 的质量.

例 1 计算曲线积分

$$\int_C (x+y)ds,$$

其中 C 是顶点为 $A(1,0)$, $B(0,1)$ 和 $O(0,0)$ 的三角形 ABO 的边界 (图 101).

解 这里 AB 的方程: $y=1-x$, OB 的方程: $x=0$, OA 的方程: $y=0$. 因此我们有:

$$\int_C (x+y)ds = \int_{AB}(x+y)ds + \int_{BO}(x+y)ds + \int_{OA}(x+y)ds$$
$$= \int_0^1 \sqrt{2}dx + \int_0^1 ydy + \int_0^1 xdx = \sqrt{2}+1.$$

Y B O A X

图 101

2°. **第二类曲线积分**. 如果 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 是连续函数, $y=\varphi(x)$ 是当 x 从 a 变到 b 时画出的光滑曲线段 C, 则对应的第二类曲线积分表示为下面形式:

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b [P(x,\varphi(x)) + \varphi'(x)Q(x,\varphi(x))]dx.$$

更一般地, 当曲线 C 由参数形式给出: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, 其中 t 从 α 变到 β, 则我们有:

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$
$$= \int_\alpha^\beta [P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]dt.$$

对于沿空间曲线的第二类曲线积分, 成立类似的公式.

当积分路径的方向改变时, 第二类曲线积分**取相反的符号**. 在力学上, 这个积分可解释为相应的变力 $\{P(x,y), Q(x,y)\}$ 沿积分曲线 C 所作的功.

例 2 计算曲线积分

$$\int_C y^2dx + x^2dy,$$

其中 C 是椭圆 $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ 的上面一半沿顺时针方向.

解 我们有

$$\int_C y^2dx + x^2dy = \int_\pi^0 [b^2\sin^2 t(-a\sin t) + a^2\cos^2 t\cdot b\cos t]dt$$
$$= -ab^2\int_\pi^0 \sin^3 tdt + a^2b\int_\pi^0 \cos^3 tdt = \frac{4}{3}ab^2.$$

3°. **全微分的情形**. 如果第二类曲线积分的被积表达式是某一单值函数 $U=U(x,y)$ 的全微分, 即 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=dU(x,y)$, 则此曲线积分与积分路径无关, 并成立牛顿 - 莱布尼茨公式

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = U(x_2,y_2) - U(x_1,y_1), \tag{1}$$

其中 (x_1, y_1) 为路径的起点, (x_2, y_2) 为终点. 特别地, 如果积分曲线 C 是封闭的周线, 则

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \tag{2}$$

如果 1) 积分周线 C 完全包含在某个单连通区域 S 内, 2) 函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 及它们的一阶偏导数在区域 S 内都连续, 则函数 U 存在的充要条件是在区域 S 中恒满足等式

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{3}$$

(参阅第六章 §8). 当条件 1) 和 2) 不满足, 关系式 (3) 不能保证单值函数 U 的存在, 而且公式 (1) 和 (2) 可能不成立 (参见 2332 题). 我们指出根据函数 $U(x,y)$ 的全微分, 利用曲线积分求函数 $U(x,y)$ 的方法 (亦即全微分积分法的一种). 取折线 P_0P_1M 作积分路径 C (图 102), 其中 $P_0(x_0, y_0)$ 为固定点, $M(x,y)$ 为变动点. 这时沿 P_0P_1 我们有 $y = y_0$ 和 $dy = 0$, 而沿 P_1M 有 $dx = 0$, 我们得到:

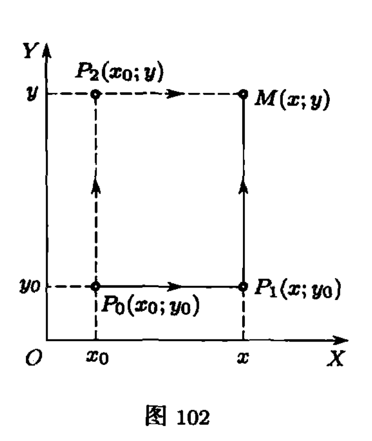


图 102

$$U(x,y) - U(x_0,y_0) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$
$$= \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy.$$

类似地, 沿折线 P_0P_2M 积分, 有

$$U(x,y) - U(x_0,y_0) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx.$$

例 3 $(4x+2y)dx + (2x-6y)dy = dU$, 求出 U.

解 这里 $P(x,y) = 4x+2y$, $Q(x,y) = 2x-6y$, 而且条件 (3) 显然满足. 设 $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, 于是

$$U(x,y) = \int_0^x 4xdx + \int_0^y (2x-6y)dy + C = 2x^2 + 2xy - 3y^2 + C,$$

或者

$$U(x,y) = \int_0^y -6ydy + \int_0^x (4x+2y)dx + C = -3y^2 + 2x^2 + 2xy + C,$$

其中 $C = U(0,0)$ 是任意常数.

4°. **平面上的格林公式**. 如果 C 是区域 S 的边界, 函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 及它们的一阶偏导数在闭区域 $S \cup C$ 上都连续, 则成立格林公式

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

其中周线 C 绕行方向的选择要使区域 S 总保持在它的左面.

5°. **曲线积分的应用**. 1) 由闭周线 C 围成的区域 S 的面积等于

$$S = -\oint_C ydx = \oint_C xdy$$

(周线的绕行方向选择为逆时针方向).

下面的面积公式在应用上更加方便:

$$S = \frac{1}{2}\oint_C (xdy - ydx) = \frac{1}{2}\oint_C x^2 d\left(\frac{y}{x}\right).$$

2) 沿着路径 C, 其投影为 $X = X(x,y,z)$, $Y = Y(x,y,z)$, $Z = Z(x,y,z)$ 的力所做的功 (或对应于力场的功), 表示为积分

$$A = \int_C Xdx + Ydy + Zdz.$$

如果力场为有势场, 即如果存在函数 $U = U(x,y,z)$ (势函数或力函数), 使得

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X,\ \frac{\partial U}{\partial y} = Y,\ \frac{\partial U}{\partial z} = Z,$$

则力所做的功与路径 C 的形状无关, 且等于

$$A = \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} Xdx + Ydy + Zdz$$
$$= \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} dU = U(x_2,y_2,z_2) - U(x_1,y_1,z_1),$$

其中 (x_1,y_1,z_1) 为路径起点, (x_2,y_2,z_2) 为路径终点.

A. 第一类曲线积分

计算下列曲线积分:

2293. $\int_C xyds$, 其中 C 是正方形 $|x| + |y| = a(a > 0)$ 的边界.

2294. $\int_C \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, 其中 C 为连接点 $O(0,0)$ 和 $A(1,2)$ 的直线段.

2295. $\int_C xyds$, 其中 C 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 位于第一象限的部分.

2296. $\int_C y^2 ds$, 其中 C 为摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ 的第一拱.

2297. $\int_C \sqrt{x^2+y^2}ds$, 其中 C 为圆的渐伸线弧 $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

2298. $\int_C (x^2+y^2)^2 ds$, 其中 C 为对数螺线 $r = ae^{m\varphi}\,(m > 0)$ 从点 $A(0,a)$ 到点 $O(-\infty,0)$ 的弧.

2299. $\int_C (x+y)ds$, 其中 C 为双纽线 $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ 的右面一瓣.

2300. $\int_C (x+z)ds$, 其中 C 为曲线弧 $x = t$, $y = \frac{3t^2}{\sqrt{2}}$, $z = t^3$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$.

2301. $\int_C \frac{ds}{x^2+y^2+z^2}$, 其中 C 为螺旋曲线 $x = a\cot t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ 的第一圈.

2302. $\int_C \sqrt{2y^2+z^2}ds$, 其中 C 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x=y$.

2303*. 求出抛物柱体 $y=\frac{3}{8}x^2$ 被平面 $z=0$, $x=0$, $z=x$, $y=6$ 围住部分的侧面积.

2304. 求圆锥螺旋线 $x=ae^t\cos t$, $y=ae^t\sin t$, $z=ae^t$ 从点 $O(0,0,0)$ 到点 $A(a,0,a)$ 的弧长.

2305. 如果椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上每一点 $M(x,y)$ 的线密度等于 $|y|$, 确定椭圆围道的质量.

2306. 如果螺旋线 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ 上每一点的密度在数值上等于该点的向径长度, 求此螺旋线第一圈的质量.

2307. 确定摆线的半拱弧

$$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)\quad (0\leqslant t\leqslant \pi)$$

的重心坐标.

2308. 求出螺旋线 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ 的第一圈关于 OZ 轴的转动惯量.

2309. 质量 M 以不变的密度分布在圆周 $x^2+y^2=a^2$, $z=0$ 上, 它对质量为 m、位于点 $A(0,0,b)$ 处的引力为多少?

B. 第二类曲线积分

计算下列曲线积分:

2310. $\int_{AB}(x^2-2xy)dx+(2xy+y^2)dy$, 其中 AB 为抛物线 $y=x^2$ 从点 $A(1,1)$ 到点 $B(2,4)$ 的弧.

2311. $\int_C(2a-y)dx+xdy$, 其中 C 为摆线

$$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$$

沿着参数 t 增加方向的第一拱弧.

2312. $\int_{OA}2xydx-x^2dy$, 沿不同路径从原点 $O(0,0)$ 到终点 $A(2,1)$ (图 103):

a) 直线 OmA;

b) 抛物线 OnA, OY 轴是它的对称轴;

c) 抛物线 OpA, OX 轴是它的对称轴;

d) 折线 OBA;

e) 折线 OCA.

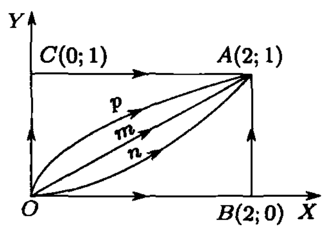


图 103

2313. $\int_{OA}2xydx+x^2dy$, 条件同 2312 题.

2314*. $\oint \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$, 沿圆周 $x^2+y^2=a^2$ 按逆时针方向绕行.

2315. $\int_C y^2dx+x^2dy$, 其中 C 是椭圆 $x=a\cos t,\ y=b\sin t$ 的上半部分, 沿顺时针方向.

2316. $\int_{AB}\cos ydx-\sin xdy$, 所沿线段 AB 平分第二象限角, 点 A 的横坐标等于 2, 点 B 的纵坐标等于 2.

2317. $\oint_C \frac{xy(ydx-xdy)}{x^2+y^2}$, 其中 C 为双纽线 $r^2=a^2\cos 2\varphi$ 的右面一瓣, 沿逆时针方向绕行.

2318. 计算下列被积表达式为全微分的曲线积分:

a) $\int_{(-1,2)}^{(2,3)} xdy+ydx$,

b) $\int_{(0,1)}^{(3,4)} xdx+ydy$,

c) $\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x+y)(dx+dy)$,

d) $\int_{(1,2)}^{(2,1)} \frac{ydx-xdy}{y^2}$ (沿与 OX 轴不相交的路径),

e) $\int_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}^{(x,y)} \frac{dx+dy}{x+y}$ (沿与直线 $x+y=0$ 不相交的路径),

f) $\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \varphi(x)dx+\psi(y)dy$.

2319. 先求出被积表达式的原函数, 再计算积分:

a) $\int_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$,

b) $\int_{(0,-1)}^{(1,0)} \frac{xdy-ydx}{(x-y)^2}$ (积分路径与直线 $y=x$ 不相交),

c) $\int_{(1,1)}^{(3,1)} \frac{(x+2y)dx+ydy}{(x+y)^2}$ (积分路径与直线 $y=-x$ 不相交),

d) $\int_{(0,0)}^{(1,1)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+x\right)dy$.

2320. 按顺时针方向沿位于第一象限的四分之一椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 计算 $I=\int \frac{xdx+ydy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$.

2321. 证明: 如果 $f(u)$ 是连续函数, C 是逐段光滑的闭曲线, 则

$$\oint_C f(x^2+y^2)(xdx+ydy)=0.$$

2322. 从以下各式, 求出原函数 u:

a) $du=(2x+3y)dx+(3x-4y)dy$;

b) $du=(3x^2-2xy+y^2)dx-(x^2-2xy+3y^2)dy$;

c) $du=e^{x-y}[(1+x+y)dx+(1-x-y)dy]$;

d) $du=\dfrac{dx}{x+y}+\dfrac{dy}{x+y}$.

计算下列沿空间曲线的曲线积分:

2323. $\int_C(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$, 其中 C 是对应于参数 t 从 0 变到 2π 的螺旋线

$$\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=a\sin t,\\ z=bt\end{cases}$$

的一圈.

2324. $\oint_c ydx+zdy+xdz$, 其中 C 是圆周

$$\begin{cases}x=R\cos\alpha\cos t,\\ y=R\cos\alpha\sin t,\\ z=R\sin\alpha\quad(\alpha=\text{常数}),\end{cases}$$

沿参数增加的方向绕行.

2325. $\oint_{OA} xydx+yzdy+zxdz$, 其中 OA 是圆周

$$x^2+y^2+z^2=2Rx,\quad z=x$$

位于 XOZ 平面的 $y>0$ 那一侧的弧.

2326. 由全微分计算曲线积分:

a) $\displaystyle\int_{(1,0,-3)}^{(6,4,8)} xdx+ydy-zdz$,

b) $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(a,b,c)} yzdx+zxdy+xydz$,

c) $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(3,4,5)} \frac{xdx+ydy+zdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,

d) $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(x,y,\frac{1}{xy})} \frac{yzdx+zxdy+xydz}{xyz}$ (积分路径在第一卦限内).

C. 格林公式

2327. 利用格林公式变换曲线积分

$$I = \oint_C \sqrt{x^2+y^2}dx + y[xy + \ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]dy,$$

其中 C 为围成区域 S 的周线.

2328. 应用格林公式, 计算

$$I + \oint_C 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2dy,$$

其中 C 是经过以点 $A(1,1)$, $B(2,2)$ 和 $C(1,3)$ 为顶点的三角形沿正方向的周线. 并直接计算积分验证所得结果.

2329. 应用格林公式, 计算积分

$$\oint_C -x^2ydx + xy^2dy,$$

其中 C 为沿逆时针方向的圆周 $x^2+y^2=R^2$.

2330. 过点 $A(1,0)$ 和 $B(2,3)$ 作以 OY 轴为对称轴的抛物线 AmB 和它的弦 AnB, 直接计算和应用格林公式求出

$$\oint_{AmBnA} (x+y)dx - (x-y)dy.$$

2331. 如果点 A 和 B 在 OX 轴上, 积分路径 AmB 和线段 AB 所围成的区域面积等于 S, 求

$$\int_{AmB} e^{xy}[y^2dx + (1+xy)dy].$$

2332*. 对下面两种情形, 计算积分 $\oint_C \dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$:

a) 当坐标原点落在围道 C 之外,

b) 周线环绕坐标原点 n 次.

2333**. 证明: 如果 C 为闭曲线, 则

$$\oint_C \cos(X,\mathbf{n})ds = 0,$$

其中 s 为弧长, $\mathbf{n}$ 为外法线.

2334. 应用格林公式, 求出积分

$$I = \oint_C [x\cos(X,\mathbf{n}) + y\sin(X,\mathbf{n})]ds,$$

其中 ds 为弧的微分, $\mathbf{n}$ 为周线 C 的外法线.

2335*. 计算积分

$$\oint_C \frac{dx-dy}{x+y},$$

以逆时针方向, 取沿着以点 $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$, $D(0,-1)$ 为顶点的正方形周线 C.

D. 曲线积分的应用

计算由下列曲线所围成的图形面积:

2336. 椭圆 $x = a\cos t,\ y = b\sin t$.

2337. 星形线 $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$.

2338. 心脏线 $x = a(2\cos t - \cos 2t),\ y = a(2\sin t - \sin 2t)$.

2339*. 笛卡儿叶形线 $x^3 + y^3 - 3axy = 0\,(a > 0)$ 的闭环.

2340. 曲线 $(x+y)^3 = axy$.

2341*. 半径为 r 的圆在半径为 R 的固定圆外部作无滑动的滚动. 假设 $\dfrac{R}{r}$ 为整数, 求由动圆上任一点描成的曲线 (外摆线) 所围成的区域面积. 并分析 $r = R$ 时的特殊情形 (心脏线).

2342*. 半径为 r 的圆在半径为 R 的固定圆内作无滑动的滚动. 假设 $\dfrac{R}{r}$ 为整数, 求由动圆上任一点描成的曲线 (内摆线) 所围成的区域面积. 并分析 $r = \dfrac{R}{4}$ 时的特殊情形 (星形线).

2343. 力场由指向 OX 轴的正方向, 值为常数 F 的力所构成. 求质点按顺时针方向描出位于第一象限的四分之一圆周 $x^2 + y^2 = R^2$ 时力场所作的功.

2344. 求出当质量为 m 的质点从位置 $A(x_1, y_1, z_1)$ 移到位置 $B(x_2, y_2, z_2)$ 时 (OZ 轴的方向竖直向上), 重力所作的功.

2345. 弹性力的方向指向坐标原点, 大小与点到原点的距离成正比, 如果力的作用点按逆时针方向描出位于第一象限的四分之一椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, 求出弹性力所作的功.

2346. 求出力 $R\{X, Y, Z\}$ 的势函数, 并确定力沿指定路径所作的功, 如果已知:

a) $X = 0,\ Y = 0,\ Z = -mg$ (重力), 而质点从位置 $A(x_1, y_1, z_1)$ 移到位置 $B(x_2, y_2, z_2)$;

b) $X = -\dfrac{-\mu x}{r^3}, Y = -\dfrac{\mu y}{r^3},\ Z = -\dfrac{\mu z}{r^3}$, 其中 $\mu =$ 常数, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (牛顿引力), 而质点从位置 $A(a, b, c)$ 移到无穷远处;

c) $X = -k^2 x,\ Y = -k^2 y,\ Z = -k^2 z$, 其中 $k =$ 常数 (弹性力), 并且路径的起点位于球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 上, 而终点位于球面 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ 上 $(R > r)$.

§10. 曲面积分

1°. **第一类曲面积分**. 设 $f(x, y, z)$ 是连续函数, $z = \varphi(x, y)$ 为光滑曲面 S.

第一类曲面积分是下面积分和的极限:

$$\iint_S f(x, y, z)dS = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i,$$

其中 ΔS_i 是曲面 S 的第 i 块曲面元的面积, 点 (x_i, y_i, z_i) 属于这块曲面元, 而且所分割

成的曲面元的最大直径趋向零.

这个积分的值与选择在曲面 S 的哪一侧进行积分无关.

如果曲面 S 在 XOY 平面上的投影 σ 为单值的, 即所有平行于 OZ 轴的直线与曲面 S 至多只有一个交点, 则相应的第一类曲面积分, 可按以下公式计算:

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_{(\sigma)} f(x,y,\varphi(x,y))\sqrt{1+\varphi_x'^2(x,y)(x,y)+\varphi_y'^2(x,y)}dxdy.$$

例 1 计算曲面积分

$$\iint_S (x+y+z)dS,$$

其中 S 为立方体 $0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1$ 的表面.

我们沿着立方体的顶面 $(z=1)$ 和底面 $(z=0)$ 计算曲面积分的和:

$$\int_0^1\int_0^1 (x+y+1)dxdy + \int_0^1\int_0^1 (x+y)dxdy = \int_0^1\int_0^1 (2x+2y+1)dxdy = 3.$$

显然, 所求曲面积分为它的三倍, 且等于

$$\iint_S (x+y+z)dS = 9.$$

2°. **第二类曲面积分**. 如果 $P=P(x,y,z),\ Q=Q(x,y,z),\ R=R(x,y,z)$ 是连续函数, S^+ 是由光滑曲面 S 的法线方向 $\mathbf{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 所规定的一侧, 则相应的第二类曲面积分表示为下列形式:

$$\iint_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS.$$

当这个曲面变成为另一侧 S^- 时, 积分改变为相反的符号.

如果曲面 S 由隐式 $F(x,y,z)=0$ 给出, 则这个曲面的法线方向余弦用公式

$$\cos\alpha = \frac{1}{D}\frac{\partial F}{\partial x},\ \cos\beta = \frac{1}{D}\frac{\partial F}{\partial y},\ \cos\gamma = \frac{1}{D}\frac{\partial F}{\partial z}$$

确定, 其中

$$D = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2},$$

其中根号前面符号的选择应当与曲面 S 的侧的选择一致.

3°. **斯托克斯 (Stokes) 公式**. 设函数 $P=P(x,y,z),\ Q=Q(x,y,z),\ R=R(x,y,z)$ 连续可微, 且 C 是界定双侧曲面 S 的闭周线, 则成立斯托克斯公式

$$\oint_C Pdx+Qdy+Rdz$$
$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS,$$

其中 $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ 是曲面 S 的法线方向余弦, 而且这法线方向的确定是使得周线 C 绕着它按逆时针方向回转 (在右手坐标系中).

计算下列第一类曲面积分:

2347. $\iint_S (x^2+y^2)dS$, 其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$.

2348. $\iint_S \sqrt{x^2+y^2}dS$, 其中 S 为锥体的侧面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0\ (0\leqslant z\leqslant b)$.

计算下列第二类曲面积分:

2349. $\iint_S yzdydz+xzdzdx+xydxdy$, 其中 S 为由平面 $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=a$ 所围成的四面体表面的外侧.

2350. $\iint_S zdxdy$, 其中 S 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧.

2351. $\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, 其中 S 为半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0)$ 的外侧.

2352. 假设在点 $M(x,y,z)$ 处的面密度等于 xyz, 求立方体 $0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1,\ 0\leqslant z\leqslant 1$ 的表面曲面的质量.

2353. 确定均匀抛物形壳体 $az=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant a)$ 的质心坐标.

2354. 求出圆锥 $z=\sqrt{x^2+y^2}\ (0\leqslant z\leqslant h)$ 的侧面关于 OZ 轴的转动惯量.

2355. 应用斯托克斯公式, 变换下列积分:

a) $\oint_C (x^2-yz)dx+(y^2-zx)dy+(z^2-xy)dz$;

b) $\oint_C ydx+zdy+xdz$.

应用斯托克斯公式求出下列积分, 并用直接算法检验所得结果:

2356. $\oint_C (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$, 其中 C 为圆周

$$x^2+y^2+z^2=a^2,\quad x+y+z=0.$$

2357. $\oint_c (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$, 其中 C 为椭圆

$$x^2+y^2=1,\quad x+z=1.$$

2358. $\oint_C xdx+(x+y)dy+(x+y+z)dz$, 其中 C 为曲线

$$x=a\sin t,\ y=a\cos t,\ z=a(\sin t+\cos t)\quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

2359. $\oint_{ABCA} y^2dx+z^2dy+x^2dz$, 其中 $ABCA$ 是以 $A(a,0,0),\ B(0,a,0),\ C(0,0,a)$ 为顶点的 $\triangle ABC$ 的边界周线.

2360. 在怎样情况下, 曲线积分

$$I=\oint_C Pdx+Qdy+Rdz$$

沿任何闭周线 C 都等于零?

§11. 奥斯特罗格拉茨基 – 高斯公式

如果 S 是闭的光滑曲面，围成区域 V，函数 $P = P(x, y, z)$，$Q = Q(x, y, z)$，$R = R(x, y, z)$ 及它们的一阶偏导数在闭区域 V 上连续，则成立奥斯特罗格拉茨基 – 高斯公式

$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS = \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz,$$

其中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为曲面 S 外法线的方向余弦.

应用奥斯特罗格拉茨基 – 高斯公式变换下列曲面积分，其中 S 为围成区域 V 的闭曲面 (曲面 S 外法线的方向余弦为 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$).

2361. $\iint_S xydxdy + yzdydz + zxdzdx.$

2362. $\iint_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy.$

2363. $\iint_S \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS.$

2364. $\iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right) dS.$

应用奥斯特罗格拉茨基 – 高斯公式计算下列曲面积分:

2365. $\iint_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$，其中 S 为立方体 $0 \leqslant x \leqslant a$，$0 \leqslant y \leqslant a$，$0 \leqslant z \leqslant a$ 表面的外侧.

2366. $\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$，其中 S 为由平面 $x + y + z = a$，$x = 0$，$y = 0$，$z = 0$ 所围成的棱锥面外侧.

2367. $\iint_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$，其中 S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧.

2368. $\iint_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)dS$，其中 S 为圆锥 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$ $(0 \leqslant z \leqslant b)$ 的全部表面外侧.

2369. 证明: 如果 S 为闭曲面，$\mathbf{l}$ 为任意的固定方向，则

$$\iint_S \cos(\mathbf{n}, \mathbf{l})dS = 0,$$

其中 $\mathbf{n}$ 为曲面 S 的外法线.

2370. 证明: 由曲面 S 围成的立体体积 V 等于

$$V = \frac{1}{3}\iint_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)dS,$$

其中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为曲面 S 的外法线方向余弦.

§12. 场论初步

1°. **数量场和向量场.** 点的数量函数 $u=f(P)=f(x,y,z)$ 定义为数量场, 其中 $P(x,y,z)$ 是空间的点. 曲面 $f(x,y,z)=C$ 称为数量场的等量面, 其中 C 为常数.

点的向量函数 $\mathbf{a}=\mathbf{a}(P)=\mathbf{a}(\mathbf{r})$ 定义为向量场, 其中 P 是空间的点, $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ 是点 P 的向径. 在坐标形式 $\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$ 中, 其中 $a_x=a_x(x,y,z)$, $a_y=a_y(x,y,z)$, $a_z=a_z(x,y,z)$ 为向量 $\mathbf{a}$ 在坐标轴上的投影. 向量场的矢线 (力线, 流线), 由微分方程组

$$\frac{dx}{a_x}=\frac{dy}{a_y}=\frac{dz}{a_z}$$

求得.

与时间 t 无关的数量场或向量场称为稳态场, 而与时间有关的称为非稳态场.

2°. **梯度.** 向量

$$\operatorname{grad}U(P)=\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}\equiv\nabla U$$

称为数量场 $U=f(P)$ 在给定点 P 的梯度 (见第六章 §6), 其中 $\nabla\equiv\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$ 为哈密顿 (Hamilton) 算子 (del). 梯度的方向与等量面在点 P 处的法线方向一致, 法线 $\mathbf{n}$ 指向函数 U 增加的一侧, 其长度等于

$$\frac{\partial U}{\partial n}=\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}.$$

如果方向由单位向量 $\mathbf{l}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 给定, 则

$$\frac{\partial U}{\partial l}=\operatorname{grad}U\cdot\mathbf{l}=\operatorname{grad}_l U=\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma$$

(函数 U 沿方向 $\mathbf{l}$ 的导数).

3°. **散度和旋度.** 数量 $\operatorname{div}\mathbf{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\equiv\nabla\cdot\mathbf{a}$ 称为向量场

$$\mathbf{a}(P)=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$$

的散度.

向量

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}\equiv\nabla\times\mathbf{a}$$

称为向量场 $\mathbf{a}(P)=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$ 的旋度.

4°. **向量的流量.** 积分

$$\iint_S\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}dS=\iint_S a_n dS=\iint_S(a_x\cos\alpha+a_y\cos\beta+a_z\cos\gamma)dS$$

称为向量场 $\mathbf{a}(P)$ 通过曲面 S 朝向曲面 S 的单位法向量 $\mathbf{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 那一侧的流量. 如果 S 为界定区域 V 的闭曲面, 而 $\mathbf{n}$ 为曲面 S 向外的单位法向量, 则成立奥斯特罗格拉茨基 – 高斯公式, 它的向量形式为

$$\iint_S a_n dS=\iiint_{(V)}\operatorname{div}\mathbf{a}dxdydz.$$

5°. **向量的环流量, 向量场所做的功**. 向量 $\mathbf{a}$ 沿曲线 C 的线积分由公式

$$\int_C \mathbf{a}d\mathbf{r} = \int_C a_s ds = \int_C a_x dx + a_y dy + a_z dz \tag{1}$$

定义, 它是向量场 $\mathbf{a}$ 沿曲线 C 所做的功 (a_s 为向量 $\mathbf{a}$ 在 C 的切线方向上的投影).

如果曲线 C 是封闭的, 则称线积分 (1) 为向量场 $\mathbf{a}$ 沿周线 C 的环流量.

如果闭曲线 C 包围双侧曲面 S, 则成立斯托克斯公式, 其向量形式为

$$\oint_C \mathbf{a}d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{n}\cdot\mathrm{rot}\cdot\mathbf{a}dS = \iint_S (\mathrm{rot}\,\mathbf{a})_{\mathbf{n}}dS,$$

其中 $\mathbf{n}$ 为曲面 S 的法向量, 应当这样选择它的方向, 使得对于立在曲面 S 上, 头朝方向 $\mathbf{n}$ 的观察者来说, 闭曲线 C 绕行的方向在右手坐标系中是逆时针方向.

6°. **有势场和管量场**. 如果

$$\mathbf{a} = \mathrm{grad}\,U,$$

其中 $U = f(r)$ 是数量函数 (场的势), 则称向量场 $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ 为有势场.

在给定的单连通区域内, 场 $\mathbf{a}$ 是有势场的充要条件为它是无旋场, 即 $\mathrm{rot}\,\mathbf{a} = 0$. 这时存在势 U, 它由方程

$$dU = a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

确定.

如果 U 是单值函数, 则 $\int_{AB} \mathbf{a}d\mathbf{r} = U(B) - U(A)$; 特别地, 向量 $\mathbf{a}$ 的环流量等于零: $\oint_C \mathbf{a}d\mathbf{r} = 0$.

如果在向量场 $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ 的每一点处都有 $\mathrm{div}\,\mathbf{a} = 0$, 就称这向量场为管量场; 这时向量通过任何闭曲面的流量等于零.

如果场同时为有势场和管量场, 则 $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,U) = 0$, 从而势函数 U 是调和函数, 即满足拉普拉斯方程 $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$ 或 $\Delta U = 0$, 其中 $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 为拉普拉斯算子.

2371. 确定数量场 $U = f(r)$ 的等量面, 其中 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 场 $U = F(\rho)$ 的等量面是怎样的? 其中 $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.

2372. 确定数量场

$$U = \arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

的等量面.

2373. 证明: 向量场 $\mathbf{a}(P) = \mathbf{c}$ 的矢线是平行于向量 $\mathbf{c}$ 的直线, 其中 $\mathbf{c}$ 为常向量.

2374. 求场 $\mathbf{a} = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}$ 的矢线, 其中 ω 为常数.

2375. 推导公式:

a) $\mathrm{grad}\,(C_1U + C_2V) = C_1\mathrm{grad}\,U + C_2\mathrm{grad}\,V$, 其中 C_1 和 C_2 为常数;

b) $\operatorname{grad}(UV) = U\operatorname{grad}V + V\operatorname{grad}U$;

c) $\operatorname{grad}(U^2) = 2U\operatorname{grad}U$;

d) $\operatorname{grad}\left(\dfrac{U}{V}\right) = \dfrac{V\operatorname{grad}U - U\operatorname{grad}V}{V^2}$;

e) $\operatorname{grad}\varphi(U) = \varphi'(U)\operatorname{grad}U$.

2376. 求场 $U = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ 在点 $A(2,1,1)$ 处梯度的大小和方向. 确定在场的哪些点处的梯度与 OZ 轴垂直, 在哪些点处的梯度等于零.

2377. 计算 $\operatorname{grad}U$, 其中 U 分别等于 a) r, b) r^2, c) $\dfrac{1}{r}$, d) $f(r)$ $(r = \sqrt{x^2+y^2+z^2})$.

2378. 求数量场 $U = \mathbf{c}\cdot\mathbf{r}$ 的梯度, 其中 $\mathbf{c}$ 为常向量. 这个场的等量面是怎样的? 等量面的位置与向量 $\mathbf{c}$ 的关系怎样?

2379. 求函数 $U = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$ 在给定点 $P(x,y,z)$ 沿这点的向径 $\mathbf{r}$ 的方向导数. 在什么情形下, 这个导数与梯度的大小相等?

2380. 求函数 $U = \dfrac{1}{r}$ 沿方向 $\mathbf{l} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ 的导数. 在什么情形下这个导数等于零?

2381. 推导公式:

a) $\operatorname{div}(C_1\mathbf{a}_1 + C_2\mathbf{a}_2) = C_1\operatorname{div}\mathbf{a}_1 + C_2\operatorname{div}\mathbf{a}_2$, 其中 C_1 和 C_2 为常数;

b) $\operatorname{div}(U\mathbf{c}) = \operatorname{grad}U\cdot\mathbf{c}$, 其中 $\mathbf{c}$ 为常向量;

c) $\operatorname{div}(U\mathbf{a}) = \operatorname{grad}U\cdot\mathbf{a} + U\operatorname{div}\mathbf{a}$.

2382. 计算 $\operatorname{div}\left(\dfrac{\mathbf{r}}{r}\right)$.

2383. 对中心向量场 $\mathbf{a}(P) = f(r)\dfrac{\mathbf{r}}{r}$ 求出散度 $\operatorname{div}\mathbf{a}$, 其中 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

2384. 推导公式:

a) $\operatorname{rot}(C_1\mathbf{a}_1 + C_2\mathbf{a}_2) = C_1\operatorname{rot}\mathbf{a}_1 + C_2\operatorname{rot}\mathbf{a}_2$, 其中 C_1 和 C_2 为常数;

b) $\operatorname{rot}(U\mathbf{c}) = \operatorname{grad}U\times\mathbf{c}$, 其中 $\mathbf{c}$ 为常向量;

c) $\operatorname{rot}(U\mathbf{a}) = \operatorname{grad}U\times\mathbf{a} + U\operatorname{rot}\mathbf{a}$.

2385. 计算向量 $\mathbf{a}$ 的散度和旋度, 其中 $\mathbf{a}$ 分别等于: a) $\mathbf{r}$; b) $r\mathbf{c}$; c) $f(r)\mathbf{c}$, 其中 $\mathbf{c}$ 为常向量.

2386. 物体以不变角速度 ω 绕 OZ 轴作逆时针方向旋转, 求出物体上各点线速度场的散度和旋度.

2387. 物体以不变角速度 ω 围绕过坐标原点的某轴旋转, 求其各点线速度场 $\mathbf{v} = \omega\times\mathbf{r}$ 的旋度.

2388. 计算数量场 U 之梯度的散度和旋度.

2389. 证明: $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{a}) = 0$.

2390. 应用奥斯特罗格拉茨基 – 高斯定理, 证明向量场 $\mathbf{a} = \mathbf{r}$ 通过围住任意体积 V 的闭曲面的流量等于体积 V 的三倍.

2391. 求向量 $\mathbf{r}$ 通过柱体 $x^2+y^2 \leqslant R^2$, $0 \leqslant z \leqslant H$ 全表面的流量.

2392. 求向量 $\mathbf{a}=x^3\mathbf{i}+y^3\mathbf{j}+z^3\mathbf{k}$ 通过下列曲面的流量: a) 圆锥体 $\dfrac{x^2+y^2}{R^2} \leqslant \dfrac{z^2}{H^2}$, $0 \leqslant z \leqslant H$ 的侧面; b) 这个圆锥体的全表面.

2393*. 计算质量为 m 位置在坐标原点的质点引力 $\mathbf{F}=-\dfrac{m\mathbf{r}}{r^3}$ 的散度和通过任意包围该点的闭曲面的流量.

2394. 计算向量 $\mathbf{r}$ 沿螺旋线 $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, $z=ht$, 从 $t=0$ 到 $t=2\pi$ 一圈的线积分.

2395. 利用斯托克斯定理计算向量 $\mathbf{a}=x^2y^3\mathbf{i}+\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ 沿圆周 $x^2+y^2=R^2$, $z=0$ 的环流量, 这里取半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 作为被圆周围住的曲面.

2396. 证明: 如果力 $\mathbf{F}$ 是中心力, 即力的方向指向定点 O, 且大小仅仅依赖于到这点的距离 r: $\mathbf{F}=f(r)\mathbf{r}$, 其中 $f(r)$ 为单值连续函数, 则场是有势场. 求场的势 U.

2397. 求由位于坐标原点且质量为 m 的质点所产生的引力场 $\mathbf{a}=-\dfrac{m}{r^3}\mathbf{r}$ 的势 U. 证明势 U 满足拉普拉斯方程 $\Delta U=0$.

2398. 说明下列向量场是否有势, 如果存在, 则求出势 U:

a) $\mathbf{a}=(5x^2y-4xy)\mathbf{i}+(3x^2-2y)\mathbf{j}$;

b) $\mathbf{a}=yz\mathbf{i}+zx\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$;

c) $\mathbf{a}=(y+z)\mathbf{i}+(x+z)\mathbf{j}+(x+y)\mathbf{k}$.

2399. 证明: 空间中心场 $\mathbf{a}=f(r)\mathbf{r}$ 仅当 $f(r)=\dfrac{k}{r^3}$ 时为管量场, 其中 k 为常数.

2400. 向量场 $\mathbf{a}=r(\mathbf{c}\times\mathbf{r})$ 是否为管量场? 其中 $\mathbf{c}$ 为常向量.

第八章 级数

§1. 数项级数

1°. **基本概念**. 对于数项级数

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

如果它的部分和

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

当 $n \to \infty$ 时有极限, 则称级数 (1) 是收敛的. 值 $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 称为这个级数的和, 数

$$R_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

称为级数的余项. 如果极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在, 则称级数 (1) 是发散的.

如果级数收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (收敛的必要条件). 逆命题不成立.

级数 (1) 收敛的充要条件是: 对每一个正数 ε, 可找到这样的 N, 使得当 $n > N$ 时以及对任意的正整数 p, 不等式

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

成立 (柯西准则).

如果添加或去掉级数的有限项, 它的敛散性不变.

2°. **正项级数敛散性的判别法**.

a) **比较判别法 I**. 如果从某个 $n = n_0$ 开始有 $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$, 并且级数

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{2}$$

收敛, 则级数 (1) 也收敛. 如果级数 (1) 发散, 则级数 (2) 也发散.

特别地, 选取几何级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n (a \neq 0)$$

(当 $|q|<1$ 时级数收敛, 当 $|q|\geqslant 1$ 时发散) 及调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

(它是发散级数) 作为比较级数是方便的.

例 1 级数

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot 2^n}+\cdots$$

收敛, 这是因为这里

$$a_n=\frac{1}{n\cdot 2^n}<\frac{1}{2^n},$$

并且公比 $q=\frac{1}{2}$ 的几何级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

收敛.

例 2 级数

$$\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+\cdots+\frac{\ln n}{n}+\cdots$$

发散, 这是因为它的通项 $\frac{\ln n}{n}$ 大于调和级数 (它是发散的) 的对应项 $\frac{1}{n}$.

b) **比较判别法 II.** 如果存在着异于零的有限极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ (特别是, 如果 $a_n\sim b_n$), 则级数 (1) 与级数 (2) 同时收敛或同时发散.

例 3 级数

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots$$

发散, 这是因为

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n-1}:\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\neq 0,$$

而通项为 $\frac{1}{n}$ 的级数发散.

例 4 级数

$$\frac{1}{2-1}+\frac{1}{2^2-2}+\frac{1}{2^3-3}+\cdots+\frac{1}{2^n-n}+\cdots$$

收敛, 这是因为

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n-n}:\frac{1}{2^n}\right)=1,\quad \text{即 } \frac{1}{2^n-n}\sim\frac{1}{2^n},$$

而通项为 $\frac{1}{2^n}$ 的级数收敛.

c) **达朗贝尔 (d'Alembert) 判别法.** 设 $a_n>0$ (从某个 $n=n_0$ 开始) 且存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q.$$

那么, 当 $q<1$ 时级数 (1) 收敛, 当 $q>1$ 时发散. 如果 $q=1$, 则级数的收敛性问题有待进一步研究.

例 5 研究级数

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}+\cdots$$

的收敛性.

解 这里

$$a_n=\frac{2n-1}{2^n},\quad a_{n+1}=\frac{2n+1}{2^{n+1}}$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)2^n}{2^{n+1}(2n-1)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{2n}}{1-\dfrac{1}{2n}}=\frac{1}{2}.$$

因此, 该级数收敛.

d) **柯西 (Cauchy) 判别法**. 设 $a_n\geqslant 0$ (从某个 $n=n_0$ 开始) 且存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q.$$

那么, 当 $q<1$ 时级数 (1) 收敛, 当 $q>1$ 时发散. 在 $q=1$ 的情形, 级数的收敛性问题有待进一步研究.

e) **柯西积分判别法**. 如果 $a_n=f(n)$, 其中当 $x\geqslant a\geqslant 1$ 时, $f(x)$ 是单调增加且连续的正值函数, 则级数 (1) 与积分

$$\int_a^{\infty}f(x)dx$$

同时收敛或同时发散.

利用积分判别法可证明: 狄利克雷 (Dirichlet) 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\tag{3}$$

当 $p>1$ 时收敛, 当 $p\leqslant 1$ 时发散. 借助于与相应的狄利克雷级数 (3) 比较, 可研究许多级数的收敛性.

例 6 研究级数

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)2n}+\cdots$$

的收敛性.

解 我们有:

$$a_n=\frac{1}{(2n-1)2n}=\frac{1}{4n^2}\frac{1}{1-\dfrac{1}{2n}}\sim\frac{1}{4n^2}.$$

因为当 $p=2$ 时的狄利克雷级数收敛, 所以根据比较判别法 II, 可以断定已给级数收敛.

3°. 变号级数收敛性的判别法. 如果由级数 (1) 各项的绝对值组成的级数

$$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|+\cdots\tag{4}$$

收敛, 则级数 (1) 也收敛, 且称它是**绝对收敛的**. 如果级数 (1) 收敛而级数 (4) 发散, 则称级数 (1) 是**条件收敛** (非绝对收敛).

为了研究级数 (1) 的绝对收敛性, 可以对级数 (4) 利用已知的正项级数收敛性的判别法. 特别地, 如果

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1 \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}<1,$$

则级数 (1) 绝对收敛. 在一般情况下, 由级数 (4) 发散性不能推出级数 (1) 发散性. 但是, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}>1$, 则不仅级数 (4) 发散, 而且级数 (1) 也发散.

莱布尼茨判别法. 如果交错级数

$$b_1-b_2+b_3-b_4+\cdots(b_n\geqslant 0) \tag{5}$$

满足条件: 1) $b_1\geqslant b_2\geqslant b_3\geqslant\cdots$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$, 则级数 (5) 收敛.

在这种情况下, 对于级数的余项 R_n 有正确的估计式

$$|R_n|\leqslant b_{n+1}.$$

例 7 研究级数

$$1-\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{3}{5}\right)^3+\left(\frac{4}{7}\right)^4+\cdots+(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n+\cdots$$

的收敛性.

解 由已给级数各项的绝对值组成级数:

$$1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^3+\left(\frac{4}{7}\right)^4+\cdots+\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n+\cdots.$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2},$$

所以已给级数绝对收敛.

例 8 级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\cdots$$

收敛, 这是因为它满足莱布尼茨判别法的条件. 由于级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

发散 (调和级数), 因此已给级数非绝对收敛 (条件收敛).

注 交错级数的通项趋向于零不是级数收敛的充分条件. 莱布尼茨判别法仅仅断定: 如果交错级数通项的绝对值**单调地**趋向于零, 则级数收敛. 例如级数

$$1-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{k}-\frac{1}{5^k}+\cdots$$

就是这样的, 虽然它的通项趋向于零 (显然, 这里通项的绝对值不是单调变化的), 但它发散. 事实上, 这里 $S_{2k}=S'_K+S''_K$, 其中

$$S'_K = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}, \quad S''_K = -\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^k}\right),$$

并且 $\lim_{k\to\infty} S'_k = \infty$ (S'_k 是调和级数的部分和), 同时极限 $\lim_{k\to\infty} S''_k$ 存在且有限 (S''_k 是收敛的几何级数的部分和), 因此 $\lim_{k\to\infty} S_{2k} = \infty$.

另一方面, 满足莱布尼茨判别法的条件对于交错级数的收敛性并不是必要的: 如果通项的绝对值不单调地趋向于零, 交错级数也可能收敛.

例如, 级数

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^3} - \frac{1}{(2n)^2} + \cdots,$$

虽然不满足莱布尼茨判别法的条件: 级数通项的绝对值趋向于零, 但不单调, 可是级数收敛且绝对收敛.

4°. **复数项级数**. 当且仅当实数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛时, 通项为 $c_n = a_n + ib_n\,(i^2=-1)$ 的级数收敛, 并且这时有

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i\sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{6}$$

如果级数 (6) 各项的模组成的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

收敛, 则级数 (6) 显然收敛, 且称它是绝对收敛的.

5°. **级数的运算**

a) 收敛级数可逐项乘以任意数 k, 即如果

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = S,$$

则

$$ka_1 + ka_2 + \cdots + ka_n + \cdots = kS.$$

b) 两个收敛级数

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = S_1, \tag{7}$$

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots = S_2 \tag{8}$$

的和 (差) 是指相应的级数

$$(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \cdots + (a_n \pm b_n) + \cdots = S_1 \pm S_2.$$

c) 级数

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n + \cdots \tag{9}$$

称为级数 (7) 与级数 (8) 的乘积, 其中 $c_n = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1\,(n = 1, 2, \cdots)$.

如果级数 (7) 与级数 (8) 都绝对收敛, 则级数 (9) 也绝对收敛, 且其和等于 S_1S_2.

d) 如果级数绝对收敛, 那么重排级数各项, 其和不变. 一般地说, 如果级数非绝对收敛, 就不具备这个性质.

按指明的各项, 写出级数第 n 项的最简公式:

2401. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$.

2402. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots$.

2403. $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\cdots$.

2404. $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots$.

2405. $\frac{3}{4}+\frac{4}{9}+\frac{5}{16}+\frac{6}{25}+\cdots$.

2406. $\frac{2}{5}+\frac{4}{8}+\frac{6}{11}+\frac{8}{14}+\cdots$.

2407. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\cdots$.

2408. $1+\frac{1\cdot 3}{1\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 4\cdot 7}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}+\cdots$.

2409. $1-1+1-1+1-1+\cdots$.

2410. $1+\frac{1}{2}+3+\frac{1}{4}+5+\frac{1}{6}+\cdots$.

在第 2411—2415 题中, 按已知的通项 a_n, 写出级数的前四五项:

2411. $a_n=\frac{3n-2}{n^2+1}$.

2412. $a_n=\frac{(-1)^n n}{2^n}$.

2413. $a_n=\frac{2+(-1)^n}{n^2}$.

2414. $a_n=\frac{1}{[3+(-1)^n]^n}$.

2415. $a_n=\frac{\left(2+\sin\frac{n\pi}{2}\right)\cos n\pi}{n!}$.

应用比较判别法 (或收敛的必要条件), 研究下列级数的收敛性:

2416. $1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$.

2417. $\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n+\cdots$.

2418. $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\cdots+\frac{n+1}{2n+1}+\cdots$.

2419. $\frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt[3]{10}}+\frac{1}{\sqrt[4]{10}}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n+1]{10}}+\cdots$.

2420. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}+\cdots$.

2421. $\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\cdots+\frac{1}{10n+1}+\cdots$.

2422. $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\cdots$.

2423. $2+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\cdots+\frac{2^n}{n}+\cdots$.

2424. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$.

2425. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{8^2}+\cdots+\frac{1}{(3n-1)^2}+\cdots.$

2426. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt[3]{2}}{3\sqrt{2}}+\frac{\sqrt[3]{3}}{4\sqrt{3}}+\cdots+\frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}+\cdots.$

用达朗贝尔判别法研究下列级数的收敛性:

2427. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2\sqrt{2}}+\cdots+\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}+\cdots.$

2428. $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9}+\cdots+\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}+\cdots.$

用柯西判别法研究下列级数的收敛性:

2429. $\frac{2}{1}+\left(\frac{3}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3+\cdots+\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n+\cdots.$

2430. $\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\left(\frac{3}{8}\right)^5+\cdots+\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}+\cdots.$

研究下列正项级数的收敛性:

2431. $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots.$

2432. $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2-1}+\cdots.$

2433. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots.$

2434. $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\frac{9}{19}+\cdots+\frac{n^2}{2n^2+1}+\cdots.$

2435. $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\cdots+\frac{n}{n^2+1}+\cdots.$

2436. $\frac{3}{2^2\cdot 3^2}+\frac{5}{3^2\cdot 4^2}+\frac{7}{4^2\cdot 5^2}+\cdots+\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}+\cdots.$

2437. $\frac{3}{4}+\left(\frac{6}{7}\right)^2+\left(\frac{9}{10}\right)^3+\cdots+\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n+\cdots.$

2438. $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{5}{7}+\left(\frac{7}{10}\right)^{\frac{3}{2}}+\cdots+\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}+\cdots.$

2439. $\frac{1}{e}+\frac{8}{e^2}+\frac{27}{e^3}+\cdots+\frac{n^3}{e^n}+\cdots.$

2440. $1+\frac{2}{2^2}+\frac{4}{3^3}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{n^n}+\cdots.$

2441. $\frac{1!}{2+1}+\frac{2!}{2^2+1}+\frac{3!}{2^3+1}+\cdots+\frac{n!}{2^n+1}+\cdots.$

2442. $1+\frac{2}{1!}+\frac{4}{2!}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots.$

2443. $\frac{1}{4}+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 8}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 8\cdot 12}+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{4\cdot 8\cdot 12\cdots 4n}+\cdots.$

2444. $\frac{(1!)^2}{2!}+\frac{(2!)^2}{4!}+\frac{(3!)^2}{6!}+\cdots+\frac{(n!)^2}{(2n)!}+\cdots.$

2445. $1000+\frac{1000\cdot 1002}{1\cdot 4}+\frac{1000\cdot 1002\cdot 1004}{1\cdot 4\cdot 7}+\cdots$
$+\frac{1000\cdot 1002\cdot 1004\cdots(998+2n)}{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}+\cdots.$

2446. $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9}+\cdots+\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11\cdot 14\cdots(6n-7)(6n-4)}{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13\cdot 17\cdots(8n-11)(8n-7)}+\cdots.$

2447. $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots+\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots(4n-4)(4n-2)}+\cdots.$

2448. $\frac{1}{1!}+\frac{1\cdot 11}{3!}+\frac{1\cdot 11\cdot 21}{5!}+\cdots+\frac{1\cdot 11\cdot 21\cdots(10n-9)}{(2n-1)!}+\cdots.$

2449. $1+\frac{1\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1\cdot 4\cdot 9}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\cdots+\frac{1\cdot 4\cdot 9\cdots n^2}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdots(4n-3)}+\cdots.$

2450. $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}.$

2451. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2}.$

2452. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$

2453. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+1}{n^2}.$

2454. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}.$

2455. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}.$

2456. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}.$

2457. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n}.$

2458. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}.$

2459. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$

2460. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}.$

2461. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n+\sqrt{\ln^3 n}}.$

2462. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}}.$

2463. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{(2n-1)(5\sqrt[3]{n}-1)}.$

2464. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right).$

2465. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}.$

2466. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}.$

2467. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}.$

2468*. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n}.$

2469. 设级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p\ln^q n}$, 证明:

1) 当 $p>1, q$ 为任意时或者 $p=1, q>1$ 时, 级数收敛;
2) 当 $p<1, q$ 为任意时或者 $p=1, q\leqslant 1$ 时, 级数发散.

研究下列变号级数的收敛性. 如果收敛, 试研究其绝对收敛性与条件收敛性:

2470. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+\cdots$.

2471. $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\cdots$.

2472. $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}+\cdots$.

2473. $1-\frac{2}{7}+\frac{3}{13}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{6n-5}+\cdots$.

2474. $\frac{3}{1\cdot 2}-\frac{5}{2\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 4}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}+\cdots$.

2475. $-\frac{1}{2}-\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}-\cdots+(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\frac{n}{2^n}+\cdots$.

2476. $-\frac{2}{2\sqrt{2}-1}+\frac{3}{3\sqrt{3}-1}-\frac{4}{4\sqrt{4}-1}+\cdots+(-1)^n\frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}+\cdots$.

2477. $-\frac{3}{4}+\left(\frac{5}{7}\right)^2-\left(\frac{7}{10}\right)^3+\cdots+(-1)^n\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n+\cdots$.

2478. $\frac{3}{2}-\frac{3\cdot 5}{2\cdot 5}+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 5\cdot 8}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}+\cdots$.

2479. $\frac{1}{7}-\frac{1\cdot 4}{7\cdot 9}+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{7\cdot 9\cdot 11}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11\cdots(2n+5)}+\cdots$.

2480. $\frac{\sin\alpha}{\ln 10}+\frac{\sin 2\alpha}{(\ln 10)^2}+\cdots+\frac{\sin n\alpha}{(\ln 10)^n}+\cdots$.

2481. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$.

2482. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\tan\frac{1}{n\sqrt{n}}$.

2483. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, 其中

$$a_{2k-1}=\frac{2^{k-1}}{3^{k-1}},\quad a_{2k}=\frac{2^{k-1}}{3^k}\quad (k=1,2,\cdots).$$

说明达朗贝尔收敛性的判别法不能解决这个级数的收敛性问题, 然而利用柯西判别法可以断定这级数收敛.

2484*. 对于交错级数 a)—d), 说明不能应用莱布尼茨判别法. 试阐明这些级数中哪些级数发散, 哪些条件收敛, 哪些绝对收敛:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}+\cdots$

$$\left(a_{2k-1}=\frac{1}{\sqrt{k+1}-1},\quad a_{2k}=-\frac{1}{\sqrt{k+1}+1}\right);$$

b) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^5}+\cdots$

$$\left(a_{2k-1}=\frac{1}{2^{k-1}},\quad a_{2k}=-\frac{1}{3^{2k-1}}\right);$$

c) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{3^3}+\cdots$

$$\left(a_{2k-1}=\frac{1}{2k-1},\quad a_{2k}=-\frac{1}{3^k}\right);$$

d) $\frac{1}{3}-1+\frac{1}{7}-\frac{1}{5}+\frac{1}{11}-\frac{1}{9}+\cdots$

$$\left(a_{2k-1}=\frac{1}{4k-1},\quad a_{2k}=-\frac{1}{4k-3}\right).$$

研究下列复数项级数的收敛性:

2485. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(2+i)^n}{2^n}$.

2486. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(2i-1)^n}{3^n}$.

2487. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(3+i)^n}$.

2488. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$.

2489. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+i}$.

2490. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+i)\sqrt{n}}$.

2491. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[n+(2n-1)i]^2}$.

2492. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n(2-i)+1}{n(3-2i)-3i}\right]^n$.

2493. 在曲线 $y=\frac{1}{x^3}$ 与 $y=\frac{1}{x^2}$ 之间, 从交点向右作一系列线段, 它们平行于 OY 轴且介于这两曲线之间, 相邻两线段的距离彼此相等. 问这些线段长度之和是否有限?

2494. 在上述问题中, 如果曲线 $y=\frac{1}{x^2}$ 换成 $y=\frac{1}{x}$, 试问这些线段之和是否有限?

2495. 建立级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{3^n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-n}{3^n}$ 的和. 问这个和收敛吗?

2496. 建立发散级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 的差, 并研究它的收敛性.

2497. 由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 减去级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ 后所组成的级数收敛吗?

2498. 选取两个级数, 使得它们的和收敛, 而差发散.

2499. 建立级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ 的乘积. 这个乘积收敛吗?

2500. 建立级数 $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots\right)^2$. 这个级数收敛吗?

2501. 给定级数 $-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}+\cdots$. 如果用这级数的前四项之和,

前五项之和代替它的和, 试估计容许误差. 可以指出这些误差的符号吗?

2502*. 如果级数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots$$

的和用其前 n 项的和代替, 试估计容许误差.

2503. 如果级数

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

的和用其前 n 项的和代替, 试估计容许误差. 特别地, 当 $n=10$ 时, 估计这个近似值的精确度.

2504**. 如果级数

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

的和用其前 n 项的和代替, 试估计容许误差. 特别地, 当 $n=1000$ 时, 估计这个近似值的精确度.

2505**. 如果级数

$$1+2\left(\frac{1}{4}\right)^2+3\left(\frac{1}{4}\right)^4+\cdots+n\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-2}+\cdots$$

的和用其前 n 项的和代替, 试估计容许误差.

2506. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 应取多少项, 才能使得计算它的和精确到 0.01? 精确到 0.001?

2507. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n+1)5^n}$ 应取多少项, 才能使得计算它的和精确到 0.01? 精确到 0.001? 精确到 0.0001?

2508*. 求出级数 $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\cdots$ 的和.

2509. 求出级数

$$\sqrt[3]{x}+(\sqrt[5]{x}-\sqrt[3]{x})+(\sqrt[7]{x}-\sqrt[5]{x})+\cdots+(\sqrt[2k+1]{x}-\sqrt[2k-1]{x})+\cdots$$

的和.

§2. 函数项级数

1°. **收敛域**. 使得函数项级数

$$f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)+\cdots \tag{1}$$

收敛的自变量 x 值的集, 称为这级数的收敛域. 函数

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)$$

称为级数的和函数, $R_n(x)=S(x)-S_n(x)$ 称为级数的余项, 其中 $S_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)$, x 属于收敛域.

为了确定级数 (1) 的收敛域, 在最简的情况下只要把 x 看作固定的数, 再对这个级数应用已知的收敛性判别法.

例 确定级数

$$\frac{x+1}{1\cdot 2}+\frac{(x+1)^2}{2\cdot 2^2}+\frac{(x+1)^3}{3\cdot 2^3}+\cdots+\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}+\cdots \tag{2}$$

的收敛域.

解 用 u_n 表示级数的通项, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x+1|^{n+1}2^n n}{2^{n+1}(n+1)|x+1|^n}=\frac{|x+1|}{2}.$$

根据达朗贝尔判别法可断定: 如果 $\dfrac{|x+1|}{2}<1$ 即当 $-3<x<1$ 时, 级数收敛 (且是绝对收敛); 如果 $\dfrac{|x+1|}{2}>1$ 即当 $-\infty<x<-3$ 或 $1<x<\infty$ 时, 级数发散 (图 104). 当 $x=1$ 时, 我们得到调和级数 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots$, 它发散; 当 $x=-3$ 时, 得到级数 $-1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots$, (根据莱布尼茨判别法) 它收敛 (非绝对收敛).

发散 收敛 发散

-3 -1 0 1 X

图 104

于是, 当 $-3\leqslant x<1$ 时级数收敛.

2°. **幂级数**. 对于每一个幂级数

$$c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots+c_n(x-a)^n+\cdots \tag{3}$$

(c_n 与 a 是实数) 都存在以点 $x=a$ 为中心的区间 (收敛区间) $|x-a|<R$, 在这个区间内部级数 (3) 绝对收敛; 当 $|x-a|>R$ 时级数发散. 在特殊情况下, 收敛半径 R 可以为 0 或 ∞. 在收敛区间的端点 $x=a\pm R$ 处, 幂级数可能收敛, 也可能发散. 确定已给级数 (3) 的收敛区间, 通常把达朗贝尔判别法或柯西判别法, 应用到由这个级数各项的绝对值所组成的级数.

对绝对值的级数

$$|c_0|+|c_1||(x-a)|+\cdots+|c_n||x-a|^n+\cdots$$

应用柯西收敛性判别法与达朗贝尔收敛性判别法, 分别可得幂级数 (3) 的收敛半径公式

$$R=\frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}\quad 与\quad R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|.$$

但是利用这些公式应当很谨慎, 这是因为它们右边的极限往往不存在. 例如, 如果无穷多个系数 c_n 变为零 (特别是级数只包含 $(x-a)$ 的偶次项或奇次项时就是这样), 那么利用上述公式就无效. 因此, 在确定这类级数的收敛区间时, 建议直接应用达朗贝尔判别法或柯西判别法, 就像上面对级数 (2) 的研究那样, 而不使用求收敛半径的一般公式.

如果 $z=x+iy$ 是复变量, 则对于幂级数

$$c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots \tag{4}$$

($c_n=a_n+ib_n$, $z_0=x_0+iy_0$), 总存在以点 $z=z_0$ 为中心的某个圆 (收敛圆) $|z-z_0|<R$, 在这个圆内级数绝对收敛; 当 $|z-z_0|>R$ 时级数发散. 在收敛圆周界上的点, 级数 (4)

可能收敛, 也可能发散. 确定级数 (4) 的收敛圆, 通常把达朗贝尔判别法或柯西判别法, 应用到这个级数各项的模所组成的级数

$$|c_0| + |c_1||z - z_0| + |c_2||z - z_0|^2 + \cdots + |c_n||z - z_0|^n + \cdots.$$

例如, 利用达朗贝尔判别法容易发现, 级数

$$\frac{z+1}{1\cdot 2} + \frac{(z+1)^2}{2\cdot 2^2} + \frac{(z+1)^3}{3\cdot 2^3} + \cdots + \frac{(z+1)^n}{n\cdot 2^n} + \cdots$$

的收敛圆由不等式 $|z+1| < 2$ 确定 (只要重复本节开始时关于确定级数 (2) 收敛区间的计算, 只是把 x 换为 z). 收敛圆的圆心在点 $z = -1$ 处, 而这个圆的半径 R (收敛半径) 等于 2.

3°. **一致收敛性**. 如果对于无论怎样的 $\varepsilon > 0$, 总可以找到不依赖于 x 的 N, 使得当 $n > N$ 时, 对某个区间的一切 x, 成立不等式 $|R_n(x)| < \varepsilon$, 其中 $R_n(x)$ 是函数项级数 (1) 的余项, 则称已给级数在该区间上一致收敛.

当 $a \leqslant x \leqslant b$ 时, 如果 $|f_n(x)| \leqslant c_n (n = 1, 2, \cdots)$, 且数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛, 则函数项级数 (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上绝对收敛且一致收敛 (魏尔斯特拉斯 (Weierstrass) 判别法).

幂级数 (3) 在其收敛区间内部的每一个闭区间上绝对收敛且一致收敛. 幂级数 (3) 在其收敛区间内部可以逐项微分与逐项积分 (当 $|x - a| < R$ 时), 即如果

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots = f(x), \tag{5}$$

那么对属于级数 (3) 的收敛区间的任何 x 有:

$$c_1 + 2c_2(x-a) + \cdots + nc_n(x-a)^{n-1} + \cdots = f'(x), \tag{6}$$

$$\begin{aligned}&\int_{x_0}^{x} c_0 dx + \int_{x_0}^{x} c_1(x-a)dx + \int_{x_0}^{x} c_2(x-a)^2 dx + \cdots + \int_{x_0}^{x} c_n(x-a)^n dx + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1} - (x_0-a)^{n+1}}{n+1} = \int_{x_0}^{x} f(x)dx\end{aligned} \tag{7}$$

(数 x_0 也属于级数 (3) 的收敛区间). 这时级数 (6), (7) 与级数 (3) 具有相同的收敛区间.

求出下列级数的收敛域:

2510. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

2511. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^x}$.

2512. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{\ln n}}$.

2513. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

2514. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}$.

2515.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}}$.

2516. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n \sin x}$.

2517. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$.

2518. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!x^n}$.

2519. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)x^n}$.

2520. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}$.

2521. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^5 x^{2n}}$.

2522. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 3^n (x-5)^n}$.

2523. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{x^{n^n}}$.

2524*. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n + \frac{1}{2^n x^n}\right)$.

2525. $\sum_{n=-1}^{\infty} x^n$.

求出下列幂级数的收敛区间, 并研究在收敛区间端点上的收敛性:

2526. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

2527. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$.

2528. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

2529. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$.

2530. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.

2531. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}$.

2532. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^2 x^n$.

2533. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

2534. $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$.

2535. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$.

2536. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} x^n$.

2537. $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$.

2538. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^n$.

2539. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}$.

2540. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n \cdot 3^n \cdot \ln n}$.

2541. $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}$.

2542.** $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^{n!}$.

2543*. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^{n-1} n^n}$.

2544*. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^n}}{n^n}$.

2545. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-5)^n}{n \cdot 3^n}$.

2546. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 5^n}$.

2547. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n \cdot 9^n}$.

2548. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{2n}$.

2549. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$.

2550. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x+3)^n$.

2551. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{2n \cdot 4^n}$.

2552. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(2n-1)\cdot 2^n}$.

2553. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)^{2n}(x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}$.

2554. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x+3)^n}{n^n}$.

2555. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

2556. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n}}{(n+1)\ln(n+1)}$.

2557. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$.

2558. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$.

2559*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}(x-1)^n$.

2560. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^n(x+1)^n}{2^{n-1}\cdot n^n}$.

2561. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1}(x-2)^n$.

2562. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}$.

2563. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}$.

确定下列级数的收敛圆:

2564. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}i^n z^n$.

2565. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+ni)z^n$.

2566. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2i)^n}{n\cdot 3^n}$.

2567. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{2^n}$.

2568. $(1+2i)+(1+2i)(3+2i)z+\cdots+(1+2i)(3+2i)\cdots(2n+1+2i)z^n+\cdots$.

2569. $1+\frac{z}{1-i}+\frac{z^2}{(1-i)(1-2i)}+\cdots+\frac{z^n}{(1-i)(1-2i)\cdots(1-ni)}+\cdots$.

2570. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+2ni}{n+2i}\right)^n z^n$.

2571. 从一致收敛的定义出发, 试证明: 级数

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

在区间 $(-1,1)$ 内不一致收敛, 但是在这个区间内部的每一个闭子区间上一致收敛.

解 当 $|x|<1$ 时, 利用几何级数的求和公式, 我们得到

$$R_n(x)=x^{n+1}+x^{n+2}+\cdots=\frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

在区间 $(-1,1)$ 内部取闭区间 $[-1+\alpha,1-\alpha]$, 其中 α 为任意小的正数. 于是在这个闭区间上有 $|x|\leqslant 1-\alpha, |1-x|\geqslant\alpha$, 因此

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{(1-\alpha)^{n+1}}{\alpha}.$$

为了证明给定级数在闭区间 $[-1+\alpha,1-\alpha]$ 上的一致收敛性, 应当证明: 对任意给定 $\varepsilon>0$, 可以找到只依赖于 ε 的 N, 使得对所有 $n>N$ 及所考虑闭区间上的一切 x, 都有不等式 $|R_n(x)|<\varepsilon$ 成立.

取任意 $\varepsilon > 0$, 我们要求使得 $\dfrac{(1-\alpha)^{n+1}}{\alpha} < \varepsilon$; 由此得出

$$(1-\alpha)^{n+1} < \varepsilon\alpha, (n+1)\ln(1-\alpha) < \ln(\varepsilon\alpha),$$

亦即 $n+1 > \dfrac{\ln(\varepsilon\alpha)}{\ln(1-\alpha)}$ (因为 $\ln(1-\alpha) < 0$), 从而 $n > \dfrac{\ln(\varepsilon\alpha)}{\ln(1-\alpha)} - 1$. 这样一来, 在令 $N = \dfrac{\ln(\varepsilon\alpha)}{\ln(1-\alpha)} - 1$ 之后, 我们就可推得: 当 $n > N$ 时, 对闭区间 $[-1+\alpha, 1-\alpha]$ 上的一切 x, 确实有 $|R_n(x)| < \varepsilon$. 于是, 给定级数在区间 $(-1,1)$ 内部的任何闭子区间上一致收敛, 结论得证.

至于整个区间 $(-1,1)$, 因为它包含无限接近于 $x=1$ 的点, 且

$$\lim_{x\to 1} R_n(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^{n+1}}{1-x} = \infty,$$

所以对于无论怎样大的 n, 总可以找到这样的 x, 使得 $R_n(x)$ 大于任意大的数. 因而找不到这样的 N, 使得当 $n > N$ 时, 对区间 $(-1,1)$ 内的一切点, 都成立不等式 $|R_n(x)| < \varepsilon$. 这就说明在区间 $(-1,1)$ 内, 级数的收敛不是一致收敛的.

2572. 从一致收敛的定义出发, 试证明:

a) 级数
$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$
在每一个有限区间内一致收敛;

b) 级数
$$\frac{x^2}{1} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n} + \cdots$$
在整个收敛区间 $(-1,1)$ 内一致收敛;

c) 级数
$$1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \cdots + \frac{1}{n^x} + \cdots$$
在区间 $(1+\delta, \infty)$ 内一致收敛, 其中 δ 是任意正数;

d) 级数
$$(x^2 - x^4) + (x^4 - x^6) + (x^6 - x^8) + \cdots + (x^{2n} - x^{2n+2}) + \cdots$$
不仅在区间 $(-1,1)$ 内部收敛, 而且在这区间的端点上收敛, 但是在区间 $(-1,1)$ 内不是一致收敛.

证明下列函数项级数在指定区间上一致收敛:

2573. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, 在闭区间 $[-1,1]$ 上.

2574. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$, 在整个数轴上.

2575. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$, 在闭区间 $[0,1]$ 上.

应用逐项微分法与逐项积分法求出下列级数的和:

2576. $x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^2}{3} + \cdots + \dfrac{x^2}{n} + \cdots$.

2577. $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \cdots$.

2578. $x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$.

2579. $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$.

2580. $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots$.

2581. $1 - 3x^2 + 5x^4 - \cdots + (-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2} + \cdots$.

2582. $1\cdot 2 + 2\cdot 3x + 3\cdot 4x^2 + \cdots + n(n+1)x^{n-1} + \cdots$.

求出下列级数的和:

2583. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x^3} + \cdots + \dfrac{n}{x^n} + \cdots$.

2584. $x + \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^9}{9} + \cdots + \dfrac{x^{4n-3}}{4n-3} + \cdots$.

2585*. $1 - \dfrac{1}{3\cdot 3} + \dfrac{1}{5\cdot 3^2} - \dfrac{1}{7\cdot 3^3} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)3^{n-1}} + \cdots$.

2586. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{5}{2^3} + \cdots + \dfrac{2n-1}{2^n} + \cdots$.

§3. 泰勒级数

1°. **函数的幂级数展开式.** 如果函数 $f(x)$ 可在点 a 的某个领域 $|x-a|<R$ 内按 $x-a$ 的幂展开为幂级数, 则这个级数 (*泰勒级数*) 具有形式

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots. \qquad (1)$$

当 $a=0$ 时泰勒级数又称为*麦克劳林级数*. 当 $|x-a|<R$ 时, 如果泰勒级数的**余项**当 $n\to\infty$ 时满足

$$R_n(x) = f(x) - \left[f(a) + \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] \to 0,$$

那么等式 (1) 成立.

可以利用公式 (*拉格朗日公式*)

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)] \qquad (2)$$

估计余项, 其中 $0<\theta<1$.

例 1　把函数 $f(x)=\operatorname{ch}x$ 展开为 x 的幂级数.

解　求出给定函数 $f(x)=\operatorname{ch}x$ 的导数: $f'(x)=\operatorname{sh}x, f''(x)=\operatorname{ch}x, f'''(x)=\operatorname{sh}x,\cdots$; 一般地, 如果 n 为偶数, $f^{(n)}(x)=\operatorname{ch}x$, 如果 n 为奇数, $f^{(n)}(x)=\operatorname{sh}x$. 令

$x=0$, 即得 $f(0)=1, f'(0)=0, f''(0)=1, f'''(0)=0, \cdots$; 一般地, 如果 n 为偶数, $f^{(n)}(x)=1$, 如果 n 为奇数, $f^{(n)}(0)=0$. 根据公式 (1) 由此我们有:

$$\operatorname{ch} x = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots. \tag{3}$$

为了确定级数 (3) 的收敛区间, 我们应用达朗贝尔判别法. 对于任意 x 我们有:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}:\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)}=0.$$

因此, 在区间 $-\infty<x<\infty$ 中级数收敛. 根据公式 (2) 余项为

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\operatorname{ch}\theta x,\quad \text{如果 } n \text{ 为奇数}.$$

以及

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\operatorname{sh}\theta x,\quad \text{如果 } n \text{ 为偶数}.$$

因为 $0<\theta<1$, 所以

$$|\operatorname{ch}\theta x|=\frac{e^{\theta x}+e^{-\theta x}}{2}\leqslant e^{|x|},\ |\operatorname{sh}\theta x|=\left|\frac{e^{\theta x}-e^{-\theta x}}{2}\right|\leqslant e^{|x|}.$$

因此 $|R_n(x)|\leqslant\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|x|}$. 通项为 $\dfrac{|x|^n}{n!}$ 的级数对任意 x 都收敛 (利用达朗贝尔判别法容易确信这一点), 所以根据收敛性的必要条件有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0,$$

亦即对任意 x 有 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$. 这就意味着, 对于任意 x, 级数 (3) 的和确实等于 $\operatorname{ch} x$.

2°. 应用幂级数展开式的方法.

利用基本展开式:

I. $e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots(-\infty<x<\infty)$,

II. $\sin x=\dfrac{x}{1!}-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots(-\infty<x<\infty)$,

III. $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots(-\infty<x<\infty)$,

IV. $(1+x)^m x=1+\dfrac{m}{1!}x+\dfrac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots(-1<x<1)$①,

V. $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+\cdots\quad(-1<x\leqslant 1)$,

还有几何级数的求和公式. 在许多情况下, 可简便地得到已给函数的幂级数展开式, 并且没有必要研究余项. 有时利用逐项微分法或逐项积分法进行展开也是有效的. 当把有理函数展开为幂级数时, 建议将这些函数分解为最简分式.

①在收敛区间的端点 (即当 $x=-1, x=1$ 时), 展开式 IV 有如下情形: 当 $m\geqslant 0$ 时, 在两个端点都绝对收敛; 当 $0>m>-1$ 时, 在 $x=-1$ 发散, 在 $x=1$ 条件收敛; 当 $m\leqslant 1$ 时, 在两个端点都发散.

例 2 把函数

$$f(x)=\frac{3}{(1-x)(1+2x)}$$

展开成 x 的幂级数①.

解 把函数分解为最简分式, 我们有

$$f(x)=\frac{1}{1-x}+\frac{2}{1+2x}.$$

因为

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \tag{4}$$

和

$$\frac{1}{1+2x}=1-2x+(2x)^2-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n2^nx^n. \tag{5}$$

所以最后得

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n+2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n2^nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}[1+(-1)^n2^{n+1}]x^n. \tag{6}$$

几何级数 (4) 和 (5) 分别当 $|x|<1$ 与 $|x|<\dfrac{1}{2}$ 时收敛; 因此, 式 (6) 当 $|x|<\dfrac{1}{2}$ 时, 亦即 $-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$ 时成立.

3°. **二元函数的泰勒级数**. 无穷次可微的二元函数 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 的邻域内的泰勒级数展开式为

$$\begin{aligned}f(x,y)=f(a,b)&+\frac{1}{1!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]f(a,b)\\&+\frac{1}{2!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^2f(a,b)+\cdots\\&+\frac{1}{n!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^nf(a,b)+\cdots.\end{aligned} \tag{7}$$

如果 $a=b=0$, 泰勒级数也称为*麦克劳林级数*. 这里采用下面的记号:

$$\begin{aligned}&\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]f(a,b)\\&=\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=a\\y=b}}(x-a)+\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=a\\y=b}}(y-b);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^2f(a,b)\\&=\left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=a\\y=b}}(x-a)^2+2\left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=a\\y=b}}(x-a)(y-b)\\&\quad+\left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=a\\y=b}}(y-b)^2\quad\text{等等}.\end{aligned}$$

①这里和以后的都是指 "x 的非负整数次幂".

当 $n \to \infty$ 时, 如果级数的余项

$$R_n(x,y) = f(x,y) - \left\{ f(a,b) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y} \right]^k f(a,b) \right\} \to 0,$$

则展开式 (7) 成立. 余项可以表示为形式

$$R_n(x,y) = \frac{1}{(n+1)!} \left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y} \right]^{n+1} f(x,y) \Bigg|_{\substack{x=a+\theta(x-a)\\ y=b+\theta(y-b)}}$$

其中 $0 < \theta < 1$.

把下列指定函数按 x 的非负整数次幂展开, 求出所得级数的收敛区间, 并研究它们余项的性态:

2587. $a^x \quad (a > 0)$.

2588. $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

2589. $\cos(x + a)$.

2590. $\sin^2 x$.

2591*. $\ln(2 + x)$.

利用基本展开式 I — V 与几何级数, 写出下列函数按 x 的幂的展开式, 并指出级数的收敛区间:

2592. $\frac{2x-3}{(x-1)^2}$.

2593. $\frac{3x-5}{x^2-4x+3}$.

2594. xe^{-2x}.

2595. e^{x^2}.

2596. $\mathrm{sh}x$.

2597. $\cos 2x$.

2598. $\cos^2 x$.

2599. $\sin 3x + x\cos 3x$.

2600. $\frac{x}{9+x^2}$.

2601. $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

2602. $\ln\frac{1+x}{1-x}$.

2603. $\ln(1 + x - 2x^2)$.

应用微分法把下列函数按 x 的幂展开, 并指出这些展开式成立的区间:

2604. $(1+x)\ln(1+x)$.

2605. $\arctan x$.

2606. $\arcsin x$.

2607. $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

应用各种方法把下列函数按 x 的幂展开, 并指出各展开式成立的区间:

2608. $\sin^2 x \cos^2 x$.

2609. $(1+x)e^{-x}$.

2610. $(1+e^x)^3$.

2611. $\sqrt[3]{8+x}$.

2612. $\frac{x^2-3x+1}{x^2-5x+6}$.

2613. $\mathrm{ch}^3 x$.

2614. $\frac{1}{4-x^4}$.

2615. $\ln(x^2+3x+2)$.

2616. $\int_0^x \frac{\sin x}{x} dx$.

2617. $\int_0^x e^{-x^2} dx$.

2618. $\int_0^x \frac{\ln(1+x)}{x}dx.$

2619. $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

写出下列函数按 x 的幂的级数展开式中异于零的前三项:

2620. $\tan x.$

2621. $\text{th}x.$

2622. $e^{\cos x}.$

2623. $\sec x.$

2624. $\ln\cos x.$

2625. $e^x \sin x.$

2626*. 证明: 可以利用近似式

$$s \approx 2\pi a\left(1-\frac{\varepsilon^2}{4}\right)$$

计算椭圆的周长, 其中 ε 是椭圆的离心率, $2a$ 是椭圆的长轴.

2627. 不伸长的有重量线在自重影响下悬挂呈悬链线 $y = a\text{ch}\frac{x}{a}$, 其中 $a=\frac{H}{q}$, 这里 H 是重线的水平张力, q 是单位长度的质量. 试证: 当 x 很小时, 精确到 x^4 阶量, 重线可以看做按抛物线 $y=a+\frac{x^2}{2a}$ 悬挂.

2628. 把函数 x^3-2x^2-5x-2 按 $x+4$ 的幂展开为级数.

2629. $f(x)=5x^3-4x^2-3x+2$. 把 $f(x+h)$ 按 h 的幂展开为级数.

2630. 把 $\ln x$ 按 $x-1$ 的幂展开为级数.

2631. 把 $\frac{1}{x}$ 按 $x-1$ 的幂展开为级数.

2632. 把 $\frac{1}{x^2}$ 按 $x+1$ 的幂展开为级数.

2633. 把 $\frac{1}{x^2+3x+2}$ 按 $x+4$ 的幂展开为级数.

2634. 把 $\frac{1}{x^2+4x+7}$ 按 $x+2$ 的幂展开为级数.

2635. 把 e^x 按 $x+2$ 的幂展开为级数.

2636. 把 $\sqrt{x}$ 按 $x-4$ 的幂展开为级数.

2637. 把 $\cos x$ 按 $x-\frac{\pi}{2}$ 的幂展开为级数.

2638. 把 $\cos^2 x$ 按 $x-\frac{\pi}{4}$ 的幂展开为级数.

2639*. 把 $\ln x$ 按 $\frac{1-x}{1+x}$ 的幂展开为级数.

2640. 把 $\frac{x}{\sqrt{1+x}}$ 按 $\frac{x}{1+x}$ 的幂展开为级数.

2641. 如果近似地取

$$e \approx 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!},$$

问容许误差的值是多少?

2642. 如果利用级数

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots,$$

当 $x = 1$ 时取它的前五项之和来计算数 $\frac{\pi}{4}$, 问它的精确度是多少?

2643*. 利用函数 $\arcsin x$ 按 x 幂的级数展开式 (参阅第 2606 题) 计算数 $\frac{\pi}{6}$, 精确到 0.001.

2644. 级数

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

应取几项, 使得计算 $\cos 18^\circ$ 时可精确到 0.001?

2645. 级数

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

应取几项, 使得计算 $\sin 15^\circ$ 时可精确到 0.0001?

2646. 级数

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

应取几项, 使得求数 e 时可精确到 0.0001?

2647. 级数

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots$$

应取几项, 使得计算 $\ln 2$ 时可精确到 0.01? 精确到 0.001?

2648. 利用函数 $\sqrt[3]{8 + x}$ 按 x 的幂的级数展开式, 计算 $\sqrt[3]{7}$ 精确到 0.01.

2649. 说明近似式

$$\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a} \ (a > 0)$$

的由来. 设 $a = 5$, 利用它计算 $\sqrt{23}$, 并估计容许误差.

2650. 计算 $\sqrt[4]{19}$ 精确到 0.001.

2651. 近似式

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

中 x 应取怎样的值, 才能使得它的误差不超过 0.01? 0.001? 0.0001?

2652. 近似式

$$\sin x \approx x$$

中 x 应取怎样的值, 才取使得它的误差不超过 0.01? 0.001?

2653. 计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$ 精确到 0.0001.

2654. 计算 $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ 精确到 0.0001.

2655. 计算 $\int_0^1 \sqrt[3]{x}\cos x dx$ 精确到 0.001.

2656. 计算 $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ 精确到 0.001.

2657. 计算 $\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{1+x^3} dx$ 精确到 0.0001.

2658. 计算 $\int_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x} e^x dx$ 精确到 0.001.

2659. 把函数 $\cos(x-y)$ 按 x 和 y 的幂展开为级数, 求出所得级数的收敛域, 并研究其余项.

写出下列函数按 x 和 y 的幂的展开式, 并指出级数的收敛域:

2660. $\sin x \cdot \sin y$.

2661. $\sin(x^2+y^2)$.

2662*. $\frac{1-x+y}{1+x-y}$.

2663*. $\ln(1-x-y+xy)$.

2664*. $\arctan\frac{x+y}{1-xy}$.

2665. $f(x,y) = ax^2+2bxy+cy^2$. 把 $f(x+h, y+k)$ 按 h 和 k 的幂展开.

2666. $f(x,y) = x^3-2y^3+3xy$. 求出这函数当值 $x=1, y=2$ 变化到值 $x = 1+h, y=2+k$ 时的改变量.

2667. 把函数 e^{x+y} 按 $x-2$ 和 $y+2$ 的幂展开.

2668. 把函数 $\sin(x+y)$ 按 x 和 $y-\frac{\pi}{2}$ 的幂展开.

写出下列函数按 x 和 y 的幂的展开式的前四项:

2669. $e^x \cos y$.

2670. $(1+x)^{1+y}$.

§4. 傅里叶级数

1°. **狄利克雷定理.** 如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内:

1) 一致有界, 即当 $a<x<b$ 时, $|f(x)| \leqslant M$, 其中 M 是常数;

2) 至多有有限个间断点, 且都是第一类的 (即函数在每个间断点 ξ 处具有有限的左极限 $f(\xi-0) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} f(\xi-\varepsilon)$ 及有限的右极限 $f(\xi+0) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} f(\xi+\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$);

3) 至多有有限个严格的极值点,

我们就说函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内满足狄利克雷条件.

狄利克雷定理断定: 函数 $f(x)$ 在区间 $(-\pi,\pi)$ 内满足狄利克雷条件, 在这个区间的每一个连续点处, 函数 $f(x)$ 可展开为三角傅里叶 (Fourier) 级数:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\cdots \\ +a_n\cos nx+b_n\sin nx+\cdots, \tag{1}$$

其中傅里叶系数 a_n 和 b_n 按公式

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx \quad (n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx \quad (n=1,2,\cdots)$$

计算. 如果 x 是函数 $f(x)$ 在区间 $(-\pi,\pi)$ 内的间断点, 则傅里叶级数的和 $S(x)$ 等于函数的左极限和右极限的算术平均值:

$$S(x)=\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)].$$

在区间的端点 $x=-\pi$ 和 $x=\pi$ 处有

$$S(-\pi)=S(\pi)=\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)].$$

2°. **不完全的傅里叶级数**. 如果函数 $f(x)$ 是偶函数 (即 $f(-x)=f(x)$), 则在公式 (1) 中有

$$b_n=0 \quad (n=1,2,\cdots);$$

和

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nxdx \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

如果函数 $f(x)$ 是奇函数 (即 $f(-x)=-f(x)$), 则有

$$a_n=0 \quad (n=0,1,2,\cdots);$$

和

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nxdx \quad (n=1,2,\cdots).$$

在区间 $(0,\pi)$ 内给定的函数, 可以酌情延拓到区间 $(-\pi,0)$, 或者作偶延拓, 或者作奇延拓; 因此, 在区间 $(0,\pi)$ 内, 根据需要可把函数按倍角的正弦或者按倍角的余弦展开为不完全的傅里叶级数.

3°. **周期为 $2l$ 的傅里叶级数**. 如果函数 $f(x)$ 在长为 $2l$ 的某区间 $(-l,l)$ 内满足狄利克雷条件, 则在这个区间内函数的连续点处, 展开式

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos\frac{\pi x}{l}+b_1\sin\frac{\pi x}{l}+a_2\cos\frac{2\pi x}{l}+b_2\sin\frac{2\pi x}{l}+\cdots \\ +a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}+\cdots$$

成立, 其中

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=0,1,2,\cdots), \\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,2,\cdots). \end{cases} \tag{2}$$

在函数 $f(x)$ 的间断点处与在区间的端点 $x=\pm l$ 处, 傅里叶级数的和可与在区间 $(-\pi,\pi)$ 内进行展开的情形类似地确定.

如果函数 $f(x)$ 是在长为 $2l$ 的任意区间 $(a, a+2l)$ 内展开为傅里叶级数, 那么公式 (2) 的积分限应该分别换为 a 与 $a+2l$.

把下列指定函数在区间 $(-\pi, \pi)$ 内展开为傅里叶级数, 确定级数在间断点与在区间端点处的和, 并作出函数本身与相应级数的和函数的图形 (在区间 $(-\pi, \pi)$ 之外也同样作出):

2671.

$$f(x)=\begin{cases} c_1, & \text{当 } -\pi < x \leqslant 0 \text{ 时}, \\ c_2, & \text{当 } 0 < x < \pi \text{ 时}. \end{cases}$$

考察当 $c_1=-1, c_2=1$ 时的特殊情形.

2672.

$$f(x)=\begin{cases} ax, & \text{当 } -\pi < x \leqslant 0 \text{ 时}, \\ bx, & \text{当 } 0 < x < \pi \text{ 时}. \end{cases}$$

考察下列特殊情形: a) $a=b=1$; b) $a=-1, b=1$; c) $a=0, b=1$; d) $a=1, b=0$.

2673. $f(x)=x^2$.

2674. $f(x)=e^{ax}$.

2675. $f(x)=\sin ax$.

2676. $f(x)=\cos ax$.

2677. $f(x)=\operatorname{sh} ax$.

2678. $f(x)=\operatorname{ch} ax$.

2679. 把函数 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 内展开为傅里叶级数.

2680. 把函数 $f(x)=\dfrac{\pi}{4}$ 在区间 $(0, \pi)$ 内展开为正弦级数. 利用所得展开式求下列数项级数的和:

a) $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots$;

b) $1+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{17}-\cdots$;

c) $1-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}-\cdots$.

把下列函数在区间 $(0, \pi)$ 内展开为不完全的傅里叶级数: a) 正弦级数, b) 余弦级数. 在各函数的存在域中画出其图形以及其相应级数的和函数图形.

2681. $f(x)=x$. 并利用所得展开式求出级数

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots$$

的和.

2682. $f(x)=x^2$. 并利用所得展开式求出下列数项级数的和:

1) $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots$;

2) $1-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{4^2}+\cdots$.

2683. $f(x)=e^{ax}$.

2684.
$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } 0<x<\dfrac{\pi}{2} \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } \dfrac{\pi}{2}\leqslant x<\pi \text{ 时}.\end{cases}$$

2685.
$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{当 } 0<x\leqslant\dfrac{\pi}{2} \text{ 时},\\ \pi-x, & \text{当 } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi \text{ 时}.\end{cases}$$

把下列函数在区间 $(0,\pi)$ 内展开为正弦级数:

2686.
$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{当 } 0<x\leqslant\dfrac{\pi}{2} \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi \text{ 时}.\end{cases}$$

2687. $f(x)=x(\pi-x)$.

2688. $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}$.

把下列函数在区间 $(0,\pi)$ 内展开为余弦级数:

2689.
$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } 0<x\leqslant h \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } h<x<\pi \text{ 时}.\end{cases}$$

2690.
$$f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x}{2h}, & \text{当 } 0<x\leqslant 2h \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } 2h<x<\pi \text{ 时}.\end{cases}$$

2691. $f(x)=x\sin x$.

2692.
$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & \text{当 } 0<x\leqslant\dfrac{\pi}{2} \text{ 时},\\ -\cos x, & \text{当 } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi \text{ 时}.\end{cases}$$

2693. 利用函数 x 与 x^2 在区间 $(0,\pi)$ 内的余弦展开式 (参阅第 2681, 2682 题), 证明等式
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{3x^2-6\pi x+2\pi^2}{12}\quad(0\leqslant x\leqslant\pi).$$

2694**. 证明: 如果 $f(x)$ 是偶函数, 且有
$$f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-f\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$
则它在区间 $(-\pi,\pi)$ 内的傅里叶级数是按奇数倍角的余弦展开式; 如果 $f(x)$ 是奇函数, 且有 $f\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$, 则它在区间 $(-\pi,\pi)$ 内按奇数倍角的正弦级数展开.

把下列函数在指定区间内展开为傅里叶级数:

2695. $f(x)=|x|\ (-1<x<1)$.

2696. $f(x) = 2x$ $(0 < x < 1)$.

2697. $f(x) = e^x$ $(-l < x < l)$.

2698. $f(x) = 10 - x$ $(5 < x < 15)$.

把下列函数在指定区间内展开为不完全的傅里叶级数: a) 正弦级数; b) 余弦级数:

2699. $f(x) = 1$ $(0 < x < 1)$.

2700. $f(x) = x$ $(0 < x < l)$.

2701. $f(x) = x^2$ $(0 < x < 2\pi)$.

2702.

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } 0 < x \leqslant 1 \text{ 时}, \\ 2 - x, & \text{当 } 1 < x < 2 \text{ 时}. \end{cases}$$

2703. 把函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } \dfrac{3}{2} < x \leqslant 2 \text{ 时}, \\ 3 - x, & \text{当 } 2 < x < 3 \text{ 时} \end{cases}$$

在区间 $\left(\dfrac{3}{2}, 3\right)$ 内展开为余弦级数.

第九章　微分方程

§1. 解的验证. 曲线族的微分方程的组成. 初始条件

1°. **基本概念**. 形如

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

的方程称为 n 阶微分方程, 其中 $y = y(x)$ 是未知函数. 能使方程 (1) 成为恒等式的任何函数 $y = \varphi(x)$, 称为此方程的解, 这个函数的图形称为方程 (1) 的积分曲线. 如果解以隐式 $\Phi(x, y) = 0$ 给出, 则通常把它称为方程 (1) 的积分.

例 1　验证: 函数 $y = \sin x$ 是方程

$$y'' + y = 0$$

的解.

解　我们有

$$y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x,$$

因此,

$$y'' + y = -\sin x + \sin x \equiv 0.$$

包含 n 个独立的任意常数 $C_1, \cdots, C_n$, 且 (在给定区域中) 与方程 (1) 等价的微分方程 (1) 的积分

$$\Phi(x, y, C_1, \cdots, C_n) = 0, \tag{2}$$

称为此方程 (在相应区域中) 的通积分. 在式 (2) 中对常数 $C_1, \cdots, C_n$ 给以某些确定的数值, 便得方程 (1) 的特积分.

反之, 有了曲线族 (2), 由方程组

$$\Phi = 0, \quad \frac{d\Phi}{dx} = 0, \quad \cdots, \quad \frac{d^n\Phi}{dx^n} = 0$$

消去参数 $C_1, \cdots, C_n$, 一般可得形如 (1) 的微分方程, 此方程在相应区域中的通积分就是关系式 (2).

例 2　求抛物线族

$$y = C_1(x - C_2)^2 \tag{3}$$

的微分方程.

解　对方程 (3) 求导两次, 我们有

$$y' = 2C_1(x - C_2) \quad 和 \quad y'' = 2C_1. \tag{4}$$

由方程 (3) 和 (4) 消去参数 C_1, C_2, 我们得所求的微分方程

$$2yy'' = y'^2.$$

容易验证, 函数 (3) 使得这个方程成为恒等式.

2°. **初始条件**. 设有微分方程

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}), \tag{5}$$

其中函数 f 在点 $(x_0, y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)})$ 的邻域内有定义. 如果对这个方程所要求的特解 $y = y(x)$, 给定了初始条件 (柯西问题)

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

并且已知方程 (5) 的通解为

$$y = \varphi(x, C_1, \cdots, C_n),$$

那么任意常数 $C_1, \cdots, C_n$, 如果这是可能的话, 就由方程组

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0, C_1, \cdots, C_n), \\ y_0' = \varphi'(x_0, C_1, \cdots, C_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_0^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, \cdots, C_n). \end{cases}$$

确定.

例 3　求曲线族

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} \tag{6}$$

中满足 $y(0) = 1, y'(0) = -2$ 的曲线.

解　我们有

$$y' = C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x}. \tag{7}$$

在式 (6) 和 (7) 中令 $x = 0$, 得:

$$1 = C_1 + C_2, \quad -2 = C_1 - 2C_2,$$

由此得

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 1.$$

于是,

$$y = e^{-2x}.$$

说明下列指定函数是否为已给微分方程的解:

2704. $xy' = 2y, \quad y = 5x^2.$

2705. $y'' = x^2 + y^2, \quad y = \dfrac{1}{x}.$

2706. $(x+y)dx + xdy = 0, \quad y = \dfrac{C^2 - x^2}{2x}.$

2707. $y'' + y = 0, \quad y = 3\sin x - 4\cos x.$

2708. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t.$

2709. $y'' - 2y' + y = 0,$ a) $y = xe^x,$ b) $y = x^2 e^x.$

2710. $y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1\lambda_2 y = 0, \quad y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$

证明: 对于下列已给的微分方程, 指出的关系式是它的积分:

2711. $(x - 2y)y' = 2x - y, \quad x^2 - xy + y^2 = C^2.$

2712. $(x - y + 1)y' = 1, \quad y = x + Ce^y.$

2713. $(xy - x)y'' + xy'^2 + yy' - 2y' = 0, \quad y = \ln(xy).$

试作出下列已给曲线族的微分方程 (C, C_1, C_2, C_3 是任意常数):

2714. $y = Cx.$

2715. $y = Cx^2$

2716. $y^2 = 2Cx.$

2717. $x^2 + y^2 = C^2.$

2718. $y = Ce^x.$

2719. $x^3 = C(x^2 - y^2).$

2720. $y^2 + \dfrac{1}{x} = 2 + Ce^{-\frac{y^2}{2}}.$

2721. $\ln\dfrac{x}{y} = 1 + ay \quad$ (a 是参数).

2722. $(y - y_0)^2 = 2px \quad$ (y_0, p 是参数).

2723. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}.$

2724. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$

2725. $y = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3.$

2726. 试作出 XOY 平面上所有直线的微分方程.

2727. 试作出 XOY 平面上具有铅直轴的所有抛物线的微分方程.

2728. 试作出 XOY 平面上所有圆周的微分方程.

对下列已给曲线族, 求满足给定初始条件的曲线:

2729. $x^2 - y^2 = C, \quad y(0) = 5.$

2730. $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

2731. $y = C_1 \sin(x - C_2), \quad y(\pi) = 1, \quad y'(\pi) = 0.$

2732. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -2.$

§2. 一阶微分方程

1°. **一阶微分方程的形式**. 含有未知函数 y, 且导数 y' 已解出的一阶微分方程, 其形式为

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

其中 $f(x,y)$ 是已知函数. 在某些情形下把变量 x 看作未知函数, 而把方程 (1) 改写为

$$x' = g(x, y) \tag{1'}$$

的形式是有益处的, 其中 $g(x,y) = \dfrac{1}{f(x,y)}$.

由于 $y' = \dfrac{dy}{dx}$ 和 $x' = \dfrac{dx}{dy}$, 微分方程 (1) 和 (1′) 可以写成对称形式

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{2}$$

其中 $P(x,y), Q(x,y)$ 均为已知函数.

所谓方程 (2) 的解, 是指满足该方程的形如 $y = \varphi(x)$ 或 $x = \psi(y)$ 的函数. 方程 (1) 和 (1′) 的通积分, 或者方程 (2) 的通积分, 具有形式 $\Phi(x, y, C) = 0$, 其中 C 是任意常数.

2°. **方向场**. 满足

$$\tan\alpha = f(x, y)$$

的方向的集合称为微分方程 (1) 的*方向场*, 通常用倾斜角为 α 的小线段族或箭头族表示.

在曲线 $f(x,y) = k$ 上每一点处方向场的倾斜度都等于常数 k 的曲线称为*等斜线*. 在最简单情形, 当画出了等斜线和方向场后, 就可以近似地描绘出积分曲线族, 只要把后者看成是在其上每一点处都具有给定场方向的曲线.

例 1 用等斜线法画出方程

$$y' = x$$

的积分曲线族.

解 作出等斜线 $x = k$ (直线族) 和方向场后, 我们就近似地得到积分曲线族 (图 105). 通解是抛物线族

$$y = \frac{x^2}{2} + C.$$

用等斜线法近似地画出下列给定微分方程的积分曲线族:

2733. $y' = -x$.

2734. $y' = -\dfrac{x}{y}$.

2735. $y' = 1 + y^2$.

2736. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

2737. $y' = x^2 + y^2$.

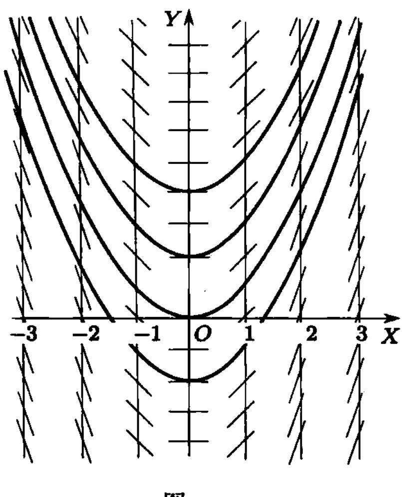


图 105

3°. **柯西定理**. 如果函数 $f(x,y)$ 在某区域 $U\{a<x<A, b<y<B\}$ 内连续, 且在该区域内具有有界的导数 $f'_y(x,y)$, 那么通过 U 内每一点 (x_0,y_0), 方程 (1) 的积分曲线 $y=\varphi(x)$ 有且只有一条 $(\varphi(x_0)=y_0)$.

4°. **欧拉折线法**. 为了近似地画出方程 (1) 通过给定点 $M_0(x_0,y_0)$ 的积分曲线, 可用顶点为 $M_i(x_i,y_i)$ 的折线代替这条曲线, 其中

$$x_{i+1}=x_i+\triangle x_i,\quad y_{i+1}=y_i+\triangle y_i,$$
$$\triangle x_i=h\ (\text{步长}),\quad \triangle y_i=hf(x_i,y_i)\quad (i=0,1,2,\cdots).$$

例 2 设方程

$$y'=\frac{xy}{2},$$

如果 $y(0)=1$ $(h=0.1)$, 试用欧拉法求 $y(1)$.

解 我们构造表格:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y_i	1	1	1.005	1.015	1.030	1.051	1.077	1.109	1.148	1.194	1.248
$\Delta y_i=\frac{x_iy_i}{20}$	0	0.005	0.010	0.015	0.021	0.026	0.032	0.039	0.046	0.054	

于是 $y(1)=1.248$. 为了比较, 我们给出精确值 $y(1)=e^{\frac{1}{4}}\approx 1.284$.

用欧拉法求出下列已给微分方程的特解在指定 x 值处的值:

2738. $y'=y,\quad y(0)=1$, 求 $y(1)$ $(h=0.1)$.

2739. $y'=x+y,\quad y(1)=1$, 求 $y(2)$ $(h=0.1)$.

2740. $y'=-\dfrac{y}{1+x},\quad y(0)=2$, 求 $y(1)$ $(h=0.1)$.

2741. $y'=y-\dfrac{2x}{y},\quad y(0)=1$, 求 $y(1)$ $(h=0.2)$.

§3. 可分离变量的一阶微分方程. 正交轨线

1°. **可分离变量的一阶方程**. 形如

$$y' = f(x)g(y) \tag{1}$$

或者

$$X(x)Y(y)dx + X_1(x)Y_1(y)dy = 0 \tag{1'}$$

的一阶方程称为*可分离变量方程*.

将方程 (1) 两边同除以 $g(y)$ 并乘以 dx 后, 我们有

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

由此经积分后, 我们得到方程 (1) 的通积分为

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C. \tag{2}$$

类似地, 将方程 (1′) 两边同除以 $X_1(x)Y(y)$, 并经积分后, 我们得到方程 (1′) 的通积分为

$$\int \frac{X(x)}{X_1(x)}dx = \int \frac{Y_1(y)}{Y(y)}dy + C. \tag{2'}$$

如果对于某个 $y = y_0$ 值, 成立 $g(y_0) = 0$, 那么容易直接证明函数 $y = y_0$ 也是方程 (1) 的解. 类似地, 如果 a 与 b 分别是方程 $X_1(x) = 0$ 与 $Y(y) = 0$ (原方程 (1′) 须除以这两个方程的左边) 的根, 那么直线 $x = a$ 与 $y = b$ 也是方程 (1′) 的积分曲线.

例 1 解方程

$$y' = -\frac{y}{x}, \tag{3}$$

并求出满足初始条件

$$y(1) = 2$$

的特解.

解 方程 (3) 可写成

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

由此经过分离变量后, 我们有:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x},$$

因此,

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln C_1,$$

其中任意常数 $\ln C_1$ 取成对数形式. 去对数后我们得通解

$$y = \frac{C}{x}, \tag{4}$$

其中 $C = \pm C_1$.

当除以 y 时,我们可能会失去解 $y=0$,但是后者已包含在当 $C=0$ 时的式 (4) 之中. 利用已给的初始条件, 我们得 $C=2$, 因此, 所求的特解为

$$y=\frac{2}{x}.$$

2°. **能化为可分离变量方程的某些微分方程**. 形如

$$y'=f(ax+by+c)\quad(b\neq 0)$$

的微分方程, 利用变量代换 $u=ax+by+c$, 可化为形如 (1) 的方程, 其中 u 是新的未知函数.

3°. **正交轨线**. 就是与给定曲线族 $\Phi(x,y,a)=0$(a 是参数) 的曲线相交成直角的曲线族. 如果 $F(x,y,y')=0$ 是给定曲线族的微分方程, 那么

$$F\left(x,y,-\frac{1}{y'}\right)=0$$

就是其正交轨线的微分方程.

例 2 求椭圆族

$$x^2+2y^2=a^2 \tag{5}$$

的正交轨线.

解 对方程 (5) 求导, 我们求得曲线族的微分方程

$$x+2yy'=0.$$

由此, 用 $-\frac{1}{y'}$ 代替 y', 我们得到正交轨线的微分方程

$$x-\frac{2y}{y'}=0\quad 或\quad y'=\frac{2y}{x}.$$

积分后, 我们有 $y=Cx^2$ (抛物线族) (图 106).

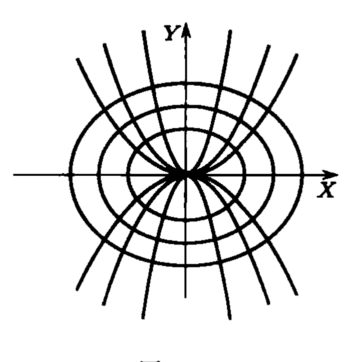


图 106

4°. **微分方程的构成**. 在几何问题中要建立微分方程, 常常可以利用导数的几何意义: 导数是曲线的切线与 OX 轴正向夹角的正切. 这在许多情况下能使我们很快建立未知曲线的纵坐标 y、横坐标 x 以及 y' 之间的关系式, 即得到微分方程. 在另一些情况下 (参阅第 2783, 2890, 2895 题), 要利用定积分的几何意义, 诸如曲边梯形的面积或曲线的弧长. 这时, 由问题的条件可直接得到最简单的积分方程 (因为未知函数被包含在积分号下), 而通过对其两边求导, 可容易地转变为微分方程.

例 3 求一条曲线,它经过点 $(3,2)$,且介于坐标轴之间的任意切线段被切点所平分.

解 设点 $M(x,y)$ 是切线段 AB 的中点, 根据条件, 它就是切点 (点 A 和 B 是切线与 OY 轴和 OX 轴的交点). 由条件知道 $OA=2y$ 和 $OB=2x$. 在点 $M(x,y)$ 处, 曲线的切线斜率等于

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{OA}{OB}=-\frac{y}{x}.$$

这就是所求曲线的微分方程. 变形后, 我们得:

$$\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=0,$$

因此,

$$\ln|x|+\ln|y|=\ln|C| \quad 或 \quad xy=C.$$

利用初始条件, 我们定出 $C=3\times 2=6$. 于是, 所求的曲线就是双曲线 $xy=6$.

求解下列微分方程:

2742. $\tan x\sin^2 ydx+\cos^2\cot ydy=0$.

2743. $xy'-y=y^3$.

2744. $xyy'=1-x^2$.

2745. $y-xy'=a(1+x^2y')$.

2746. $3e^x\tan ydx+(1-e^x)\sec^2 ydy=0$.

2747. $y'\tan x=y$.

求出下列方程满足指定初始条件的特解:

2748. $(1+e^x)\cdot y\cdot y'=e^x$; 当 $x=0$ 时, $y=1$.

2749. $(xy^2+x)dx+(x^2y-y)dy=0$; 当 $x=0$ 时, $y=1$.

2750. $y'\sin x=y\ln y$; 当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时, $y=1$.

利用变量变换, 解下列微分方程:

2751. $y'=(x+y)^2$.

2752. $y'=(8x+2y+1)^2$.

2753. $(2x+3y-1)dx+(4x+6y-5)dy=0$.

2754. $(2x-y)dx+(4x-2y+3)dy=0$.

在 2755 和 2756 题中, 化为极坐标求解:

2755. $y'=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y}$.

2756. $(x^2+y^2)dx-xydy=0$.

2757*. 求出曲线, 使得曲线的切线段之长等于切点到坐标原点的距离.

2758. 求出曲线, 使得在曲线上任意点处的法线在坐标轴之间的线段被该点所平分.

2759. 求出次切距有定长 a 的曲线.

2760. 求出次切距等于切点横坐标二倍的曲线.

2761*. 求出曲线, 使得由坐标轴、这条曲线以及曲线上任意点的纵坐标所围成平面图形重心的横坐标, 等于该点横坐标的 3/4.

2762. 曲线通过点 (3, 1), 它在切点和 OX 轴之间的切线段被切线与 OY 轴的交点所平分, 求此曲线的方程.

2763. 曲线通过点 $(2,0)$, 如果切点和 OY 轴之间的切线段有定长 2, 求此曲线的方程.

求下列已给曲线族 (a 是参数) 的正交轨线, 并画出曲线族及其正交轨线:

2764. $x^2+y^2=a^2$. **2765**. $y^2=ax$.

2766. $xy=a$. **2767**. $(x-a)^2+y^2=a^2$.

§4. 一阶齐次微分方程

1°. **齐次方程**. 如果 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 是同次齐次函数, 则微分方程

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{1}$$

称为*齐次方程*. 方程 (1) 可以化为

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

的形式, 并可用代换 $y=xu$ 把它变为可分离变量方程, 其中 u 是新的未知函数. 也可以利用代换 $x=yu$.

例 求方程

$$y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$$

的通解.

解 我们设 $y=ux$, 于是 $u+xu'=e^u+u$ 或者

$$e^{-u}du=\frac{dx}{x}.$$

积分后, 我们得到 $u=-\ln\ln\left|\dfrac{C}{x}\right|$, 由此得出

$$y=-x\ln\ln\left|\frac{C}{x}\right|.$$

2°. **可化为齐次方程的方程**. 如果

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right), \tag{2}$$

且 $\delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$, 那么, 在方程 (2) 中设 $x=u+\alpha$, $y=v+\beta$, 我们就得到关于变量 u 和 v 的齐次微分方程, 其中常数 α 和 β 由方程组

$$a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0, \quad a_2\alpha+b_2\beta+c_2=0$$

确定. 如果 $\delta=0$, 那么, 在方程 (2) 中设 $a_1x+b_1y=u$, 我们就得到可分离变量方程.

积分下列微分方程:

2768. $y'=\dfrac{y}{x}-1$.

2769. $y'=-\dfrac{x+y}{x}$.

2770. $(x-y)ydx - x^2dy = 0$.

2771. 求方程 $(x^2+y^2)dx - 2xydy = 0$ 的积分曲线族, 并找出分别通过点 $(4,0)$ 与 $(1,1)$ 的曲线.

2772. $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$.

2773. $xdy - ydx = \sqrt{x^2+y^2}dx$.

2774. $(4x^2+3xy+y^2)dx + (4y^2+3xy+x^2)dy = 0$.

2775. 根据条件: 当 $x=2$ 时, $y=1$, 求出方程 $(x^2-3y^2)dx + 2xydy = 0$ 的特解.

解下列方程:

2776. $(2x-y+4)dy + (x-2y+5)dx = 0$.

2777. $y' = \dfrac{1-3x-3y}{1+x+y}$.

2778. $y' = \dfrac{x+2y+1}{2x+4y+3}$.

2779. 曲线通过点 $(1,0)$, 且具有这样的性质: 切线在 OY 轴上的截距等于切点的极径, 求此曲线的方程.

2780**. 要使探照灯的反射镜能把由点光源向周围发射的光线反射成平行光束, 反射镜应做成什么形状?

2781. 求次切距等于切点坐标的算术平均值的曲线方程.

2782. 由曲线上任意一点引法线, 它在纵轴上的截距长度等于该点到坐标原点的距离, 求此曲线的方程.

2783*. 求曲线的方程, 使得由横轴、曲线以及两个纵坐标 (其中一个不变, 另一个变动) 所围成的面积, 等于变动纵坐标的立方与对应横坐标之比.

2784. 求曲线, 使得其任意切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标.

§5. 一阶线性微分方程. 伯努利方程

1°. **线性方程**. 关于 y 和 y' 都是一次的微分方程

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{1}$$

称为*线性方程*.

如果函数 $Q(x) \equiv 0$, 则方程 (1) 具有形式

$$y' + P(x)y = 0, \tag{2}$$

并称它为*齐次线性微分方程*. 在这种情况下, 变量可分离, 且方程 (2) 的通解为

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}. \tag{3}$$

为了解非齐次线性方程 (1), 我们采用所谓*任意常数变易法*. 这种方法是: 先求对应的齐次线性方程的通解, 即求表达式 (3). 然后, 在这个表达式中把常数 C 设成 x 的函数, 再求非齐次方程 (1) 的形如 (3) 的解. 为此, 把由 (3) 确定的 y 和 y' 代入方程 (1),

由所得的微分方程确定函数 $C(x)$. 因此, 我们得到非齐次方程的通解形如

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx}.$$

例 1 解方程

$$y' = \tan x \cdot y + \cos x. \tag{4}$$

解 对应的齐次方程是

$$y' - \tan x \cdot y = 0.$$

解此方程后, 我们得到

$$y = C \cdot \frac{1}{\cos x}.$$

把 C 看作 x 的函数, 求导后得到

$$y' = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{dC}{dx} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} \cdot C.$$

把 y 和 y' 代入方程 (4), 我们得到

$$\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{dC}{dx} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} \cdot C = \tan x \cdot \frac{C}{\cos x} + \cos x, \quad \text{或者} \quad \frac{dC}{dx} = \cos^2 x,$$

由此得出

$$C(x) = \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C_1.$$

所以, 方程 (4) 的通解为

$$y = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C_1\right) \cdot \frac{1}{\cos x}.$$

为了求解线性方程 (1), 我们还可用代换

$$y = uv, \tag{5}$$

其中 u 和 v 是 x 的未知函数. 这时方程 (1) 成为

$$[u' + P(x)u]v + v'u = Q(x). \tag{6}$$

如果要求

$$u' + P(x)u = 0, \tag{7}$$

则我们由 (7) 求出 u, 然后由 (6) 求出 v, 因此, 由 (5) 求得 y.

2°. **伯努利方程**. 形如

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}$$

的一阶方程称为伯努利方程, 其中 $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$. 用代换 $z = y^{1-\alpha}$ 可把它化为线性方程. 也可以直接用代换 $y = uv$, 或者用任意常数变易法.

例 2 解方程

$$y' = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}.$$

解 这是伯努利方程 $\left(\alpha = \frac{1}{2}\right)$. 设

$$y = uv,$$

我们得

$$u'v + v'u = \frac{4}{x}uv + x\sqrt{uv} \quad \text{或者} \quad v\left(u' - \frac{4}{x}u\right) + v'u = x\sqrt{uv}. \tag{8}$$

为了确定函数 u, 我们要求它满足关系式

$$u' - \frac{4}{x}u = 0,$$

由此得出

$$u = x^4.$$

把此表达式代入方程 (8), 我们得到

$$v'x^4 = x\sqrt{vx^4},$$

由此求得 v:

$$v = \left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right)^2;$$

所以, 我们得到通解

$$y = x^4\left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right)^2.$$

求下列方程的通积分:

2785. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = x.$

2786. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x} = x^3.$

2787*. $(1+y^2)dx = (\sqrt{1+y^2}\sin y - xy)dy.$

2788. $y^2dx - (2xy+3)dy = 0.$

求下列方程满足指定条件的特解:

2789. $xy' + y - e^x = 0$; 当 $x = a$ 时, $y = b$.

2790. $y' - \dfrac{y}{1-x^2} - 1 - x = 0$; 当 $x = 0$ 时, $y = 0$.

2791. $y' - y\tan x = \dfrac{1}{\cos x}$; 当 $x = 0$ 时, $y = 0$.

求出下列方程的通解:

2792. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = -xy^2.$

2793. $2xy\dfrac{dy}{dx} - y^2 + x = 0.$

2794. $ydx + \left(x - \dfrac{1}{2}x^3y\right)dy = 0.$

2795. $3xdy = y(1 + x\sin x - 3y^3\sin x)dx.$

2796. 已知线性方程的三个特解 y, y_1, y_2, 证明: 对任何 x, 表达式 $\dfrac{y_2 - y}{y - y_1}$ 保持常

数值, 这个结果有什么几何意义?

2797. 求出曲线族, 使得由 OX 轴、曲线的切线以及切点的向径所构成的三角形面积为常数.

2798. 求出曲线的方程, 使得其切线在横轴上的截距长度等于切点纵坐标的平方.

2799. 求出曲线的方程, 使得其切线在纵轴上的截距长度等于次法距.

2800. 求出曲线的方程, 使得其切线在纵轴上的截距长度与切点纵坐标的平方成正比.

2801. 求出曲线的方程, 使得切线段长度等于该切线与 OX 轴的交点至点 $M(O, a)$ 的距离.

§6. 全微分方程. 积分因子

1°. **全微分方程**. 如果微分方程

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

满足等式 $\dfrac{\partial P}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, 那么方程 (1) 可以写成形式 $dU(x,y) = 0$, 且称它为全微分方程. 方程 (1) 的通积分是 $U(x,y) = C$. 函数 $U(x,y)$ 可按第六章 §8 中指出的方法确定, 或按公式

$$U = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy$$

确定 (参阅第七章 §9).

例 1 求微分方程

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$$

的通积分.

解 因为 $\dfrac{\partial(3x^2+6xy^2)dx}{\partial y} = \dfrac{\partial(6x^2y+4y^3)}{\partial x} = 12xy$, 所以这是全微分方程, 从而方程具有形式 $dU = 0$.

这里

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2 \quad 和 \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2y + 4y^3;$$

由此得出

$$U = \int (3x^2 + 6xy^2)dx + \varphi(y) = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y).$$

将 U 对 y 求导后, 得 $\dfrac{\partial U}{\partial y} = 6x^2y + \varphi'(y) = 6x^2y + 4y^3$ (按条件), 由此得出 $\varphi'(y) = 4y^3$, $\varphi(y) = y^4 + C_0$. 最后我们得到 $U(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + C_0$, 所以, $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$ 就是所求原方程的通积分.

2°. **积分因子**. 如果方程 (1) 的左边不是全微分, 但满足柯西定理的条件, 那么存在函数 $\mu=\mu(x,y)$ (积分因子), 使得

$$\mu(Pdx+Qdy)=dU. \tag{2}$$

由此我们得到, 函数 μ 满足方程

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu Q).$$

在下面两种情况下, 积分因子 μ 容易求得:

1) $\dfrac{1}{Q}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)=F(x)$, 这时 $\mu=\mu(x)$;

2) $\dfrac{1}{P}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)=F_1(y)$, 这时 $\mu=\mu(y)$.

例 2 解方程 $\left(2xy+x^2y+\dfrac{y^3}{3}\right)dx+(x^2+y^2)dy=0$.

解 这里 $P=2xy+x^2y+\dfrac{y^3}{3}$, $Q=x^2+y^2$, 以及

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{2x+x^2+y^2-2x}{x^2+y^2}=1,$$

因此, $\mu=\mu(x)$.

因为 $\dfrac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\dfrac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$ 或者 $\mu\dfrac{\partial P}{\partial y}=\mu\dfrac{\partial Q}{\partial x}+Q\dfrac{\partial \mu}{\partial x}$, 所以

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx=dx,\quad \ln\mu=x,\quad \mu=e^x.$$

将方程乘以 $\mu=e^x$ 后, 我们得到:

$$e^x\left(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\right)dx+e^x(x^2+y^2)dy=0,$$

这是全微分方程. 对它积分后, 我们可得通积分

$$ye^x\left(x^2+\frac{y^2}{3}\right)=C.$$

求出下列方程的通积分:

2802. $(x+y)dx+(x+2y)dy=0$.

2803. $(x^2+y^2+2x)dx+2xydy=0$.

2804. $(x^3-3xy^2+2)dx-(3x^2y-y^2)dy=0$.

2805. $xdx+ydy=\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$.

2806. $\dfrac{2xdx}{y^3}+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$.

2807. 求出方程

$$(x+e^{\frac{x}{y}})dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$$

满足初始条件 $y(0)=2$ 的特积分.

设积分因子形如 $\mu=\mu(x)$ 或 $\mu=\mu(y)$, 求解下列方程:

2808. $(x+y^2)dx-2xydy=0$.

2809. $y(1+xy)dx-xdy=0$.

2810. $\dfrac{y}{x}dx+(y^3-\ln x)dy=0$.

2811. $(x\cos y-y\sin y)dy+(x\sin y+y\cos y)dx=0$.

§7. 导数未解出的一阶微分方程

1°. **一阶高次微分方程**. 如果给出方程

$$F(x,y,y')=0 \tag{1}$$

关于 y', 例如, 是二次的, 则由方程 (1) 解出 y', 我们就得到两个方程:

$$y'=f_1(x,y),\quad y'=f_2(x,y). \tag{2}$$

于是, 经过某个平面区域内的每一点 $M_0(x_0,y_0)$, 一般来说, 有两条积分曲线. 在这种情况下, 方程 (1) 的通积分, 就有形式

$$\Phi(x,y,C)\equiv\Phi_1(x,y,C)\Phi_2(x,y,C)=0, \tag{3}$$

其中 Φ_1 与 Φ_2 都是方程 (2) 的通积分.

此外, 方程 (1) 还可能存在*奇积分*. 几何上, 奇积分是曲线族 (3) 的包络, 它可由方程组

$$\Phi(x,y,C)=0,\quad \Phi_0'(x,y,C)=0 \tag{4}$$

消去 C 而得到, 或由方程组

$$F(x,y,p)=0,\quad F_P'(x,y,p)=0 \tag{5}$$

消去 $p=y'$ 而得到.

我们注意到, 由方程组 (4) 或 (5) 所确定的曲线, 并不总是方程 (1) 的解, 所以在每一种个别情况下, 都必须加以检验.

例 1 求方程

$$xy'^2+2xy'-y=0$$

的通积分和奇积分.

解 先解出 y', 我们得到两个齐次方程:

$$y'=-1+\sqrt{1+\frac{y}{x}},\quad y'=-1-\sqrt{1+\frac{y}{x}},$$

它们确定在区域

$$x(x+y)>0$$

中, 通积分为

$$\left(\sqrt{1+\frac{y}{x}}-1\right)^2=\frac{C}{x};\quad \left(\sqrt{1+\frac{y}{x}}+1\right)^2=\frac{C}{x},$$

或者

$$(2x+y-C)-2\sqrt{x^2+xy}=0,\quad (2x+y-C)+2\sqrt{x^2+xy}=0.$$

相乘后, 即得原方程的通积分

$$(2x+y-C)^2-4(x^2+xy)=0$$

或者

$$(y-C)^2=4Cx$$

(抛物线族).

将通积分对 C 求导, 并消去 C 后, 我们求得奇积分

$$x+y=0.$$

(经检验表明 $x+y=0$ 是原方程的解).

也可以通过把 $xp^2+2xp-y=0$ 对 p 求导, 然后消去 p 而求得奇积分.

2°. **用引进参数的方法解微分方程**. 如果一阶微分方程的形式如

$$x=\varphi(y,y'),$$

则变量 y 与 x 可由方程组

$$\frac{1}{p}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{dp}{dy},\quad x=\varphi(y,p)$$

确定, 其中 $p=y'$ 起参数作用.

类似地, 如果 $y=\psi(x,y')$, 则 x 与 y 由方程组

$$p=\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial p}\frac{dp}{dx},\quad y=\psi(x,p)$$

确定.

例 2 求方程

$$y=y'^2-xy'+\frac{x^2}{2}$$

的通积分和奇积分.

解 作代换 $y'=p$ 后, 我们把方程改写为

$$y=p^2-xp+\frac{x^2}{2}.$$

把 p 看作 x 的函数, 对 x 求导后, 我们有

$$p=2p\frac{dp}{dx}-p-x\frac{dp}{dx}+x$$

或者

$$\frac{dp}{dx}(2p-x)=2p-x,$$

或者

$$\frac{dp}{dx}=1.$$

积分后, 我们得到 $p=x+C$. 代入原方程, 即得通解:

$$y=(x+C)^2-x(x+C)+\frac{x^2}{2}\quad 或\quad y=\frac{x^2}{2}+Cx+C^2.$$

将通解对 C 求导, 并消去 C 后, 我们得奇解: $y=\dfrac{x^2}{4}$. (经检验表明, $y=\dfrac{x^2}{4}$ 是原方程的解.)

如果令约去的因子 $2p-x$ 等于零, 则得 $p=\dfrac{x}{2}$, 把 p 代入给定方程, 我们得到同样的奇解 $y=\dfrac{x^2}{4}$.

求下列方程的通积分和奇积分 (第 2812, 2813, 题应作出积分曲线族):

2812. $y'^2-\dfrac{2y}{x}y'+1=0$.

2813. $4y'^2-9x=0$.

2814. $yy'^2-(xy+1)y'+x=0$.

2815. $yy'^2-2xy'+y=0$.

2816. 求方程 $y'^2+y^2=1$ 通过点 $M\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 的积分曲线.

引进参数 $y'=p$ 后, 求解下列方程:

2817. $x=\sin y'+\ln y'$.

2818. $y=y'^2e^{y'}$.

2819. $y=y'^2+2\ln y'$.

2820. $4y=x^2+y'^2$.

2821. $e^x=\dfrac{y^2+y'^2}{2y'}$.

§8. 拉格朗日方程和克莱罗方程

1°. **拉格朗日方程**. 形式如

$$y=x\varphi(p)+\psi(p) \tag{1}$$

的方程称为*拉格朗日方程*, 其中 $p=y'$. 利用微分法, 并考虑到 $dy=pdx$, 方程 (1) 可化为关于 x 和 $\dfrac{dx}{dp}$ 的线性方程:

$$pdx=\varphi(p)dx+[x\varphi'(p)+\psi'(p)]dp. \tag{2}$$

如果 $p\equiv\varphi(p)$, 则由方程 (1) 和 (2), 可得参数形式的通解:

$$x=Cf(p)+g(p),\quad y=[Cf(p)+g(p)]\varphi(p)+\psi(p),$$

其中 p 是参数, 而 $f(p)$, $g(p)$ 是某两个已知函数. 此外, 可以存在奇解, 它可按通常方法求得.

2°. **克莱罗 (Clairaut) 方程**. 如果方程 (1) 中 $\varphi(p)\equiv p$, 则我们得到*克莱罗方程*

$$y=xp+\psi(p).$$

它的通解具有形式 $y=Cx+\psi(C)$ (直线族). 此外, 存在奇解 (包络), 它可由方程组

$$\begin{cases} x=-\psi'(p), \\ y=px+\psi(p) \end{cases}$$

消去参数 p 而得到.

例 解方程

$$y = 2y'x + \frac{1}{y'}. \tag{3}$$

解 令 $y' = p$, 则有 $y = 2px + \frac{1}{p}$. 微分后, 以 pdx 代替 dy, 我们得到

$$pdx = 2pdx + 2xdp - \frac{dp}{p^2}$$

或者

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2}{p}x + \frac{1}{p^3},$$

求解这个线性方程后, 我们有

$$x = \frac{1}{p^2}(\ln|p| + C).$$

因此, 通积分为

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{p^2}(\ln|p| + C), \\ y = 2px + \dfrac{1}{p}. \end{cases}$$

为了求出奇积分, 按照一般规则作出方程组

$$y = 2px + \frac{1}{p}, \quad 0 = 2x - \frac{1}{p^2}.$$

由此得到

$$x = \frac{1}{2p^2}, \quad y = \frac{2}{p},$$

所以,

$$y = \pm 2\sqrt{2x}.$$

把 y 代入方程 (3), 可知得到的函数并不是解, 因此, 方程 (3) 没有奇积分.

求解下列拉格朗日方程:

2822. $y = \frac{1}{2}x\left(y' + \frac{4}{y'}\right)$.

2823. $y = y' + \sqrt{1 - y'^2}$.

2824. $y = (1 + y')x + y'^2$.

2825*. $y = -\frac{1}{2}y'(2x + y')$.

求下列克莱罗方程的通积分和奇积分, 并作出积分曲线族:

2826. $y = xy' + y'^2$.

2827. $y = xy' + y'$.

2828. $y = xy' + \sqrt{1 + (y')^2}$.

2829. $y = xy' + \frac{1}{y'}$

2830. 求出曲线, 使得曲线上任意一点的切线与坐标轴所围成三角形的面积是常数.

2831. 如果一个定点到一条曲线的任意切线的距离是常数, 求此曲线.

2832. 求出曲线, 使得其任意切线上介于坐标轴之间的线段有定长 l.

§9. 一阶微分方程的杂题

2833. 确定下列微分方程的类型, 并指出其解法:

a) $(x+y)y' = x\arctan\dfrac{y}{x}$; b) $(x-y)y' = y^2$;

c) $y' = 2xy + x^3$; d) $y' = 2xy + y^3$;

e) $xy' + y = \sin y$; f) $(y - xy')^2 = y'^3$;

g) $y = xe^{y'}$; h) $(y' - 2xy)\sqrt{y} = x^3$;

i) $y' = (x+y)^2$; j) $x\cos y' + y\sin y' = 1$;

k) $(x^2 - xy)y' = y^4$;

l) $(x^2 + 2xy^3)dx + (y^2 + 3x^2y^2)dy = 0$;

m) $(x^3 - 3xy)dx + (x^2+3)dy = 0$;

n) $(xy^3 + \ln x)dx = y^2dy$.

求解下列方程:

2834. a) $\left(x - y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx + x\cos\dfrac{y}{x}dy = 0$;

b) $x\ln\dfrac{x}{y}dy - ydx = 0$.

2835. $xdx = \left(\dfrac{x^2}{y} - y^3\right)dy$. **2836**. $(2xy^2 - y)dx + xdy = 0$.

2837. $xy' + y = xy^2\ln x$. **2838**. $y = xy' + y'\ln y'$.

2839. $y = xy' + \sqrt{-ay'}$.

2840. $x^2(y+1)dx + (x^3-1)(y-1)dy = 0$.

2841. $(1+y^2)(e^{2x}dx - e^ydy) - (1+y)dy = 0$.

2842. $y' - y\dfrac{2x-1}{x^2} = 1$. **2843**. $ye^y = (y^3 + 2xe^y)y'$.

2844. $y' + y\cos x = \sin x\cos x$. **2845**. $(1-x^2)y' + xy = a$.

2846. $xy' - \dfrac{y}{x+1} - x = 0$. **2847**. $y'(x\cos y + a\sin 2y) = 1$.

2848. $(x^2y - x^2 + y - 1)dx + (xy + 2x - 3y - 6)dy = 0$.

2849. $y' = \left(1 + \dfrac{y-1}{2x}\right)^2$. **2850**. $xy^3dx = (xy^2+2)dy$.

2851. $y' = \dfrac{3x^2}{x^3+y+1}$. **2852**. $2dx + \sqrt{\dfrac{x}{y}}dy - \sqrt{\dfrac{y}{x}}dx = 0$.

2853. $y' = \dfrac{y}{x} + \tan\dfrac{y}{x}$. **2854**. $yy' + y^2 = \cos x$.

2855. $xdy + ydx = y^2dx$. **2856**. $y'(x + \sin y) = 1$.

2857. $y\dfrac{dp}{dy} = -p + p^2$. **2858**. $x^3dx - (x^4 + y^3)dy = 0$.

2859. $x^2y'^2+3xyy'+2y^2=0$.

2860. $\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{xdy-ydx}{y^2}=0$.

2861. $e^ydx+(xe^y-2y)dy=0$.

2862. $y=2xy'+\sqrt{1+y'^2}$.

2863. $y'=\frac{y}{x}(1+\ln y-\ln x)$.

2864. $(2e^x+y^4)dy-ye^xdx=0$.

2865. $y'=2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$.

2866. $xy(xy^2+1)dy-dx=0$.

2867. $a(xy'+2y)=xyy'$.

2868. $xdy-ydx=y^2dx$.

2869. $(x^2-1)^{\frac{3}{2}}dy+(x^3+3xy\sqrt{x^2-1})dx=0$.

2870. $\tan x\frac{dy}{dx}-y=a$.

2871. $\sqrt{a^2+x^2}dy+(x+y-\sqrt{a^2+x^2})dx=0$.

2872. $xyy'^2-(x^2+y^2)y'+xy=0$.

2873. $y=xy'+\frac{1}{y'^2}$.

2874. $(3x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-3y^2)dy=0$.

2875. $2yp\frac{dp}{dy}=3p^2+4y^2$.

在指定的初始条件下, 求出下列方程的解:

2876. $y'=\frac{y+1}{x}$; 当 $x=1$ 时, $y=0$.

2877. $e^{x-y}y'=1$; 当 $x=1$ 时, $y=1$.

2878. $y'\cot x+y=2$; 当 $x=0$ 时, $y=2$.

2879. $e^y(y'+1)=1$; 当 $x=0$ 时, $y=0$.

2880. $y'+y=\cos x$; 当 $x=0$ 时, $y=\frac{1}{2}$.

2881. $y'-2y=-x^2$; 当 $x=0$ 时, $y=\frac{1}{4}$.

2882. $y'+y=2x$; 当 $x=0$ 时, $y=-1$.

2883. $xy'=y$; a) 当 $x=1$ 时, $y=1$; b) 当 $x=0$ 时, $y=0$.

2884. $2xy'=y$; a) 当 $x=1$ 时, $y=1$; b) 当 $x=0$ 时, $y=0$.

2885. $2xyy'+x^2-y^2=0$; a) 当 $x=0$ 时, $y=0$; b) 当 $x=0$ 时, $y=1$; c) 当 $x=1$ 时, $y=0$.

2886. 曲线通过点 $(0,1)$, 且其次切距等于切点的两个坐标之和, 求此曲线.

2887. 已知曲线的切线在两坐标轴上的截距长度之和为常数 $2a$, 求此曲线.

2888. 如果已知曲线通过坐标原点, 且法线段与次法距的长度之和等于 1, 求此曲线的方程.

2889*. 求出曲线, 使得切线与切点的向径所夹的角为常数.

2890. 求出曲线, 已知由坐标轴、这条曲线以及曲线上任一点的纵坐标线所围成区域的面积, 等于此纵坐标的立方.

2891. 求出曲线, 已知由极轴、这条曲线以及曲线上任一点的极径所围成的扇形面积, 与这条极径的立方成正比.

2892. 求出曲线, 使得曲线的切线在 OX 轴上截距的长度, 等于此切线段之长.

2893. 求出曲线, 使得其介于坐标轴之间的切线段被抛物线 $y^2 = 2x$ 所平分.

2894. 求出曲线, 使得在曲线上任一点处的法线段长度等于该点到坐标原点的距离.

2895*. 设由曲线、坐标轴以及曲线上任一点的纵坐标线所围图形的面积等于曲线相应的弧长. 如果已知曲线通过点 $(0,1)$, 求此曲线的方程.

2896. 求出曲线, 使得由横轴、切线以及切点的向径所围成的三角形面积等于常数 a^2.

2897. 如果已知曲线的切线与法线在 OX 轴上截得的线段中点是定点 $(a,0)$, 求此曲线.

在作出一阶微分方程时, 特别在物理问题中, 经常要适当地采用所谓*微元法*, 其含义是: 把未知量的无穷小增量之间精确到高阶无穷小的近似关系式, 用它们微分之间的相应关系式来代替, 这并不影响结果.

问题 容器内盛有 100 L 盐水, 其中含盐 10 kg. 今以每分钟 3 L 的速度把净水注入容器, 并以每分钟 2 L 的速度使盐水流出. 设通过不停搅拌使溶液的浓度保持均匀. 问 1 h 后容器中含盐量是多少?

解 所谓某物质的浓度 c, 是指单位体积中它的含量. 如果浓度均匀, 则该物质在体积 V 中的含量等于 cV.

设 t min 后容器中所含的盐为 x kg, 这时容器中溶液量为 $(100+t)$ L, 因此, 浓度 $c = x/(100+t)$ kg/L.

在时间间隔 dt 中, 由容器流出 $(2dt)$ L 盐水溶液, 内含 $(2cdt)$ kg 盐. 因此, 容器中盐量的变化 dx 由下式表示出:

$$-dx = 2cdt, \quad \text{或者} \quad -dx = \frac{2x}{100+t}dt.$$

这就是所求的微分方程. 分离变量, 并积分, 我们得到:

$$\ln x = -2\ln(100+t) + \ln C$$

或者

$$x = \frac{C}{(100+t)^2}.$$

由条件: 当 $t = 0$ 时, $x = 10$, 确定常数 C, 即 $C = 100\,000$. 经过 1 h 容器中的含盐量为 $x = \dfrac{100\,000}{160^2} \approx 3.9$ (kg).

2898*. 证明: 当具有重量的液体绕垂直轴旋转时, 其自由液面的形状是旋转抛物面.

2899*. 已知在海平面上 1 cm^2 大气压力为 10^5 Pa, 在离海平面高度为 500 m 处, 1 cm^2 大气压力变为 0.92×10^4 Pa. 求大气压力对高度的依赖关系.

2900*. 根据胡克定律, 长为 l 的弹性细绳在拉力 F 作用下, 长度增量为 klF ($k=$ 常数). 如果把细绳从其一端悬吊下来, 问细绳在本身重量 W 作用下长度增加多少? (细绳的初始长为 l).

2901. 若加上条件: 在细绳的一端悬挂重量为 P 的物体, 试求解上面同样的问题.

在求解第 2902, 2903 题时, 利用牛顿定律: 物体冷却的速度正比于该物体与周围介质的温度差.

2902. 如果把加热到 T_0 度的物体, 移入到温度保持常值 a 度的室内, 求其温度 T 对时间 t 的依赖关系.

2903. 如果室温为 20℃, 一物体开始时的温度为 100℃, 在头 20 min 冷却到 60℃. 问此物体的温度从 100℃ 降低到 30℃ 需经过多少时间?

2904. 在液体中旋转的圆盘, 因摩擦而使转速减慢, 这种影响与旋转的角速度成正比. 如果已知圆盘开始时的转速为 100 圈/min, 经过 1 min 后变为 60 圈/min, 试求角速度与时间的依赖关系.

2905*. 镭的衰变速度与其现存量成正比. 已知经过 1600 年, 镭剩下原始储量的一半. 求经过 100 年镭衰变百分之几?

2906*. 水从孔中流出的速度由公式

$$v = c\sqrt{2gh}$$

确定, 其中 h 是出水孔到水的自由表面的垂直距离, $c \approx 0.6$ 是由经验确定的无量纲系数, g 是重力加速度.

现有一充满水的直径为 2 m 的半球形锅, 其底部有一半径为 0.1 m 的圆孔. 问经过多少时间, 才能使水从孔中全部流出?

2907*. 光线穿过薄水层时, 被吸收掉的光强与射入的光强以及水层厚度成正比. 如果穿过 3 m 厚的水层时, 光强被吸收掉一半, 问能到达水下 30 m 深处的光强占几分之几?

2908*. 带降落伞的物体下落时, 空气阻力与运动速度的平方成正比. 求出物体下落的极限速度.

2909*. 在容量为 300 L 的容器底部, 覆盖着盐与不溶解物质的混合物. 设盐溶解的速度正比于当时的溶液浓度与溶解的饱和浓度 (在 3 L 水中溶解 1 kg 盐) 之差, 且给定数量的净水在头 1 min 溶解 1/3 kg 盐. 求容器加满净水 1 h 后溶液中的含盐量.

2910*. 在电阻为 R, 电感为 L, 而电流为 i 的电路中, 电动势 e 等于电压降 Ri 与自感应电动势 $L\dfrac{di}{dt}$ 之和. 如果 $e = E\sin\omega t$ (E 和 ω 都是常数), 且当 $t=0$ 时, $i=0$, 试确定在时刻 t 的电流 i.

§10. 高阶微分方程

1°. **直接积分的情形**. 如果

$$y^{(n)} = f(x),$$

则

$$y = \underbrace{\int dx \int \cdots \int f(x)dx}_{n\text{ 次}} + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \cdots + C_n.$$

2°. **降阶的情形**.

1) 如果微分方程不显含 y, 例如

$$F(x, y', y'') = 0,$$

那么设 $y' = p$ 后, 我们得到降了一阶的方程

$$F(x, p, p') = 0.$$

例 1 求出方程

$$xy'' + y' + x = 0$$

满足下面条件的特解:

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时}, \ y = 0, y' = 0.$$

解 设 $y' = p$, 我们有 $y'' = p'$, 由此得出

$$xp' + p + x = 0.$$

解这个关于函数 p 的线性方程, 我们得到

$$px = C_1 - \frac{x^2}{2}.$$

由条件: 当 $x = 0$ 时, $y' = p = 0$, 我们有 $0 = C_1 - 0$, 即 $C_1 = 0$. 因此,

$$p = -\frac{x}{2}$$

或者

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2},$$

由此积分一次后, 我们得出

$$y = -\frac{x^2}{4} + C_2.$$

当 $x = 0$ 时, 令 $y = 0$, 求得 $C_2 = 0$. 因此, 所求的特解为

$$y = -\frac{1}{4}x^2.$$

2) 如果微分方程不显含 x, 例如

$$F(y, y', y'') = 0,$$

那么设 $y' = p, y'' = p\frac{dp}{dy}$, 我们可得到降了一阶的方程

$$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0.$$

例 2　在当 $x=0$ 时, $y=1, y'=0$ 的条件下, 求出方程

$$yy''-y'^2=y^4.$$

的特解.

解　设 $y'=p$, 那么 $y''=p\frac{dp}{dy}$, 于是方程变为

$$yp\frac{dp}{dy}-p^2=y^4.$$

我们得到了关于 p (把 y 看作自变量) 的伯努利型方程. 解出此方程, 我们得到:

$$p=\pm y\sqrt{C_1+y^2}.$$

从当 $y=1$ 时, $y'=p=0$ 的条件, 我们有 $C_1=-1$. 因此,

$$p=\pm y\sqrt{y^2-1}$$

或者

$$\frac{dy}{dx}=\pm y\sqrt{y^2-1}.$$

积分后, 我们有

$$\arccos\frac{1}{y}\pm x=C_2.$$

令 $y=1$ 和 $x=0$, 我们得到 $C_2=0$, 由此得出 $\frac{1}{y}=\cos x$ 或 $y=\sec x$.

求解下列方程:

2911. $y''=\frac{1}{x}$.

2912. $y''=-\frac{1}{2y^3}$.

2913. $y''=1-y'^2$.

2914. $xy''+y'=0$.

2915. $yy''=y'^2$.

2916. $yy''+y'^2=0$.

2917. $(1+x^2)y''+y'^2+1=0$.

2918. $y'(1+y'^2)=ay''$.

2919. $x^2y''+xy'=1$.

2920. $yy''=y^2y'+y'^2$.

2921. $yy''-y'(1+y')=0$.

2922. $y''=-\frac{x}{y'}$.

2923. $(x+1)y''-(x+2)y'+x+2=0$.

2924. $xy''=y'\ln\frac{y'}{x}$.

2925. $y'+\frac{1}{4}(y'')^2=xy''$.

2926. $xy'''+y''=1+x$.

2927. $y'''^2+y''^2=1$.

在指定的初始条件下, 求出特解:

2928.　$(1+x^2)y''-2xy'=0$; 当 $x=0$ 时, $y=0, y'=3$.

2929.　$1+y'^2=2yy''$; 当 $x=1$ 时, $y=1, y'=1$.

2930.　$yy''+y'^2=y'^3$; 当 $x=0$ 时, $y=1, y'=1$.

2931.　$xy''=y'$; 当 $x=0$ 时, $y=0, y'=0$.

求出下列方程的通积分:

2932. $yy' = \sqrt{y^2 + y'^2}y'' - y'y''$.

2933. $yy'' = y'^2 + y'\sqrt{y^2 + y'^2}$.

2934. $y'^2 - yy'' = y^2 y'$.

2935. $yy'' + y'^2 - y'^3 \ln y = 0$.

求出下列满足指定条件的解:

2936. $y''y^3 = 1$; 当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $y = 1, y' = 1$.

2937. $yy'' + y'^2 = 1$; 当 $x = 0$ 时, $y = 1, y' = 1$.

2938. $xy'' = \sqrt{1 + y'^2}$; 当 $x = 1$ 时, $y = 0$; 当 $x = e^2$ 时, $y = 1$.

2939. $y''(1 + \ln x) + \frac{1}{x} \cdot y' = 2 + \ln x$; 当 $x = 1$ 时, $y = \frac{1}{2}, y' = 1$.

2940. $y'' = \frac{y'}{x}\left(1 + \ln \frac{y'}{x}\right)$; 当 $x = 1$ 时, $y = \frac{1}{2}, y' = 1$.

2941. $y'' - y'^2 + y'(y - 1) = 0$; 当 $x = 0$ 时, $y = 2, y' = 2$.

2942. $3y'y'' = y + y'^3 + 1$; 当 $x = 0$ 时, $y = -2, y' = 0$.

2943. $y^2 + y'^2 - 2yy'' = 0$; 当 $x = 0$ 时, $y = 1, y' = 1$.

2944. $yy' + y'^2 + yy'' = 0$; 当 $x = 0$ 时, $y = 1$ 和当 $x = -1$ 时, $y = 0$.

2945. $2y' + (y'^2 - 6x) \cdot y'' = 0$; 当 $x = 2$ 时, $y = 0, y' = 2$.

2946. $y'y^2 + yy'' - y'^2 = 0$; 当 $x = 0$ 时, $y = 1, y' = 2$.

2947. $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$; 当 $x = 0$ 时, $y = 1, y' = 1$.

2948. $2yy'' + y^2 - y'^2 = 0$; 当 $x = 0$ 时, $y = 1, y' = 1$.

2949. $y'' = y'^2 - y$; 当 $x = 1$ 时, $y = -\frac{1}{4}, y' = \frac{1}{2}$.

2950. $y'' + \frac{1}{y^2}e^{y^2}y' - 2yy'^2 = 0$; 当 $x = -\frac{1}{2e}$ 时, $y = 1, y' = e$.

2951. $1 + yy'' + y'^2 = 0$; 当 $x = 1$ 时, $y = 0, y' = 1$.

2952. $(1 + yy')y'' = (1 + y'^2)y'$; 当 $x = 0$ 时, $y = 1, y' = 1$.

2953. $(x + 1)y'' + xy'^2 = y'$; 当 $x = 1$ 时, $y = -2, y' = 4$.

求解下列方程:

2954. $y' = xy''^2 + y''^2$.

2955. $y' = xy'' + y'' - y''^2$.

2956. $y'''^2 = 4y''$.

2957. $yy'y'' = y'^3 + y''^2$. 求出经过点 $(0, 0)$, 且在该点与直线 $y + x = 0$ 相切的积分曲线.

2958. 求出曲率半径为常数的曲线.

2959. 求出曲率半径与法线段长度立方成正比的曲线.

2960. 求出曲率半径等于法线段之长的曲线.

2961. 求出曲率半径等于法线段长度二倍的曲线.

2962. 求出曲率半径在 OY 轴上的投影等于常数的曲线.

2963. 设吊桥上的绳索所受负重, 按绳索在水平线上的投影均匀分布. 不计绳索重量, 试求绳索的方程.

2964*. 设柔软而不伸长的线两端固定, 且单位长度所受负重为常数 q (包括线的重量). 试求线的平衡位置.

2965. 重物沿斜面作初速为零的滑动. 设倾角为 α, 摩擦系数为 μ, 求运动规律.

提示 摩擦力等于 μN, 其中 N 是斜面的反作用力.

2966*. 物体下落时, 空气阻力可以认为与速度的平方成正比. 设初速度为零, 求运动规律.

2967*. 质量为 300 kg 的摩托艇以 66 m/s 的初速度直线前进. 如果水的阻力与速度成正比, 且当速度为 1 m/s 时, 阻力为 10 牛顿. 问经过多少时间艇的速度降到 8 m/s?

§11. 线性微分方程

1°. **齐次方程**. 所谓函数 $y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), \cdots, y_n = \varphi_n(x)$ 在 (a, b) 内是线性相关的, 是指如果存在不全为零的常数 $C_1, C_2, , \cdots, C_n$, 使得

$$C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n \equiv 0 \quad (a < x < b).$$

反之, 就称这组函数是线性无关的.

系数为连续函数 $P_i(x)(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的齐次线性微分方程

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)y = 0, \tag{1}$$

其通解具有形式

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n,$$

其中 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是方程 (1) 的线性无关的解 (基本解组).

2°. **非齐次方程**. 以连续函数 $P_i(x)$ 为系数, 且右边为 $f(x)$ 的非齐次线性微分方程

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)y = f(x), \tag{2}$$

其通解具有形式

$$y = y_0 + Y,$$

其中 y_0 是对应齐次方程 (1) 的通解, 而 Y 是给定的非齐次方程 (2) 的特解.

如果已知齐次方程 (1) 的基本解组 $y_1, y_2, \cdots, y_n$, 则对应的非齐次方程 (2) 的通解可按公式

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \cdots + C_n(x)y_n$$

求得, 其中函数 $C_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 由下列方程组确定 (任意常数变易法):

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \cdots + C_n'(x)y_n = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \cdots + C_n'(x)y_n' = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \tag{3}$$

例 求解方程

$$xy'' + y' = x^2, \quad x > 0. \tag{4}$$

解 先解齐次方程

$$xy'' + y' = 0,$$

我们得到

$$y = C_1 \ln x + C_2. \tag{5}$$

因此, 可以取

$$y_1 = \ln x \quad 和 \quad y_2 = 1,$$

并设 (4) 的解为

$$y = C_1(x) \ln x + C_2(x).$$

建立方程组 (3) 后, 且注意到方程 (4) 应化为标准形式 $y'' + \dfrac{y'}{x} = x$, 我们得到

$$\begin{cases} C_1'(x) \ln x + C_2'(x) \cdot 1 = 0, \\ C_1'(x) \cdot \dfrac{1}{x} + C_2'(x) \cdot 0 = x. \end{cases}$$

由此得出

$$C_1(x) = \frac{x^3}{3} + A \quad 和 \quad C_2(x) = -\frac{x^3}{3} \ln x + \frac{x^3}{9} + B,$$

所以,

$$y = \frac{x^3}{9} + A \ln x + B,$$

其中 A 与 B 都是任意常数.

2968. 研究下列函数组的线性相关性:

a) $x, x+1$;　　b) $x^2, -2x^2$;

c) $0, 1, x$;　　d) $x, x+1, x+2$;

e) x, x^2, x^3;　　f) e^x, e^{2x}, e^{3x};

g) $\sin x, \cos x, 1$;　　h) $\sin^2 x, \cos^2 x, 1$.

2969. 试建立线性微分方程, 已知它的基本解组如下:

a) $y_1 = \sin x, \quad y_2 = \cos x$;　　b) $y_1 = e^x, \quad y_2 = xe^x$;

c) $y_1 = x, \quad y_2 = x^2$;

d) $y_1 = e^x,\quad y_2 = e^x\sin x,\quad y_3 = e^x\cos x.$

2970. 已知齐次线性微分方程的基本解组为

$$y_1 = x,\quad y_2 = x^2,\quad y_3 = x^3,$$

求出它满足初始条件

$$y|_{x=1} = 0,\quad y'|_{x=1} = -1,\quad y''|_{x=1} = 2$$

的特解 y.

2971*. 已知方程

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$$

的一个特解 $y_1 = \dfrac{\sin}{x}$, 求解此方程.

2972. 已知方程

$$x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$$

的一个特解 $y_1 = x$, 求解此方程.

用任意常数变易法, 求解下列非齐次线性方程:

2973. $x^2y'' - xy' = 3x^3.$

2974*. $x^2y'' + xy' - y = x^2.$

2975. $y''' + y' = \sec x.$

§12. 二阶常系数线性微分方程

1°. **齐次方程**. 具有常系数 p 与 q, 且右边为零的二阶线性方程具有形式

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{1}$$

如果 k_1 与 k_2 是特征方程

$$\varphi(k) \equiv k^2 + pk + q = 0 \tag{2}$$

的根, 则方程 (1) 的通解可写成下面三种形式之一:

1) $y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$, 如果 k_1 与 k_2 都是实数, 且 $k_1 \neq k_2$;

2) $y = e^{k_1x}(C_1 + C_2x)$, 如果 $k_1 = k_2$;

3) $y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$, 如果 $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i (\beta \neq 0)$.

2°. **非齐次方程**. 线性非齐次微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{3}$$

的通解可写成和的形式

$$y = y_0 + Y,$$

其中 y_0 是对应的右边为零的方程 (1) 的通解, 它按公式 1) ~ 3) 确定, 而 Y 是给定方程 (3) 的特解.

在下面最简情形, 函数 Y 可用待定系数法求得:

① $f(x) = e^{ax}P_n(x)$, 其中 $P_n(x)$ 是 n 次多项式.

如果 a 不是特征方程 (2) 的根, 即 $\varphi(a)\neq 0$, 则设 $Y=e^{ax}Q_n(x)$, 其中 $Q_n(x)$ 是带有待定系数的 n 次多项式.

如果 a 是特征方程 (2) 的根, 即 $\varphi(a)=0$, 则设 $Y=x^re^{ax}Q_n(x)$, 其中 r 是根 a 的重数 ($r=1$ 或 $r=2$).

② $f(x)=e^{ax}[P_n(x)\cos bx+Q_m(x)\sin bx]$.

如果 $\varphi(a\pm bi)\neq 0$, 则设

$$Y=e^{ax}[S_N(x)\cos bx+T_N(x)\sin bx],$$

其中 $S_N(x)$ 与 $T_N(x)$ 是次数为 $N=\max\{n,m\}$ 的多项式.

如果 $\varphi(a\pm bi)=0$, 则设

$$Y=x^re^{ax}[S_N(x)\cos bx+T_N(x)\sin bx],$$

其中 r 是根 $a\pm bi$ 的重数 (对于二阶方程, $r=1$).

在一般情况下, 可采用任意常数变易法解方程 (3) (参阅 §11).

例 1 求出方程 $2y''-y'-y=4xe^{2x}$ 的通解.

解 特征方程 $2k^2-k-1=0$ 的根为 $k_1=1$ 和 $k_2=-\dfrac{1}{2}$. 对应的齐次方程的通解 (第一种形式) 为 $y_0=C_1e^x+C_2e^{-\frac{x}{2}}$. 给定方程的右边为 $f(x)=4xe^{2x}\equiv e^{ax}P_n(x)$. 因为 $n=1,r=0$, 所以 $Y=e^{2x}(Ax+B)$. 对 Y 求导两次, 并把导数代入已知方程, 我们得到

$$2e^{2x}(4Ax+4B+4A)-e^{2x}(2Ax+2B+A)-e^{2x}(Ax+B)=4xe^{2x}.$$

约去 e^{2x} 并比较等式左、右两边的 x 的一次幂的系数和自由项, 我们有

$$5A=4 \text{ 和 } 7A+5B=0, \text{ 由此得出 } A=\frac{4}{5} \text{ 和 } B=-\frac{28}{25}.$$

于是, $Y=e^{2x}\left(\dfrac{4}{5}x-\dfrac{28}{25}\right)$, 而给定方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{-\frac{1}{2}x}+e^{2x}\left(\frac{4}{5}x-\frac{28}{25}\right).$$

例 2 求出方程 $y''-2y'+y=xe^x$ 的通解.

解 特征方程 $k^2-2k+1=0$ 有两重根 $k=1$. 方程的右边为 $f(x)=xe^x$, 这里 $a=1,n=1$. 因为 a 与两重根 $k=1$ 相同, 从而 $r=2$, 所以特解为 $Y=x^2e^x(Ax+B)$. 对 Y 求导两次, 代入方程, 并比较系数, 我们得到 $A=\dfrac{1}{6},B=0$. 因此, 给定方程的通解可以写为

$$y=(C_1+C_2x)e^x+\frac{1}{6}x^3e^x.$$

例 3 求出方程 $y''+y=x\sin x$ 的通解.

解 特征方程 $k^2+1=0$ 的根为 $k_1=i,k_2=-i$. 对应的齐次方程的通解 [(参阅 3), 其中 $\alpha=0,\beta=1$] 为:

$$y_0=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

右边形式为

$$f(x)=e^{ax}[P_n(x)\cos bx+Q_m(x)\sin bx],$$

其中 $a=0,b=1,P_n(x)=0,Q_m(x)=x$. 它对应的特解为

$$Y=x[(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x]$$

(这里 $N=1,a=0,b=1,r=1$).

求导两次后, 代入方程, 并比较等式两边关于 $\cos x, x\cos x, \sin x, x\sin x$ 的系数, 从而得到四个方程 $2A+2D=0, 4C=0, -2B+2C=0, -4A=1$, 由这些方程确定出 $A=-1/4, B=0, C=0, D=1/4$. 因此

$$Y=-\frac{x^2}{4}\cos x+\frac{x}{4}\sin x.$$

通解为 $\quad y=C_1\cos x+C_2\sin x-\dfrac{x^2}{4}\cos x+\dfrac{x}{4}\sin x.$

3°. **解的叠加原理**. 如果方程 (3) 的右边是若干个函数之和

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x),$$

而 $Y_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是对应于方程

$$y''+py'+qy=f_i(x)\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

的解, 则和

$$y=Y_1+Y_2+\cdots+Y_n$$

是方程 (3) 的解.

求出下列方程的通解:

2976. $y''-5y'+6y=0$.

2977. $y''-9y=0$.

2978. $y''-y'=0$.

2979. $y''+y'=0$.

2980. $y''-2y'+2y=0$.

2981. $y''+4y'+13y=0$.

2982. $y''+2y'+y=0$.

2983. $y''-4y'+2y=0$.

2984. $y''-ky=0(k\neq 0)$.

2985. $y=y''+y'$.

2986. $\dfrac{y'-y}{y''}=3$.

求下列方程满足指定条件的特解:

2987. $y''-5y'+4y=0$; 当 $x=0$ 时, $y=5, y'=8$.

2988. $y''+3y'+2y=0$; 当 $x=0$ 时, $y=1, y'=-1$.

2989. $y''+4y=0$; 当 $x=0$ 时, $y=0, y'=2$.

2990. $y''+2y'=0$; 当 $x=0$ 时, $y=1, y'=0$.

2991. $y''=\dfrac{y}{a^2}$; 当 $x=0$ 时, $y=a, y'=0$.

2992. $y''+3y'=0$; 当 $x=0$ 时, $y=0$ 和当 $x=3$ 时, $y=0$.

2993. $y''+\pi^2y=0$; 当 $x=0$ 时, $y=0$ 和当 $x=1$ 时, $y=0$.

2994. 对于下列给定的非齐次方程, 指出其特解的形式:

a) $y'' - 4y = x^2e^{2x}$; b) $y'' + 9y = \cos 2x$;

c) $y'' - 4y' + 4y = \sin 2x + e^{2x}$;

d) $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x$;

e) $y'' - 5y' + 6y = (x^2 + 1)e^x + xe^{2x}$;

f) $y'' - 2y' + 5y = xe^x \cos 2x - x^2e^x \sin 2x$.

求出下列方程的通解:

2995. $y'' - 4y' + 4y = x^2$.

2996. $y'' - y' + y = x^3 + 6$.

2997. $y'' + 2y' + y = e^{2x}$.

2998. $y'' - 8y' + 7y = 14$.

2999. $y'' - y = e^x$.

3000. $y'' + y = \cos x$.

3001. $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$.

3002. $y'' + y' - 6y = xe^{2x}$.

3003. $y'' - 2y' + y = \sin x + \sinh x$.

3004. $y'' + y' = \sin^2 x$.

3005. $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$.

3006. 求出方程 $y'' + 4y = \sin x$ 满足条件: 当 $x = 0$ 时, $y = 1, y' = 1$ 的解.

求解下列方程:

3007. $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = A\sin pt$. 分情况: 1) $p \neq \omega$; 2) $p = \omega$ 加以研究.

3008. $y'' - 7y' + 12y = -e^{4x}$.

3009. $y'' - 2y' = x^2 - 1$.

3010. $y'' - 2y' + y = 2e^x$.

3011. $y'' - 2y' = e^{2x} + 5$.

3012. $y'' - 2y' - 8y = e^x - 8\cos 2x$.

3013. $y'' + y' = 5x + 2e^x$.

3014. $y'' - y' = 2x - 1 - 3e^x$.

3015. $y'' + 2y' + y = e^x + e^{-x}$.

3016. $y'' - 2y' + 10y = \sin 3x + e^x$.

3017. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + \frac{x}{2}$.

3018. $y'' - 3y' = x + \cos x$.

3019. 求方程 $y'' - 2y' = e^{2x} + x^2 - 1$ 满足条件: 当 $x = 0$ 时, $y = \frac{1}{8}, y' = 1$ 的解.

求解下列方程:

3020. $y'' - y = 2x\sin x$.

3021. $y'' - 4y = e^{2x}\sin 2x$.

3022. $y'' + 4y = 2\sin 2x - 3\cos 2x + 1$.

3023. $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \sin x$.

3024. $y'' = xe^x + y$.

3025. $y'' + 9y = 2x\sin x + xe^{3x}$.

3026. $y'' - 2y' - 3y = x(1 + e^{3x})$.

3027. $y'' - 2y' = 3x + 2xe^x$.

3028. $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$.

3029. $y'' + 2y' - 3y = 2xe^{-3x} + (x + 1)e^x$.

3030*. $y'' + y = 2x\cos x \cos 2x$.

3031. $y'' - 2y = 2xe^x(\cos x - \sin x)$.

利用任意常数变易法, 求解下列方程:

3032. $y'' + y = \tan x$.

3033. $y'' + y = \cot x$.

3034. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$. **3035**. $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$.

3036. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$. **3037**. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$.

3038. a) $y'' - y = \operatorname{th} x$; b) $y'' - 2y = 4x^2 e^{x^2}$.

3039. 设两个相同的重物一起悬挂在弹簧的一端. 如果其中一个重物坠下, 试求另一个重物的运动方程.

解 设一个重物的质量为 m, 它处于静止状态时使弹簧伸长 a. 用 x 表示只悬挂一个重物时, 在垂直方向上从平衡位置算起的重物的坐标. 那么

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k(x+a),$$

显然, 其中 $k = \frac{mg}{a}$, 因此, $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{a}x$. 通解为

$$x = C_1 \cos\sqrt{\frac{g}{a}}t + C_2\sqrt{\frac{g}{a}}t.$$

初始条件是: 当 $t=0$ 时, $x = a$ 和 $\frac{dx}{dt} = 0$, 由此得出 $C_1 = a, C_2 = 0$, 所以

$$x = a\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t.$$

3040*. 对于刚性系数为 k 的弹簧, 悬挂质量为 m 的重物. 如果先稍微把重物向下拉, 然后放开它, 求重物由此所产生振动运动的周期.

3041*. 质量为 m 的重物悬挂在刚性系数为 k 的弹簧上. 如果弹簧的上端做垂直的简谐振动 $y = A\sin\omega t$, 而重物在初始时刻位于静止状态, 求出重物的运动方程 (不计介质阻力).

3042. 设质量为 m 的质点受到两个中心力的吸引, 其吸引力的大小与距离成正比 (比例系数为 k). 已知两力之间的距离为 $2b$, 在初始时刻质点位于连接两中心力的线段上, 到它们中点的距离为 c, 且初速为零. 求质点的运动规律.

3043. 设 6 m 长的链条无摩擦地从架上滑下. 如果滑动从链条垂下 1 m 时开始, 问需要多少时间链条才能全部滑下?

3044*. 细长的管子以固定的角速度 ω, 绕着与它垂直的铅直轴旋转, 且管内有一小球沿管子作无摩擦滑动. 试求小球相对于管子的运动规律, 设:

a) 在初始时刻小球与旋转轴相距 a 且小球的初速度为零;

b) 在初始时刻小球位于旋转轴上且初速度为 v_0.

§13. 高于二阶的常系数线性微分方程

1°. **齐次方程**. 常系数齐次线性方程

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0 \tag{1}$$

的基本解组 $y_1, y_2, \cdots, y_n$, 是根据特征方程

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_{n-1}k + a_n = 0 \tag{2}$$

的特征根建立的. 就是说:

1) 如果 k 是方程 (2) 的 m 重实根, 则它对应着方程 (1) 的 m 个线性无关的解:

$$y_1 = e^{kx}, y_2 = xe^{kx}, \cdots, y_m = x^{m-1}e^{kx};$$

2) 如果 $\alpha \pm \beta i$ 是方程 (2) 的一对 m 重复根, 则它对应着方程 (1) 的 $2m$ 个线性无关的解:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x, y_3 = xe^{\alpha x}\cos\beta x, y_4 = xe^{\alpha x}\sin\beta x, \cdots,$$

$$y_{2m-1} = x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, y_{2m} = x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

2°. **非齐次方程**. 非齐次方程

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x) \tag{3}$$

的特解, 可根据 §12, 2° 和 3° 中所讲的法则求得.

求出下列方程的通解:

3045. $y''' - 13y'' + 12y' = 0$.

3046. $y''' - y' = 0$.

3047. $y''' + y = 0$.

3048. $y^{(4)} - 2y'' = 0$.

3049. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

3050. $y^{(4)} + 4y = 0$.

3051. $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$.

3052. $y^{(4)} + y' = 0$.

3053. $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$.

3054. $y^{(4)} - a^4y = 0, \quad a \neq 0$.

3055. $y^{(4)} - 6y'' + 9y = 0$.

3056. $y^{(4)} + a^2y'' = 0, \quad a \neq 0$.

3057. $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 0$.

3058. $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

3059. $y^{(n)} + \dfrac{n}{1}y^{(n-1)} + \dfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}y^{(n-2)} + \cdots + \dfrac{n}{1}y' + y = 0$.

3060. $y^{(4)} - 2y''' + y'' = e^x$.

3061. $y^{(4)} - 2y''' + y'' = x^3$.

3062. $y''' - y = x^3 - 1$.

3063. $y^{(4)} + y''' = \cos 4x$.

3064. $y''' + y'' = x^2 + 1 + 3xe^x$.

3065. $y''' + y'' + y' + y = xe^x$.

3066. $y''' + y' = \tan x \sec x$.

3067. 求出方程

$$y''' + 2y'' + 2y' + y = x$$

满足初始条件 $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ 的特解.

§14. 欧拉方程

形式如

$$(ax+b)^n y^{(n)} + A_1(ax+b)^{(n-1)}y^{(n-1)} + \cdots + A_{n-1}(ax+b)y' + A_ny = f(x) \tag{1}$$

的线性方程称为欧拉方程, 其中 $a, b, A_1, \cdots, A_{n-1}, A_n$ 都是常数.

在区域 $ax + b > 0$ 内, 令

$$ax + b = e^t,$$

引进新的自变量 t, 那么

$$y' = ae^{-t}\frac{dy}{dt}, \quad y'' = a^2e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).$$

$$y''' = a^3e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right) \text{ 等等},$$

而欧拉方程就可化为常系数线性方程. 当 $ax+b<0$ 时, 我们令 $ax+b=-e^t$.

例 1 求解方程 $x^2y''+xy'+y=1, \quad x>0$.

解 令 $x=e^t$, 我们得到:

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).$$

所以, 给定方程成为

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 1,$$

由此得出

$$y = C_1\cos t + C_2\sin t + 1.$$

或者

$$y = C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x) + 1.$$

对于齐次欧拉方程

$$x^ny^{(n)} + A_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + A_{n-1}xy' + A_ny = 0, \tag{2}$$

当 $x>0$ 时, 它的解可设形为

$$y = x^k. \tag{3}$$

把由关系式 (3) 确定的 $y, y', \cdots, y^{(n)}$ 代入 (2), 我们得到特征方程, 由这个方程可以求得指数 k.

如果 k 是特征方程 m 重实根, 则它对应着 m 个线性无关解:

$$y_1 = x^k, \quad y_2 = x^k\ln x, \quad y_3 = x^k(\ln x)^2, \cdots, y_m = x^k(\ln x)^{m-1}.$$

如果 $\alpha \pm \beta i$ 是一对 m 重复根, 则它对应着 $2m$ 个线性无关解:

$$y_1 = x^\alpha\cos(\beta\ln x), \quad y_2 = x^\alpha\sin(\beta\ln x),$$

$$y_3 = x^\alpha\ln x\cos(\beta\ln x), \quad y_4 = x^\alpha\ln x\sin(\beta\ln x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{2m-1} = x^\alpha(\ln x)^{m-1}\cos(\beta\ln x), \quad y_{2m} = x^\alpha(\ln x)^{m-1}\sin(\beta\ln x).$$

例 2 求解方程

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0.$$

解 令

$$y = x^k, \quad y' = kx^{k-1}, \quad y'' = k(k-1)x^{k-2}.$$

代入给定方程, 约去 x^k 后, 得到特征方程

$$k^2 - 4k + 4 = 0.$$

解出此方程后, 求得:

$$k_1 = k_2 = 2,$$

所以, 通解为

$$y = C_1x^2 + C_2x^2 \ln x.$$

求解下列方程:

3068. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + y = 0$.

3069. $x^2y'' - xy' - 3y = 0$.

3070. $x^2y'' + xy' + 4y = 0$.

3071. $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$.

3072. $(3x+2)y'' + 7y' = 0$.

3073. $y'' = \frac{2y}{x^2}$.

3074. $y'' + \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 0$.

3075. $x^2y'' - 4xy' + 6y = x$.

3076. $(1+x)^2y'' - 3(1+x)y' + 4y = (1+x)^3$.

3077. 求出方程

$$x^2y'' - xy' + y = 2x$$

满足初始条件: 当 $x = 1$ 时, $y = 0, y' = 1$ 的特解.

§15. 微分方程组

消元法. 例如, 为了求出两个一阶微分方程的标准方程组的解, 即求未知函数 y, z 的导数已解出的方程组

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx} = g(x, y, z) \tag{1}$$

的解, 可以把其中一个方程对 x 求导. 例如, 我们有:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}f + \frac{\partial f}{\partial z}g. \tag{2}$$

由方程组 (1) 的第一个方程确定 z, 并把求得的表达式

$$z = \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \tag{3}$$

代入方程 (2), 即得含有一个未知函数 y 的二阶方程, 解此方程, 可求得:

$$y = \psi(x, C_1, C_2), \tag{4}$$

其中 C_1, C_2 是任意常数. 把函数 (4) 代入 (3). 不必再积分就可确定函数 z. 式 (3) 与 (4) 合在一起, 给出了方程组 (1) 的通解, 其中 y 用 ψ 代替.

例 求解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 2y + 4z = 1 + 4x, \\ \dfrac{dz}{dx} + y - z = \dfrac{3}{2}x^2. \end{cases}$$

解　把第一个方程对 x 求导:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+4\frac{dz}{dx}=4.$$

由第一个方程确定 $z=\frac{1}{4}\left(1+4x-\frac{dy}{dx}-2y\right)$, 于是从第二个方程我们有: $\frac{dz}{dx}=\frac{3}{2}x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}y-\frac{1}{4}\frac{dy}{dx}$. 把 z 和 $\frac{dz}{dx}$ 代入求导后所得的方程, 我们就得到了含有一个未知函数 y 的二阶方程:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-6y=-6x^2-4x+3.$$

解此方程, 求得:

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}+x^2+x,$$

因此

$$z=\frac{1}{4}\left(1+4x-\frac{dy}{dx}-2y\right)=-C_1e^{2x}+\frac{C_2}{4}e^{-3x}-\frac{1}{2}x^2.$$

如果方程组中方程的个数较多, 可作类似处理.

求解下列方程组:

3078. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=z,\\ \dfrac{dz}{dx}=-y.\end{cases}$

3079. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=y+5z,\\ \dfrac{dz}{dx}+y+3z=0.\end{cases}$

3080. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=-3y-z,\\ \dfrac{dz}{dx}=y-z.\end{cases}$

3081. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\\ \dfrac{dy}{dt}=z,\\ \dfrac{dz}{dt}=x.\end{cases}$

3082. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y+z,\\ \dfrac{dy}{dt}=x+z,\\ \dfrac{dz}{dt}=x+y.\end{cases}$

3083. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=y+z,\\ \dfrac{dz}{dx}=x+y+z.\end{cases}$

3084. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}+2y+z=\sin x,\\ \dfrac{dz}{dx}-4y-2z=\cos x.\end{cases}$

3085. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}+3y+4z=2x,\\ \dfrac{dz}{dx}-y-z=x;\end{cases}$
当 $x=0$ 时, $y=0, z=0$.

3086. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}-4x-y+36t=0,\\ \dfrac{dz}{dx}+2x-y+2e^t=0;\end{cases}$

3087. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2}{z},\\ \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{2}y.\end{cases}$

3088*. a) $\dfrac{dx}{x^3+3xy^2}=\dfrac{dy}{2y^3}=\dfrac{dz}{2y^2z}$;　b) $\dfrac{dx}{x-y}=\dfrac{dy}{x+y}=\dfrac{dz}{z}$;

c) $\dfrac{dx}{y-z}=\dfrac{dy}{z-x}=\dfrac{dz}{x-y}$, 求出经过点 $(1,1,-2)$ 的积分曲线.

3089. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}+z=1,\\ \dfrac{dz}{dx}+\dfrac{2}{x^2}y=\ln x.\end{cases}$

3090. $\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dx^2}+2y+4z=e^x,\\ \dfrac{d^2z}{dx^2}-y-3z=-x.\end{cases}$

3091**. 炮弹以初速度 v_0, 且与水平成 α 角从炮口射出. 设空气阻力与速度成正比, 求炮弹的运动方程.

3092*. 设质点 M 受力心 O 的吸引力与距离成正比. 今有一质点从与力心相距 a 的点 A, 以垂直于线段 OA 的初速度 v_0 开始运动. 求点 M 的轨迹.

§16. 微分方程的幂级数解法

如果微分方程的积分不能用初等函数给出, 则在某些情况下, 可以找出它的幂级数形式解:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n. \tag{1}$$

待定系数 $c_n\,(n=0,1,2,\cdots)$ 可以这样求得: 把级数 (1) 代入方程, 并把所得到的等式左右两边关于二项式 $x-x_0$ 的同次幂系数进行比较.

也可以把方程

$$y'=f(x,y),\ 其中\ y(x_0)=y_0 \tag{2}$$

的解设成泰勒级数形式:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \tag{3}$$

其中 $y(x_0)=y_0, y'(x_0)=f(x_0,y_0)$, 而更高阶的导数 $y^{(n)}(x_0)\,(n=2,3,\cdots)$ 可通过对方程 (2) 求导, 并用数 x_0 代替 x 依次求得.

例 1 设当 $x=0$ 时, $y=y_0, y'=y'_0$, 求出方程

$$y''-xy=0$$

的解.

解 我们设

$$y=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n+\cdots,$$

由此经求导后, 我们得到:

$$y''=2\cdot1c_2+3\cdot2c_3x+\cdots+n(n-1)c_nx^{n-2}+(n+1)nc_{n+1}x^{n-1}$$
$$+(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n+\cdots.$$

把 y,y'' 代入给定方程, 且使其成为恒等式

$$[2\cdot1c_2+3\cdot2c_3x+\cdots+n(n-1)c_nx^{n-2}+(n+1)nc_{n+1}x^{n-1}$$
$$+(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n+\cdots]-x[c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n+\cdots]\equiv0.$$

在所得等式的左边, 把 x 的同次幂项合并, 并令这些幂次的系数等于零, 我们有

$$c_2=0,\quad 3\cdot 2c_3-c_0=0, c_3=\frac{c_0}{3\cdot 2},\quad 4\cdot 3c_4-c_1=0, c_4=\frac{c_1}{4\cdot 3},$$

$$5\cdot 4c_5-c_2=0, c_5=\frac{c_2}{5\cdot 4}\ \text{等等}.$$

一般地,

$$c_{3k}=\frac{c_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot\cdots\cdot(3k-1)3k},\quad c_{3k+1}=\frac{c_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot\cdots\cdot 3k(3k+1)}$$

$$c_{3k+2}=0\quad (k=1,2,3,\cdots).$$

因此,

$$y=c_0\left(1+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}+\cdots+\frac{x^{3k}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot\cdots\cdot(3k-1)3k}+\cdots\right)$$
$$+c_1\left(x+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\cdots+\frac{x^{3k+1}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot\cdots\cdot 3k(3k+1)}+\cdots\right),\quad (4)$$

其中 $c_0=y_0, c_1=y_0'$.

应用达朗贝尔判别法, 易知级数 (4) 当 $-\infty<x<+\infty$ 时收敛.

例 2 求出初值问题

$$y'=x+y,\quad y_0=y(0)=1$$

的解.

解 设

$$y=y_0+y_0'x+\frac{y_0''}{2!}x^2+\frac{y_0'''}{3!}x^3+\cdots,$$

我们有 $y_0=1, y_0'=0+1=1$. 对方程 $y'=x+y$ 两边求导, 依次求得 $y''=1+y', y_0''=1+1=2, y'''=y'', y_0'''=2$, 等等. 因此,

$$y=1+x+\frac{2}{2!}x^2+\frac{2}{3!}x^3+\cdots.$$

对于现在研究的这个例子, 所求得的解可以写成有限形式:

$$y=1+x+2(e^x-1-x)\quad \text{或}\quad y=2e^x-1-x.$$

对高阶微分方程可作类似处理. 一般来说, 研究所得级数的收敛性是比较复杂的事, 在解本节题目时, 不一定要研究收敛性.

利用幂级数求下列方程在指定初始条件下的解:

在第 3097, 3098, 3099, 3101 题中, 研究所得解的收敛性.

3093. $y'=y+x^2$; 当 $x=0$ 时, $y=-2$.

3094. $y'=2y+x-1$; 当 $x=1$ 时, $y=y_0$.

3095. $y'=y^2+x^3$; 当 $x=0$ 时, $y=\frac{1}{2}$.

3096. $y'=x^2-y^2$; 当 $x=0$ 时, $y=0$.

3097. $(1-x)y'=1+x-y$; 当 $x=0$ 时, $y=0$.

3098*. $xy''+y=0$; 当 $x=0$ 时, $y=0, y'=1$.

3099. $y''+xy=0$; 当 $x=0$ 时, $y=1, y'=0$.

3100*. $y''+\dfrac{2}{x}y'+y=0$; 当 $x=0$ 时, $y=1, y'=0$.

3101*. $y''+\dfrac{1}{x}y'+y=0$; 当 $x=0$ 时, $y=1, y'=0$.

3102. $\dfrac{d^2x}{dt^2}+x\cos t=0$; 当 $t=0$ 时, $x=a, \dfrac{dx}{dt}=0$.

§17. 有关傅里叶方法的问题

为了求出齐次线性偏微分方程的解, 根据傅里叶方法, 应先求出该类方程的特定类型的特解, 其中每一个特解都是只依赖于一元函数的乘积. 在最简单的情况下, 存在无穷多个这样的解 $u_n\ (n=1,2,\cdots)$, 它们中任意有限个都互相线性无关, 且每一个都满足给定的边界条件. 所求的解 u 在形式上就是由这些特解排列而成的级数:

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}C_nu_n. \tag{1}$$

还有待定系数 C_n 可由初始条件求出.

问题 弦上的横坐标为 x 的点, 在时刻 t 的横向位移 $u=u(x,t)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}, \tag{2}$$

其中 $a^2=\dfrac{T_0}{\rho}$ (T_0 是张力, ρ 是弦的线密度). 如果弦的端点 $x=0$ 与 $x=l$ 是固定的, 且在初始时刻 $t=0$, 弦的形状是抛物线 $u=\dfrac{4h}{l^2}x(l-x)$ (图 107), 各点的速度等于零, 求弦在时刻 t 的形状.

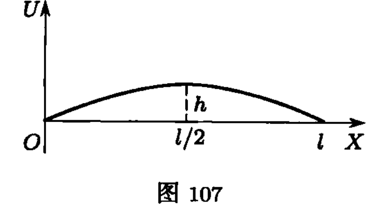


图 107

解 根据问题的条件, 所求方程 (2) 的解 $u=u(x,t)$ 须满足边界条件

$$u(0,t)=0, u(l,t)=0 \tag{3}$$

和初始条件

$$u(x,0)=\frac{4h}{l^2}x(l-x), u_t'(x,0)=0. \tag{4}$$

我们来求方程 (2) 的特定形式的非零解 $u=X(x)T(t)$. 把这个表达式代入方程 (2), 并分离变量, 我们得:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}\equiv\frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{5}$$

因为 x 与 t 都是独立变量, 所以只有当比例式 (5) 的公共值为常数时, 恒等式 (5) 才能成立. 用 $-\lambda^2$ 表示这个常数, 我们求得两个常微分方程:

$$T''(t)+(a\lambda)^2T(t)=0 \quad 与 \quad X''(x)+\lambda^2X(x)=0.$$

解这两个方程, 得:

$$T(t) = A\cos a\lambda t + B\sin a\lambda t,$$
$$X(x) = C\cos\lambda x + D\sin\lambda x,$$

其中 A, B, C, D 都是任意常数. 由条件 (3) 我们有: $X(0) = 0$ 和 $X(l) = 0$, 因此, $C = 0, \sin\lambda l = 0$ (因为 D 与 C 不能同时为零). 所以 $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$, 其中 k 是整数. 容易确信, 不失一般性, 对 k 只要取正值 $(k = 1, 2, 3, \cdots)$. 每个值 λ_k 对应于特解

$$u_k = \left(A_k\cos\frac{ka\pi}{l}t + B_k\sin\frac{ka\pi}{l}t\right)\sin\frac{k\pi x}{l},$$

它满足边界条件 (3).

建立级数

$$u = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{ka\pi}{l}t + B_k\sin\frac{ka\pi}{l}t\right)\sin\frac{k\pi x}{l},$$

显然, 其和满足方程 (2) 和边界条件 (3).

我们选择常数 A_k, B_k, 使得级数的和满足初始条件 (4). 因为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{ka\pi}{l}\left(-A_k\sin\frac{ka\pi}{l}t + B_k\cos\frac{ka\pi}{l}t\right)\sin\frac{k\pi x}{l},$$

所以令 $t = 0$ 之后, 即得:

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\frac{k\pi x}{l} \equiv \frac{4h}{l^2}x(l - x)$$

与

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{ka\pi}{l}B_k\sin\frac{k\pi x}{l} \equiv 0.$$

因此, 为了确定系数 A_k, B_k, 应把函数 $u(x, 0) = \frac{4h}{l^2}x(l - x)$ 与函数 $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} \equiv 0$ 展开成正弦傅里叶级数.

按已知公式 (第八章, §4, 3°) 我们有: 如果 k 是奇数, 则有

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l\frac{4h}{l^2}x(l - x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{32h}{\pi^3k^3},$$

如果 k 是偶数, 则 $A_k = 0$;

$$\frac{ka\pi}{l}B_k = \frac{2}{l}\int_0^l 0\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}dx = 0, \quad B_k = 0.$$

所求的解为

$$u = \frac{32h}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n+1)a\pi t}{l}}{(2n+1)^3}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

3103*. 两端 $x = 0$ 与 $x = l$ 固定的弦, 在初始时刻 $t = 0$ 的形状为正弦曲线 $u = A\sin\frac{\pi x}{l}$, 且各点的速度为零. 求弦在时刻 t 的形状.

3104*. 设在初始时刻 $t=0$, 直线弦 $0<x<l$ 上各点有相同的速度 $\frac{\partial u}{\partial t}=1$. 如果弦的端点 $x=0$ 与 $x=l$ 固定, 求弦在时刻 t 的形状 (参阅第 3103 题).

3105*. 长度为 $l=100$ cm 的弦, 两端 $x=0$ 与 $x=l$ 固定. 初始时刻在点 $x=50$ cm 处拉开距离 $h=2$ cm, 然后自由放开. 试确定弦在任一时刻 t 的形状.

3106*. 位于 OX 轴上的均匀直细杆作纵向振动时, 杆上横坐标为 x 处的横截面在时刻 t 的位移 $u=u(x,t)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

其中 $a^2=\frac{E}{\rho}$ (E 是杨氏模量, ρ 是杆的密度). 现有水平放置的弹性细杆, 其长度 $l=100$ cm, 一端 $x=0$ 固定, 而在另一端 $x=100$ 处拉长 $\Delta l=1$ cm, 然后自由放开. 试确定杆的纵振动.

3107*. 位于 OX 轴上的均匀直细杆, 其横坐标为 x 处的横截面在时刻 t 的温度 $u=u(x,t)$, 满足热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

这里假设不存在热源, 其中 a 是常数. 现有一细杆长 $l=100$ cm, 如果已知其初始温度分布为

$$u(x,0)=0.01x(100-x),$$

试确定在任一时刻 t 杆中温度分布.

第十章　近似计算

§1. 近似数的运算

1°. **绝对误差**. 用近似数 a 代替准确数 A, 它们之差的绝对值, 称为近似数 a 的绝对误差. 满足不等式

$$|A-a| \leqslant \Delta \tag{1}$$

的数 Δ 称为绝对误差界. 准确数的范围是 $a-\Delta \leqslant A \leqslant a+\Delta$, 或者简单地说 $A=a\pm\Delta$.

2°. **相对误差**. 所谓近似数 a 代替准确数 $A(A>0)$ 的相对误差, 是指数 a 的绝对误差与准确数 A 之比. 满足不等式

$$\frac{|A-a|}{A} \leqslant \delta \tag{2}$$

的数 δ, 称为近似数 a 的相对误差界. 由于实际上 $A\approx a$, 所以通常取数 $\delta=\dfrac{\Delta}{a}$ 作为相对误差界.

3°. **有效的十进位数字的个数**. 设 a 是用十进位表示的正近似数, 其绝对误差不超过它的第 n 个数位上的半个单位, 则称这个数在狭义下有 n 位有效的十进位数字 (数码). 在这种情况下, 当 $n>1$ 时, 可取数

$$\delta=\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

作为相对误差界, 其中 k 是数 a 的第一个不为零的数字. 反之, 如果已知 $\delta \leqslant \dfrac{1}{2(k+1)}\cdot\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1}$, 则数 a 在狭义下有 n 位有效的十进位数字. 特别地, 如果 $\delta \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1}$, 则显然数 a 在狭义下有 n 位有效的数字.

如果近似数 a 的绝对误差不超过它的最末一个数位上的一个单位 (例如, 当测量的精确度达到相应的单位时所得到的数就是如此), 则称这个近似数的所有十进位数字都是在广义下有效的. 如果在近似数中有较多的有意义数字, 而它又是最终的计算结果, 那

么通常要把这个近似数四舍五入, 使所有保留下来的数字都是在狭义或广义下有效的.

今后我们假定, 凡是在书写中一开始给出的所有数字都是在狭义下有效的 (如果不作相反说明的话), 至于中间计算结果, 可以包含一至两个备用数字.

我们指出, 如通常那样, 本节例题中的结果都是最终计算结果, 因此它们的答案都用只包含有效的十进位数字的近似数给出.

4°. **近似数的加法与减法**. 若干个数的代数和的绝对误差界, 等于这些数的绝对误差界的和. 所以, 当数目不多的一些仅含十进制有效数字的近似数相加时, 为了使其和也仅含有效数字 (至少是在广义下), 应当根据在十进制写法中被最早截断的被加数把所有被加数对齐, 并在每个被加数中保留相应的保护数位, 然后把所得到的数如同准确数那样相加, 并把和的一个数字四舍五入.

如果要把没有经过舍入的一些近似数相加, 那么应当先对它们进行四舍五入, 并在每个中保留一至两位备用数字, 然后按照上面讲的法则相加, 同时要在和中保持适当的多余数字, 直至计算结束.

例 1 $215.21 + 14.182 + 21.4 = 215.2(1) + 14.1(8) + 21.4 = 250.8$.

若干个正数之和的相对误差, 不超过这些的相对误差的最大值.

差的相对误差难以作简单估计, 而要估计两个相近数之差的相对误差更是不利的.

例 2 对具有四位有效十进位数字的近似数 6.135 与 6.131 作减法时, 得到差 0.004. 其相对误差界等于 $\delta = \dfrac{\frac{1}{2}\times 0.001 + \frac{1}{2}\times 0.001}{0.004} = \dfrac{1}{4} = 0.25$; 因此, 差中没有一个数字是有效的. 所以应当尽可能避免在相近的近似数之间作减法, 在必要时可改变给定的表达式, 使这种不希望的运算不出现.

5°. **近似数的乘法与除法**. 近似数的积与商的相对误差界, 等于这些数的相对误差界的和. 根据这一结论, 并应用 (3°) 中的关于有效的数字个数的规则, 我们在答案中只保留确定个数的数字.

例 3 近似数的乘积 $25.3 \times 4.12 = 104.236$.

设各因子中所有数字都是有效的, 我们得到乘积的相对误差界为

$$\delta = \frac{1}{2\times 2}\times 0.01 + \frac{1}{4\times 2}\times 0.01 \approx 0.003.$$

由此得出, 乘积中有效的数字有三位, 以及如果它是最后结果, 就把它写成 $25.3 \times 4.12 = 104$, 或更精确地写成 $25.3 \times 4.12 = 104.2 \pm 0.3$.

6°. **近似数的乘方与开方**. 近似数 a 的 m 次方的相对误差界, 等于这个数的相对误差界的 m 倍.

近似数 a 的 m 次方根的相对误差界, 等于数 a 的相对误差界的 $\dfrac{1}{m}$.

7°. **近似数的各种运算结果的误差计算**. 如果 $\Delta a_1, \cdots, \Delta a_n$ 是近似数 $a_1, \cdots, a_n$ 的绝对误差界, 则

$$S = f(a_1, \cdots, a_n)$$

的结果的绝对误差界 ΔS 可以近似地按公式

$$\Delta S=\left|\frac{\partial f}{\partial a_1}\right|\Delta a_1+\cdots+\left|\frac{\partial f}{\partial a_n}\right|\Delta a_n$$

估计. 这时 S 的相对误差界等于

$$\begin{aligned}\delta S=\frac{\Delta S}{|S|}&=\left|\frac{\partial f}{\partial a_1}\right|\frac{\Delta a_1}{|f|}+\cdots+\left|\frac{\partial f}{\partial a_n}\right|\frac{\Delta a_n}{|f|},\\&=\left|\frac{\partial\ln f}{\partial a_1}\right|\Delta a_1+\cdots+\left|\frac{\partial\ln f}{\partial a_n}\right|\Delta a_n\end{aligned}$$

例 4 计算 $S=\ln(10.3+\sqrt{4.4})$: 近似数 10.3 与 4.4 中所写出的数字都是有效的.

解 先求绝对误差 ΔS 的一般形式:

$$S=\ln(a+\sqrt{b}),\Delta S=\frac{1}{a+\sqrt{b}}\left(\Delta a+\frac{1}{2}\frac{\Delta b}{\sqrt{b}}\right).$$

我们有 $\Delta a=\Delta b\approx\frac{1}{20},\sqrt{4.4}=2.0976\cdots$. 我们保留 2.1, 这是因为近似数 $\sqrt{4.4}$ 的相对误差近似等于 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{40}=\frac{1}{80}$, 而它的绝对误差近似等于 $2\times\frac{1}{80}=\frac{1}{40}$, 从而保证到十分位有效. 因此,

$$\begin{aligned}\Delta S&=\frac{1}{10.3+2.1}\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{20\times2.1}\right)=\frac{1}{12.4\times20}\left(1+\frac{1}{4.2}\right),\\&=\frac{13}{2604}\approx0.005.\end{aligned}$$

这意味着百分位是有效的.

现在我们带一位备用数字进行计算:

$$\lg(10.3+\sqrt{4.4})\approx\lg12.4=1.093;$$

$$\ln(10.3+\sqrt{4.4})\approx1.093\times2.303=2.517.$$

我们得到答案: 2.52.

8°. **当近似数运算结果的误差给定时, 近似数容许误差的确定**. 当给定了量 ΔS 或 δS, 我们应用第 7° 段的公式, 并把所有偏微分 $\left|\frac{\partial f}{\partial a_k}\right|\Delta a_k$ 或量 $\left|\frac{\partial f}{\partial a_k}\right|\frac{\Delta a_k}{|f|}$ 都看成是彼此相等的, 就可计算参与运算的各近似数 $a_1,\cdots,a_n$ 的容许绝对误差 $\Delta a_1,\cdots,\Delta a_n$, 或者相应地, 计算它们的容许相对误差 $\delta a_1,\cdots,\delta a_n$ (*等作用原理*).

应当指出, 有时在计算函数的自变量的容许误差时, 利用等作用原理得不到什么好处, 因为后者提出的要求在实际中可能不能满足. 在这种情况下, 建议适当地重新分配误差, 如果可能的话, 要使得累计误差不超过指定值. 因此, 严格地说, 所提出的问题是不确定的.

例 5 "圆柱截段" 的体积, 即底面直径为 $2R$ 的圆柱, 求通过底面直径且与底面成 α 角的平面所截得的立体的体积, 可按公式 $V=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha$ 计算. 如果要使圆柱截段的体积达到已知的精确度 1%, 问测量半径 $R\approx60$ cm 和倾角 α 就具有怎样的精确度?

解 如果 $\Delta V, \Delta R$ 和 $\Delta\alpha$ 分别是量 V, R 和 α 的绝对误差界, 则所计算的体积 V 的相对误差界为

$$\delta V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{3\Delta R}{R} + \frac{2\Delta\alpha}{\sin 2\alpha} \leqslant \frac{1}{100}.$$

我们设 $\frac{3\Delta R}{R} \leqslant \frac{1}{200}$ 和 $\frac{2\Delta\alpha}{\sin 2\alpha} \leqslant \frac{1}{200}$, 由此得出

$$\Delta R \leqslant \frac{R}{600} \approx \frac{60\ \text{cm}}{600} = 1\ \text{mm};$$

$$\Delta\alpha \leqslant \frac{\sin 2\alpha}{400} \leqslant \frac{1}{400}\text{弧度} \approx 9'.$$

这样, 如果测量半径的精确度达到 1 mm, 倾角的精确度达到 $9'$, 我们应能保证答案的精确度在所要求的 1% 内.

3108. 由测量得到的各近似数的数字在广义下是有效的, 它们写为

a) $12°\ 07'14''$; b) 38.5 cm; c) 62.215 kg.

试计算它们绝对误差与相对误差.

3109. 下列近似数的数字在狭义下是有效的, 试计算它们的绝对误差与相对误差:

a) 241.7; b) 0.035; c) 3.14.

3110. 确定下列近似数的有效数字的个数①, 并用有效数字写出相应的近似数:

a) 48 361 精确度在 1% 之内; b) 14.9360 精确度在 1% 之内;

c) 592.8 精确度在 2% 之内.

3111. 下面写出的近似数的数字都是有效的, 试作加法:

a) 25.386+0.49+3.10+0.5; b) $1.2 \times 10^2 + 41.72 + 0.09$;

c) 38.1+2.0+3.124.

3112. 下面写出的近似数的数字都是有效的, 试作减法:

a) 148.1–63.871; b) 29.72–11.25; c) 34.22–34.21.

3113*. 测得两个正方形的边长分别为 15.28 cm 与 15.22 cm (精确到 0.05 mm), 试计算它们面积之差.

3114. 下面写出的近似数字都是有效的, 试计算它们的乘积:

a) 3.49×8.6; b) 25.1×1.743; c) 0.02×16.5.

并指出结果的可能范围.

3115. 矩形的边长等于 4.02 m 与 4.96 m (精确到 1 cm). 试计算矩形的面积.

3116. 下面写出的近似数字都是有效的, 试计算它们的商:

a) 5.684:5.032 ; b) 0.144:1.2; c) 216:4.

3117. 直角三角形的直角边等于 12.10 cm 与 25.21 cm (精确到 0.01 cm). 试计算第一条直角边所对角的正切.

3118. 试计算近似数的指定乘幂 (乘幂的底的数字是有效的);

---

①指在狭义下的有效数字.

a) 0.4158^2 ; b) 65.2^3; c) 1.5^2.

3119. 正方形的边长为 45.3 cm (精确到 1 mm), 试求正方形的面积.

3120. 计算根值 (被开方数的数字是有效的):

a) $\sqrt{2.715}$; b) $\sqrt[3]{65.2}$; c) $\sqrt{81.1}$.

3121. 正圆台的底半径为 $R = (23.64 \pm 0.01)$ cm, $r = (17.31 \pm 0.01)$ cm, 母线为 $l = (10.21 \pm 0.01)$ cm, 数 $\pi = 3.14$. 试根据这些已知数据计算正圆台的全面积. 并估计结果的绝对误差与相对误差.

3122. 直角三角形的斜边等于 (15.4±0.1) cm; 一直角边等于 (6.8±0.1) cm. 根据这些条件, 如何精确地确定另一直角边以及与其相邻的锐角? 试求出它们的值.

3123. 已知铝制圆柱体的底面直径为 2 cm, 高为 11 cm, 质量为 93.4 g, 且长度测量的相对误差为 0.01, 质量的相对误差为 0.001. 试计算铝的密度.

3124. 设电动势等于 (221±1) V, 电阻等于 (809±1)Ω, 试计算电流强度.

3125. 长度为 l 的单摆, 其振动的周期等于

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

其中 g 是重力加速度. 如果单摆振动的周期接近于 2 s, 问应以怎样的精确度测量其长度, 才能使求得的单摆振动周期的相对误差在 0.5% 之内? 数 π 与 g 应取几位小数?

3126. 设正圆台的底半径为 2 m 与 1 m, 母线长为 5 m (近似地). 如果在测量其侧面积时, 要求精确度在 1% 内, 问应以怎样的精确度测量其半径与母线? 数 π 应取几位数字?

3127. 为了确定矩形截面杆在下垂时的杨氏模量, 可应用公式

$$E = \frac{1}{4} \cdot \frac{l^3 P}{d^3 bs}$$

其中 l 是杆的长度, b 与 d 是矩形截面的底与高, s 是下垂量, P 是负载. 已知 P 精确到 0.1%, 量 d 与 b 精确到 1%, $l = 50$ cm, $s \approx 2.5$ cm, 问应以怎样的精确度测量长度 l 与下垂 s, 才能使 E 的相对误差不超过 5.5%?

§2. 函数的插值法

1°. **牛顿插值公式**. 设 $x_0, x_1 \cdots, x_n$ 是自变量的表值, 其差 $h = \Delta x_i$ ($\Delta x_i = x_{i-1} - x_i, i = 0, 1, \cdots, n-1$) 是相同的 (数表步长), 而 $y_0, y_1 \cdots, y_n$ 是函数 y 的相应值. 这时对应于自变量的中间值 x 的函数值 y, 可近似地由牛顿插值公式

$$y = y_0 + q \cdot \Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{q(q-1)\cdots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \qquad (1)$$

给出, 其中 $q = \dfrac{x - x_0}{h}, \Delta y_0 = y_1 - y_0, \Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, \cdots$ 是函数的逐阶有限差. 当 $x = x_i\,(i = 0, \cdots, n)$ 时, 多项式 (1) 相应地取表值 $y_i\,(i = 0, \cdots, n)$. 作为牛顿公式的特殊情形, 我们得到: 当 $n = 1$ 时, 是线性插值; 当 $n = 2$ 时是二次插值. 为了方便地

利用牛顿公式, 建议预先把有限差列成表格.

如果 $y=f(x)$ 是 n 次多项式, 则

$$\Delta^n y_i = \text{常数} \quad \text{和} \quad \Delta^{n+1} y_i = 0,$$

因此, 公式 (1) 是精确的.

在一般情形, 如果 $f(x)$ 在包含点 $x_0, x_1 \cdots, x_n$ 及 x 的闭区间 $[a,b]$ 上有连续的导数 $f^{(n+1)}(x)$, 则公式 (1) 的误差等于

$$\begin{aligned} R_n(x) &= y - \sum_{i=0}^{n} \frac{q(q-1)\cdots(q-i+1)}{i!}\Delta^i y_0 \\ &= h^{n+1}\frac{q(q-1)\cdots(q-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi), \end{aligned} \tag{2}$$

其中 ξ 是 $x_i\,(i=0,\cdots,n)$ 与 x 之间的某个中间值. 在实际计算中, 可利用更方便的近似公式

$$R_n(x) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!} q(q-1)\cdots(q-n).$$

如果数 n 可任意取, 则它应当这样选取, 使得在给定的精确度内, 差 $\Delta^{n+1} y_0 \approx 0$. 换句话说, 在指定的小数位数内, 差 $\Delta^n y_0$ 应是常数.

例 1 利用表格列出的数据: $\sin 26° = 0.43837, \sin 27° = 0.45399, \sin 28° = 0.46947$, 求出 $\sin 26°15'$.

解 构造表格

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0	26°	0.43837	1562	−14
1	27°	0.45399	1548	
2	28°	0.46947		

这里 $h = 60', q = \dfrac{26°15' - 26°}{60'} = \dfrac{1}{4}$.

对表中第一横行应用公式 (1), 我们有:

$$\begin{aligned} \sin 26°15' &= 0.43837 + \frac{1}{4}\times 0.01562 + \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)}{2!}\times(-0.00014) \\ &= 0.44229. \end{aligned}$$

我们来估计误差 R_2. 利用公式 (2), 并注意到如果 $y=\sin x$, 则 $|y^{(n)}| \leqslant 1$, 于是有:

$$|R_2| \leqslant \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-2\right)}{3!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3 = \frac{7}{128}\times\frac{1}{57.33^3} \approx \frac{1}{4}\times 10^{-6}.$$

因此, 算出的 $\sin 26°15'$ 的各个数字都是有效的.

利用牛顿公式, 同样可以由函数 y 的给定中间值, 来求出自变量 x 的相应值 (反插值法). 为此, 我们先用逐次近似的方法确定相应的 q 值, 设

$$q^{(0)} = \frac{y - y_0}{\Delta y_0}$$

和

$$q^{(i+1)} = q^{(0)} - \frac{q^{(i)}(q^{(i)}-1)}{2}\cdot\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta y_0} - \cdots - \frac{q^{(i)}(q^{(i)}-1)\cdots(q^{(i)}-n+1)}{n!}\cdot\frac{\Delta^n y_0}{\Delta y_0} \quad (i=0,1,2,\cdots)$$

取相邻两次的公共值 $q^{(m)} = q^{(m+1)}$ (具有指定的精确度!) 作为 q 值. 由此得出 $x = x_0 + q\cdot h$.

例 2　利用表格

x	$y=\sinh x$	Δy	$\Delta^2 y$
2.2	4.457	1.009	0.220
2.4	5.466	1.229	
2.6	6.695		

近似地计算方程 $\sinh x = 5$ 的根.

解　取 $y_0 = 4.457$, 我们有

$$q^{(0)} = \frac{5-4.457}{1.009} = \frac{0.543}{1.009} = 0.538;$$

$$q^{(1)} = q^{(0)} - \frac{q^{(0)}(1-q^{(0)})}{2}\cdot\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta y_0} = 0.538 + \frac{0.538\times 0.462}{2}\cdot\frac{0.220}{1.009}$$
$$= 0.538 + 0.027 = 0.565;$$

$$q^{(2)} = 0.538 + \frac{0.565\times 0.435}{2}\cdot\frac{0.220}{1.009} = 0.538 + 0.027 = 0.565.$$

于是, 可取

$$x = 2.2 + 0.565\times 0.2 = 2.2 + 0.113 = 2.313.$$

2°. **拉格朗日插值公式**. 在一般情况下, 如果一个 n 次多项式当 $x = x_i$ 时取给定值 $y_i(i=0,1,\cdots,n)$, 那么它可由拉格朗日插值公式

$$y = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}y_1 + \cdots$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}y_k + \cdots$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}y_n$$

给出.

3128. 量 x 与 y 的值列表如下:

x	1	2	3	4	5	6
y	3	10	15	12	9	5

试构造函数 y 的有限差的表格.

3129. 试构造函数 $y = x^3 - 5x^2 + x - 1$ 对于值 $x = 1, 3, 5, 7, 9, 11$ 的有限差的表格, 并说明所有三阶有限差彼此相等.

3130*. 利用函数 $y = x^4 - 10x^3 + 2x^2 + 3x$ 四阶有限差的不变性, 对于包含在区间 $1 \leqslant x \leqslant 10$ 内的 x 的整数值, 构造此函数的有限差表格.

3131. 已知一组值

$$\begin{aligned} \lg 1 &= 0.000, \\ \lg 2 &= 0.301, \\ \lg 3 &= 0.477, \\ \lg 4 &= 0.602, \\ \lg 5 &= 0.699. \end{aligned}$$

利用线性插值法算出数: $\lg 1.7, \lg 2.5, \lg 3.1$ 及 $\lg 4.6$.

3132. 已知一组数值排列成如下表格

$\sin 10^\circ = 0.1736$	$\sin 13^\circ = 0.2250$
$\sin 11^\circ = 0.1908$	$\sin 14^\circ = 0.2419$
$\sin 12^\circ = 0.2079$	$\sin 15^\circ = 0.2588$

试按照牛顿公式 (当 $n = 2$ 时) 计算在 10° 到 15° 之间每隔半度的正弦值.

3133. 对于由下表

x	0	1	2	3	4
y	1	4	15	40	85

给定的函数, 试构成其牛顿插值多项式.

3134*. 对于由下表

x	2	4	6	8	10
y	3	11	27	50	83

给定的函数, 试构成其牛顿插值多项式; 并求当 $x = 5.5$ 时 y 的值. 当 x 等于什么值时, $y = 20$?

3135. 设函数由下表给定:

x	-2	1	2	4
y	25	-8	-15	-23

试构成其拉格朗日插值多项式, 并求出当 $x=0$ 时 y 的值.

3136. 由实验求得弹簧的伸长量 (x mm) 与加在弹簧上的负载 (P N) 的依赖关系如下:

x (mm)	5	10	15	20	25	30	35	40
P (N)	49	105	172	253	352	473	619	793

求当弹簧伸长 14 mm 时的负载.

3137. x 与 y 的值由下表

x	0	1	3	4	5
y	1	-3	25	129	381

给定. 计算当 $x=0.5$ 与 $x=2$ 时 y 的值: a) 利用线性插值法; b) 按照拉格朗日公式.

§3. 方程实根的计算方法

1°. **初始近似根的确定**. 已知方程

$$f(x)=0, \tag{1}$$

要近似地求其根, 可分两步: 1) 根的分离, 即尽可能密地建立区间, 使方程 (1) 在每一个区间内有且只有一个根; 2) 具有指定精确度的根的计算.

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义和连续, 且 $f(a)\cdot f(b)<0$, 则方程 (1) 在区间 $[a,b]$ 上至少存在一个根 ξ. 如果当 $a<x<b$ 时有 $f'(x)>0$ 或 $f'(x)<0$, 这种根显然是唯一的.

为了近似地求得根 ξ, 建议在毫米方格纸上作出函数 $y=f(x)$ 的图形, 此图形与 OX 轴交点的横坐标, 就是方程 $f(x)=0$ 的根. 有时, 原方程用与其等价的方程 $\varphi(x)=\psi(x)$ 来代替, 会带来方便. 这时, $y=\varphi(x)$ 与 $y=\psi(x)$ 两图形交点的横坐标, 就是方程的根.

2°. **分比法则 (弦截法)**. 如果方程 $f(x)=0$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有唯一的根 ξ, 其中函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 那么, 用经过点 $(a,f(a))$ 和 $(b,f(b))$ 的弦代替曲线 $y=f(x)$, 我们就得到第一次近似根

$$c_1=a-\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a). \tag{2}$$

为了得到第二次近似根 c_2, 可把公式 (2) 应用到区间 $[a,c_1]$ 或 $[c_1,b]$ 中的这样一个

区间上去: 在该区间的端点处函数 $f(x)$ 有相反符号的值. 随后的各次近似根可用同样方法得到. 数列 $c_n\,(n=1,2,\cdots)$ 收敛到根 ξ, 即

$$\lim_{n\to\infty} c_n=\xi.$$

一般来说, 近似根 $c_1,c_2,\cdots$ 的计算, 应当一直要进行到我们在答案中所保留的十进位数字 (与给定的精确度相对应!) 不再改变为止, 在计算过程中, 应取一至二位备用数字, 这个附注带有普遍性.

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有异于零的连续导数 $f'(x)$, 那么为了估计近似根 c_n 的绝对误差, 可以利用公式

$$|\xi-c_n|\leqslant\frac{|f(c_n)|}{\mu},$$

其中 $\mu=\min\limits_{a\leqslant x\leqslant 0}|f'(x)|$.

3°. **牛顿法 (切线法)**. 如果当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时, $f'(x)\neq 0, f''(x)\neq 0$, 而且 $f(a)f(b)<0, f(a)f''(a)>0$, 则方程 $f(x)=0$ 的根 ξ 的逐次近似 $x_n\,(n=0,1,2,\cdots)$ 可按公式

$$x_0=a,\quad x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}\quad(n=1,2,\cdots)\tag{3}$$

计算.

在给出的假设下, 序列 $x_n\,(n=1,2,\cdots)$ 是单调的, 且

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\xi.$$

为了估计误差, 可以利用公式

$$|x_n-\xi|\leqslant\frac{|f(x_n)|}{\mu},$$

其中 $\mu=\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|$.

实际上, 利用较简单的公式

$$x_0=a,\quad x_n=x_{n-1}-\alpha f(x_{n-1})\quad(n=1,2,\cdots)\tag{3'}$$

更为方便, 其中 $\alpha=\dfrac{1}{f'(a)}$, 此公式的精确度与公式 (3) 大致相同.

如果 $f(b)f''(b)>0$, 则在公式 (3) 与 (3′) 中应设 $x_0=b$.

4°. **迭代法**. 设已给的方程可化为形式

$$x=\varphi(x),\tag{4}$$

其中当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时, $|\varphi'(x)|\leqslant r<1\,(r$ 是常数). 从位于闭区间 $[a,b]$ 的初始值 x_0 出发, 按下面的规律构造数列 $x_1,x_2,\cdots$:

$$x_1=\varphi(x_0),\quad x_2=\varphi(x_1),\quad\cdots,\quad x_n=\varphi(x_{n-1}),\cdots.\tag{5}$$

如果 $a\leqslant x_n\leqslant b(n=1,2,\cdots)$, 则极限

$$\xi=\lim_{n\to\infty}x_n$$

是方程 (4) 在闭区间 $[a,b]$ 上唯一的根, 即 x_n 是根 ξ 的逐次近似.

第 n 次近似根 x_n 的绝对误差估计, 由下面公式给出:

$$|\xi-x_n|\leqslant\frac{|x_{n+1}-x_n|}{1-r}.$$

因此, 如果 x_n 与 x_{n+1} 精确到 ε 相同, 则 x_n 的绝对误差界是 $\frac{\varepsilon}{1-r}$.

为了把方程 $f(x)=0$ 化为形式 (4), 我们用等价的方程

$$x = x - \lambda f(x)$$

代替后者, 其中数 $\lambda \neq 0$ 应选取使得函数 $\frac{d}{dx}[x-\lambda f(x)] = 1-\lambda f'(x)$ 的绝对值在点 x_0 的邻域内变得很小 (例如, 可以让 $1-\lambda f'(x_0)=0$).

例 1 当根的初始近似 $x_0 = 2.5$ 时, 试把方程 $2x - \ln x - 4 = 0$ 化为形式 (4).

解 这里 $f(x) = 2x - \ln x - 4$, $f'(x) = 2 - \frac{1}{x}$. 我们写出等价的方程 $x = x - \lambda(2x - \ln x - 4)$. 方程 $1-\lambda\left(2-\frac{1}{x}\right)\Big|_{x=2.5} = 0$ 的根为 $\frac{1}{1.6} \approx 0.6$, 我们取接近于它的数 0.5 作为 λ 的一个合适的值.

所求方程就化为形式

$$x = x - 0.5(2x - \ln x - 4)$$

或者

$$x = 2 + \frac{1}{2}\ln x.$$

例 2 计算上述方程的位于 2 与 3 之间的根 ξ, 精确到 0.01.

按照迭代法计算根 令 $x_0 = 2.5$, 我们利用例 1 的结果, 按公式 (5) 进行带有一个备用数字的计算.

$$x_1 = 2 + \frac{1}{2}\ln 2.5 \approx 2.458,$$

$$x_2 = 2 + \frac{1}{2}\ln 2.458 \approx 2.450,$$

$$x_3 = 2 + \frac{1}{2}\ln 2.450 \approx 2.448,$$

$$x_4 = 2 + \frac{1}{2}\ln 2.448 \approx 2.448.$$

这样, $\xi \approx 2.45$ (因为第三位十进位数字 (千分位) 已经稳定下来, 所以后面的近似过程可以停止).

我们来进行误差估计. 这里

$$\varphi(x) = 2 + \frac{1}{2}\ln x \quad 和 \quad \varphi'(x) = \frac{1}{2x}.$$

认为所有近似根都位于区间 [2.4,2.5] 上之后, 我们得:

$$r = \max|\varphi'(x)| = \frac{1}{2\times 2.4} = 0.21.$$

因此, 根据前面的附注, 近似根 x_3 的绝对误差界是

$$\Delta = \frac{0.001}{1-0.21} = 0.0012 \approx 0.001.$$

所以, 方程的精确根 ξ 在下列范围之中:

$$2.447 < \xi < 2.449,$$

可取 $\xi \approx 2.45$, 而且这个近似数的所有数字都是在狭义下有效的.

按照牛顿法计算根 这里

$$f(x) = 2x - \ln x - 4, \quad f'(x) = 2 - \frac{1}{x} \quad f''(x) = \frac{1}{x^2}.$$

在闭区间 $2 \leqslant x \leqslant 3$ 上我们有: $f'(x) > 0$ 和 $f''(x) > 0; f(2)f(3) < 0; f(3)f''(3) > 0$. 因此, 当 $x_0 = 3$ 时, 第 3° 段中的条件都满足.

我们取

$$\alpha = \left(2 - \frac{1}{3}\right)^{-1} = 0.6.$$

按公式 (3′) 进行带有两位备用数字的计算:

$$x_1 = 3 - 0.6(2 \times 3 - \ln 3 - 4) = 2.4592;$$
$$x_2 = 2.4592 - 0.6(2 \times 2.4592 - \ln 2.4592 - 4) = 2.4481;$$
$$x_3 = 2.4481 - 0.6(2 \times 2.4481 - \ln 2.4481 - 4) = 2.4477;$$
$$x_4 = 2.4477 - 0.6(2 \times 2.4477 - \ln 2.4477 - 4) = 2.4475.$$

因为千分位上的数不再变化了, 所以到这一步计算就可以停止, 给出答案: 根 $\xi = 2.45$. 至于误差估计, 我们省略了.

5°. **两个方程的方程组情形**. 设在指定的精确度内, 要计算含有两个未知数的两个方程所组成的方程组

$$\begin{cases} f(x,y) = 0, \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

的实根. 设此方程组的解 (ξ, η) 的一个初始近似为 $x = x_0, y = y_0$.

这个初始近似例如可以用图解法得到: (在同一笛卡儿坐标系中) 作出曲线 $f(x, y) = 0$ 与 $\varphi(x,y) = 0$, 再确定它们交点的坐标.

a) 牛顿法. 我们假设函数行列式

$$I = \frac{\partial(f,\varphi)}{\partial(x,y)}$$

在初始近似 $x = x_0, y = y_0$ 解附近不等于零. 那么, 按照牛顿法, 方程组 (6) 的第一次近似解有形式 $x_1 = x_0 + \alpha_0, y_1 = y_0 + \beta_0$, 其中 α_0, β_0 是由两个线性方程构成的方程组

$$\begin{cases} f(x_0,y_0) + \alpha_0 f'_x(x_0,y_0) + \beta_0 f'_y(x_0,y_0) = 0, \\ \varphi(x_0,y_0) + \alpha_0 \varphi'_x(x_0,y_0) + \beta_0 \varphi'_y(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$$

的解. 第二次近似解可用同样方法得到:

$$x_2 = x_1 + \alpha_1, \quad y_2 = y_1 + \beta_1,$$

其中 α_1, β_1 是线性方程组

$$\begin{cases} f(x_1,y_1) + \alpha_1 f'_x(x_1,y_1) + \beta_1 f'_y(x_1,y_1) = 0, \\ \varphi(x_1,y_1) + \alpha_1 \varphi'_x(x_1,y_1) + \beta_1 \varphi'_y(x_1,y_1) = 0 \end{cases}$$

的解. 类似地可以得到第三次及以后各次的近似解.

b) 迭代法. 可用迭代法解方程组 (6): 把方程组变换为等价形式

$$\begin{cases} x = F(x,y), \\ y = \Phi(x,y), \end{cases} \tag{7}$$

并设在初始近似解 (x_0, y_0) 的某个二维邻域 U 内, 成立不等式组:

$$|F'_x(x,y)| + |\Phi'_x(x,y)| \leqslant r < 1; \quad |F'_y(x,y)| + |\Phi'_y(x,y)| \leqslant r < 1, \tag{8}$$

这里 U 包含方程组的精确解 (ξ, η).

收敛到方程组 (7) 的解的近似解序列 $(x_n, y_n)\,(n = 1, 2, \cdots)$, 或者同样地, 收敛到方程组 (6) 的解的近似解序列 $(x_n, y_n)\,(n = 1, 2, \cdots)$, 按照下面规则构成

$$x_1 = F(x_0, y_0), \quad y_1 = \Phi(x_0, y_0),$$

$$x_2 = F(x_1, y_1), \quad y_2 = \Phi(x_1, y_1),$$

$$x_3 = F(x_2, y_2), \quad y_3 = \Phi(x_2, y_2),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

如果所有 (x_n, y_n) 都属于 U, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \eta$.

为了把方程组 (6) 化为满足条件 (8) 的形式 (7), 可采用这样的方法, 在 $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$ 的条件下, 研究与方程组 (6) 等价的方程组

$$\begin{cases} \alpha f(x,y) + \beta\varphi(x,y) = 0, \\ \gamma f(x,y) + \delta\varphi(x,y) = 0. \end{cases}$$

我们把它重写为

$$x = x + \alpha f(x,y) + \beta\varphi(x,y) \equiv F(x,y),$$

$$y = y + \gamma f(x,y) + \delta\varphi(x,y) \equiv \Phi(x,y).$$

这样来选择参数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, 使得函数 $F(x,y)$ 与 $\Phi(x,y)$ 的偏导数在初始近似解处等于或接近于零, 即我们把 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 作为方程组

$$\begin{cases} 1 + \alpha f'_x(x_0,y_0) + \beta\varphi'_x(x_0,y_0) = 0, \\ \alpha f'_y(x_0,y_0) + \beta\varphi'_y(x_0,y_0) = 0, \\ \gamma f'_x(x_0,y_0) + \delta\varphi'_x(x_0,y_0) = 0, \\ 1 + \gamma f'_y(x_0,y_0) + \delta\varphi'_y(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$$

的近似解来求得.

如果函数 $f(x,y)$ 与 $\phi(x,y)$ 的偏导数在初始近似解 (x_0, y_0) 的邻域内变化得不很快, 那么用上面方法选择的参数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, 条件 (8) 就能满足.

例 3　设方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0, \\ x^3 - y = 0 \end{cases}$$

的解的初始近似根为 $x_0 = 0.8, y_0 = 0.55$, 试把方程组化为形式 (7).

解　这里 $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1, \phi(x,y) = x^3 - y; f'_x(x_0,y_0) = 1.6, f'_y(x_0,y_0) = 1.1; \varphi'_x(x_0,y_0) = 1.92, \varphi'_y(x_0,y_0) = -1$.

把与原方程等价的方程组

$$\begin{cases}\alpha(x^2+y^2-1)+\beta(x^3-y)=0,\\ \gamma(x^2+y^2-1)+\delta(x^3-y)=0\end{cases}\qquad \left(\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}\neq 0\right)$$

改写为形式

$$x=x+\alpha(x^2+y^2-1)+\beta(x^3-y),$$

$$y=y+\gamma(x^2+y^2-1)+\delta(x^3-y).$$

我们取方程组

$$\begin{cases}1+1.6\alpha+1.92\beta=0,\\ \quad 1.1\alpha-\qquad\beta=0,\\ \quad 1.6\gamma+1.92\delta=0,\\ 1+1.1\gamma-\qquad\delta=0,\end{cases}$$

的解作为 α, β, γ, δ 合适的数值, 即令

$$\alpha\approx-0.3,\quad \beta\approx-0.3,\quad \gamma\approx-0.5,\quad \delta\approx 0.4.$$

于是, 方程组

$$\begin{cases}x=x-0.3(x^2+y^2-1)-0.3(x^3-y),\\ y=y-0.5(x^2+y^2-1)+0.4(x^3-y)\end{cases}$$

与原方程组等价, 又具有形式 (7), 且在点 (x_0,y_0) 的充分小邻域内满足条件 (8).

试用分离方程实根的方法和分比法则, 计算下列方程的实根, 精确到 0.01:

3138. $x^3-x+1=0$. **3139.** $x^4+0.5x-1.55=0$.

3140. $x^2-4x-1=0$.

对下列方程, 先由图解法求实根的初始近似, 再用牛顿法计算精确到 0.01 的实根:

3141. $x^3-2x-5=0$. **3142.** $2x-\ln x-4=0$.

3143. $2^x=4x$. **3144.** $\lg x=\dfrac{1}{x}$.

对下列方程, 利用由图解法求得实根为初始近似, 用迭代法计算精确到 0.01 的实根:

3145. $x^3-5x+0.1=0$. **3146.** $4x=\cos x$.

3147. $x^5-x-2=0$.

对于下列方程和方程组, 用图解法求实根的初始近似, 并计算精确到 0.01 的实根.

3148. $x^3-3x+1=0$. **3149.** $x^3-2x^2+3x-5=0$.

3150. $x^4+x^2-2x-2=0$. **3151.** $x\ln x-14=0$.

3152. $x^3+3x-0.5=0$. **3153.** $4x-7\sin x=0$.

3154. $x^x+2x-6=0$. **3155.** $e^x+e^{-3x}-4=0$.

3156. $\begin{cases}x^2+y^2-1=0,\\ x^3-y=0.\end{cases}$ **3157.** $\begin{cases}x^2+y-4=0,\\ y-\lg x-1=0.\end{cases}$

3158. 计算方程 $\tan x=x$ 的最小正根, 精确到 0.001.

3159. 计算方程 $x\tanh x = 1$ 的根, 精确到 0.0001.

§4. 函数的数值积分法

1°. **梯形公式**. 为了近似计算定积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

($f(x)$ 是在 $[a,b]$ 上连续的函数), 我们把积分区间 $[a,b]$ 分成 n 等分, 并选取计算步长 $h=\dfrac{b-a}{n}$. 设 $x_i = x_0 + ih\,(x_0 = a, x_n = b, i = 0,1,2,\cdots,n)$ 是分点的横坐标, $y_i = f(x_i)$ 是被积函数 $y = f(x)$ 对应的值. 那么按照梯形公式, 我们有:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right), \tag{1}$$

它的绝对误差为

$$R_n \leqslant \frac{h^2}{12}(b-a)\cdot M_2,$$

其中 $M_2 = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|$.

在计算积分时, 为了达到指定的精确度 ε, 计算步长 h 应由不等式

$$h^2 \leqslant \frac{12\varepsilon}{(b-a)M_2} \tag{2}$$

确定, 即 h 应具有 $\sqrt{\varepsilon}$ 阶. 把得到的 h 适当减小, 使得

$$\frac{b-a}{h} = n$$

成为整数, 这样我们就得到了分割数 n. 确定了 h 与 n 以后, 就可以根据公式 (1) 计算积分, 在取被积函数的值时, 要保留一位或两位备用十进位数字.

2°. **辛普森公式 (抛物线公式)**. 如果 n 是偶数, 那么采用 1° 段中的记号, 辛普森公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[(y_0+y_n) + 4(y_1+y_3+\cdots+y_{n-1})$$

$$+2(y_2+y_4+\cdots+y_{n-2})], \tag{3}$$

成立, 它的绝对误差为

$$R_n \leqslant \frac{h^4}{180}(b-a)M_4, \tag{4}$$

其中 $M_4 = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(4)}(x)|$.

为了保证达到指定的精确度 ε, 在计算积分时计算步长 h 应由不等式

$$\frac{h^4}{180}(b-a)M_4 \leqslant \varepsilon \tag{5}$$

确定, 即步长 h 应具有 $\sqrt[4]{\varepsilon}$ 阶. 适当减小 h, 使得 $n = \dfrac{b-a}{h}$ 成为整偶数.

附注 因为由不等式 (2) 、(5) 确定计算步长 h 以及与它有关的数 n, 一般说来是困难的, 所以, 在实际计算中 h 是通过粗略估计而确定的. 求出结果后, 再把 n 的数目加倍, 即把步长 h 减半. 如果新的结果与原来的结果所保留的十进位数字相同了, 那么计算就可停止. 否则, 再重复这个方法, 等等.

为了近似地计算辛普生求积公式 (3) 的绝对误差 R, 也可以利用龙格原理, 根据这一原理有

$$R = \frac{|\Sigma - \bar{\Sigma}|}{15},$$

其中 Σ 与 $\bar{\Sigma}$ 是对应于步长 h 与 $H = 2h$ 按公式 (3) 计算的结果.

3160. 在沿 OX 轴方向的变力 $\boldsymbol{F}$ 作用下, 质点在 OX 轴上由位置 $x = 0$ 移动到位置 $x = 4$, 如果力 $\boldsymbol{F}$ 的数值 F 由下表:

x	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
F	1.50	0.75	0.50	0.75	1.50	2.75	4.50	6.75	10.00

给出: 试按照梯形公式和辛普森公式近似计算力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 A.

3161. 设 $n = 10$, 试按照梯形公式近似计算 $\int_0^1 (3x^2 - 4x)dx$, 再精确地计算此积分, 并求出近似计算结果的绝对误差与相对误差. 利用正文中引进的误差公式, 确定当 $n = 10$ 时近似计算的绝对误差的上界 Δ.

3162. 取 $n = 10$, 按照辛普森公式计算 $\int_0^1 \frac{xdx}{x+1}$, 精确到 10^{-4}, 利用正文中引进的误差公式, 确定绝对误差的上界 Δ.

计算下列定积分, 精确到 0.01.

3163. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$.

3164. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

3165. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$.

3166. $\int_1^2 x \lg x dx$.

3167. $\int_1^2 \frac{\lg x}{x} dx$.

3168. $\int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx$.

3169. $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx$.

3170. $\int_1^2 \frac{\cos x}{x} dx$.

3171. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x} dx$.

3172. $\int_0^1 e^{-x^2} dx$.

3173. 利用变换 $x = \frac{1}{t}$ 计算反常积分 $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$, 精确到 0.01, 并通过用辛普森公式计算积分 $\int_0^b \frac{dx}{1+x^2}$ 来检验计算结果, 其中选择 b 使得满足 $\int_b^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} < \frac{1}{2} \times 10^{-2}$.

3174. 由正弦曲线 $y = \sin x$ 的半波与 OX 轴所围成的平面图形, 绕 OX 轴旋转. 试按照辛普森公式计算旋转体的体积, 精确到 0.01.

3175*. 按照辛普森公式计算椭圆 $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{(0.6222)^2}=1$ 位于第一象限部分的弧长, 精确到 0.01.

§5. 常微分方程的数值积分法

1°. **逐次逼近法 (皮卡 (Picard) 方法)**. 设给定一阶微分方程

$$y'=f(x,y), \tag{1}$$

其初始条件: 当 $x=x_0$ 时 $y=y_0$.

方程 (1) 满足给定初始条件的解 $y(x)$, 一般说来可以表示为下面形式:

$$y(x)=\lim_{i\to\infty} y_i(x), \tag{2}$$

其中逐次近似 $y_i(x)$ 按公式

$$y_0(x)=y_0,$$
$$y_i(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y_{i-1}(x))\mathrm{d}x$$
$$(i=0,1,2,\cdots).$$

确定.

如果方程的右边 $f(x,y)$ 在邻域

$$R\{|x-x_0|\leqslant a, |y-y_0|\leqslant b\}$$

中有定义且连续, 又在这邻域内满足利普希茨条件

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|$$

(L 是常数), 那么逐次近似 (2) 的过程在区间

$$|x-x_0|\leqslant h$$

内显然是收敛的, 其中

$$h=\min_R\left(a,\frac{b}{M}\right),$$
$$M=\max_R|f(x,y)|.$$

这时, 只要

$$|x-x_0|\leqslant h,$$

误差

$$R_n=|y(x)-y_n(x)|\leqslant ML^n\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

逐次逼近法 (皮卡法) 只要作不大的改变, 同样适用于标准型的微分方程组. 至于高阶微分方程, 则可写成微分方程组的形式.

2°. **龙格 – 库塔 (Runge-Kutta) 法**. 设要在给定区间 $x_0\leqslant x\leqslant X$ 上, 求问题 (1) 之具有给定精确度 ε 的解 $y(x)$.

为此, 我们先选取 $h=\frac{X-x_0}{n}$ (计算步长), 把区间 $[x_0,X]$ 分成 n 等份, 使得

$h^4 < \varepsilon$. 分点 x_i 按公式

$$x_i = x_0 + ih \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

确定. 按照龙格 – 库塔法, 未知函数的相应值 $y_i = y(x_i)$ 可按公式

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i,$$
$$\Delta y_i = \frac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)})$$

逐步计算, 其中

$$i = 0, 1, 2, \cdots, n,$$

并且

$$\begin{cases} k_1^{(i)} = f(x_i, y_i)h, \\ k_2^{(i)} = f\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{k_1^{(i)}}{2}\right)h, \\ k_3^{(i)} = f\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{k_2^{(i)}}{2}\right)h, \\ k_4^{(i)} = f(x_i + h, y_i + k_3^{(i)})h. \end{cases} \tag{3}$$

龙格 – 库塔法具有精确阶 h^4. 在给定区间 $[x_0, X]$ 上, 龙格 – 库塔法误差的粗略估计, 可由龙格原理得出:

$$R = \frac{|y_{2m} - \tilde{y}_m|}{15},$$

其中 $n = 2m, y_{2m}$ 与 $\tilde{y}_m$ 分别是步长为 h 与 $2h$ 时按格式 (3) 的计算结果.

龙格 – 库塔法对于求解具有给定初始条件: 当 $x = x_0$ 时 $y = y_0, z = z_0$ 的微分方程组

$$y' = f(x, y, z), \quad z' = \varphi(x, y, z) \tag{4}$$

同样适用.

3°. **米尔恩 (Milne) 法**. 为了按米尔恩法求解问题 (1), 根据已给的初始条件: 当 $x = x_0$ 时 $y = y_0$, 我们先用任意一种方法求出未知函数的逐次值

$$y_1 = y(x_1), \quad y_2 = y(x_2), \quad y_3 = y(x_3)$$

(例如, 可以利用解 $y(x)$ 的级数展开 (第九章, 16 节) 或用逐次逼近法求这些值, 或用龙格 – 库塔法等). 关于随后的值 y_i $(i = 4, 5, \cdots, n)$ 的近似 $\bar{y}_i$ 与 $\bar{\bar{y}}_i$ 可按公式

$$\begin{cases} \bar{y}_i = y_{i-4} + \dfrac{4h}{3}(2f_{i-3} - f_{i-2} + 2f_{i-1}), \\ \bar{\bar{y}}_i = y_{i-2} + \dfrac{h}{3}(\bar{f}_i + 4f_{i-1} + f_{i-2}) \end{cases} \tag{5}$$

逐次求得, 其中

$$f_i = f(x_i, y_i), \quad \bar{f}_i = f(x_i, \bar{y}_i).$$

为了检查, 我们计算量

$$\varepsilon_i = \frac{1}{29}|\bar{y}_i - \bar{\bar{y}}_i|. \tag{6}$$

如果 ε_i 不超过答案中对 $y(x)$ 最后所保留的十进位数位 10^{-m} 的一个单位, 则取 $\bar{\bar{y}}_i$ 作为 y_i, 并转到下一个值 y_{i+1} 的计算, 如此重复下去. 如果 $\varepsilon_i > 10^{-m}$, 则应在减小计算步长后, 重新计算. 初始步长的数值可由不等式 $h^4 < 10^{-m}$ 近似地确定.

在求解方程组 (4) 的情形, 可对函数 $y(x)$ 与 $z(x)$ 分别应用米尔恩公式. 计算的阶与前面一样.

例 1　设有微分方程 $y' = y - x$, 其初始条件为 $y(0) = 1.5$. 试联合使用龙格 - 库塔法和米尔恩法, 计算当自变量的值 $x = 1.5$ 时此方程的解值, 精确到 0.01.

解　由条件 $h^4 < 0.01$, 我们选取初始计算步长 h. 为避免 h 的复杂写法, 就取 $h = 0.25$. 这样, 我们用点 $x_i\,(i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ 把从 $x = 0$ 到 $x = 1.5$ 的整个积分区间分成六个相等部分, 每部分长 0.25. 解 y 及其导数 y' 在点 x_i 处的相应值用 y_i 与 y'_i 表示.

我们按龙格 - 库塔法 (按公式 (3)) 计算前三个值 (不包括初始值), 剩下的三个值 y_4, y_5, y_6 按米尔恩法 (按公式 (5)) 计算.

显然, y_6 的值是问题的答案.

按照由两列表格 1 与 2 组成的确定的格式, 带有两位备用数字进行计算. 我们在表格 2 的最后得到答案.

值 y_1 的计算. 这里

$$f(x, y) = -x + y, x_0 = 0, y_0 = 1.5, h = 0.25.$$

我们有

$$\begin{aligned}
\Delta y_0 &= \frac{1}{6}(k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)}) \\
&= \frac{1}{6}(0.3750 + 2 \times 0.3906 + 2 \times 0.3926 + 0.4106) = 0.3920; \\
k_1^{(0)} &= f(x_0, y_0)h = (-0 + 1.5000)0.25 = 0.3750; \\
k_2^{(0)} &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}\right)h \\
&= (-0.125 + 1.5000 + 0.1875)0.25 = 0.3906; \\
k_3^{(0)} &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}\right)h, \\
&= (-0.125 + 1.5000 + 0.1953)0.25 = 0.3926; \\
k_4^{(0)} &= f(x_0 + h, y_0 + k_3^{(0)})h, \\
&= (-0.125 + 1.5000 + 0.3926)0.25 = 0.4106;
\end{aligned}$$

$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1.5000 + 0.3920 = 1.8920$ (在这个近似数中, 前三位数字是有效的).

类似地, 可算出值 y_2 与 y_3 . 计算的结果列成表 1.

表 1　按龙格 – 库塔法计算 y_1, y_2, y_3

$f(x,y)=-x+y;\quad h=0.25$

i 值	x_i	y_i	$y'_i \equiv f(x_i,y_i)$	$h_1^{(i)}$	$f\left(x_i+\frac{h}{2}, y_i+\frac{k_1^{(i)}}{2}\right)$	$k_2^{(i)}$
0	0	1.5000	1.5000	0.3750	1.5625	0.3906
1	0.25	1.8920	1.6420	0.4105	1.7223	0.4306
2	0.50	2.3243	1.8243	0.4561	1.9273	0.4818
3	0.75	2.8084	2.0584	0.5146	2.1907	0.5477

i 值	$f\left(x_i+\frac{h}{2}, y_i+\frac{k_1^{(i)}}{2}\right)$	$k_3^{(i)}$	$f(x_i+h, y_i+k_3^{(i)})$	$k_4^{(i)}$	Δy_i	y_{i+1}
0	1.5703	0.3926	1.6426	0.4106	0.3920	1.8920
1	1.7323	0.4331	1.8251	0.4562	0.4323	2.3243
2	1.9402	0.4850	2.0593	0.5148	0.4841	2.8084
3	2.2073	0.5518	2.3602	0.5900	0.5506	3.3590

值 y_4 的计算. 我们有 $f(x,y)=-x+y; h=0.25, x_4=1;$

$$y_0=1.5000, y_1=1.8920, y_2=2.3243, y_3=2.8084;$$

$$y'_0=1.5000, y'_1=1.6420, y'_2=1.8243, y'_3=2.0584.$$

应用公式 (5), 我们求得

$$\bar{y}_4=y_0+\frac{3h}{4}(2y'_1-y'_2+2y'_3)$$
$$=1.5000+\frac{4\times 0.25}{3}(2\times 1.6420-1.8243+2\times 2.0584)=3.3588;$$
$$\bar{y}'_4=f(x_4,\bar{y}_4)=-1+3.3588=2.3588;$$
$$\bar{\bar{y}}_4=y_2+\frac{h}{3}(\bar{y}'_4+4y'_3+y'_2)$$
$$=2.3243+\frac{0.25}{3}(2.3588+4\times 2.0584+1.8243)=3.3590;$$
$$\varepsilon_4=\frac{|\bar{y}_4-\bar{\bar{y}}_4|}{29}=\frac{|3.3588-3.3590|}{29}=\frac{0.0002}{29}$$
$$\approx 7\times 10^{-6}<\frac{1}{2}\times 0.001;$$

因此, 不需修改计算步长.

我们得到 $y_4=\bar{\bar{y}}_4=3.3590$ (在这个近似数中, 前三位数字是有效的).

类似地, 可以计算 y_5 与 y_6 的值. 计算结果在表 2 中给出.

于是, 最后我们有

$$y(1.5)=4.74.$$

表 2　按米尔恩法计算 y_4, y_5, y_6

$f(x,y) = -x + y;\quad h = 0.25$

(原始数据用斜体字表示)

i 值	x_i	y_i	$y_i' = f(x_i, y_i)$	$\bar{y}_i$	$\bar{y}_i' = f(x_i, \bar{y}_i)$	$\bar{\bar{y}}_i'$	ε_i	y_i	$y_i' = f(x_i, y_i)$	计算步长的修改(根据公式 (6) 表明的情况)
0	*0*	*1.5000*	*1.5000*							
1	*0.25*	*1.8920*	*1.6420*							
2	*0.50*	*2.3243*	*1.8243*							
3	*0.75*	*2.8084*	*2.0584*							
4	1.00			3.3588	2.3588	3.3590	$\approx 7 \times 10^{-5}$	3.3590	2.3590	不需要
5	1.25			3.9947	2.7447	3.9950	$\approx 10^{-5}$	3.9950	2.7450	不需要
6	1.50			4.7402	3.2402	4.7406	$\approx 1.4 \times 10^{-5}$	4.7406		不需要
							答案	$y(1.5) = 4.74$		

4°. **亚当斯 (Adams) 法**. 为了按照亚当斯法求解问题 (1), 根据初始条件 $y(x_0) = y_0$, 我们先用任意一种方法求出未知函数 $y(x)$ 的下面三个值:

$$y_1 = y(x_1) = y(x_0 + h),$$
$$y_2 = y(x_2) = y(x_0 + 2h),$$
$$y_3 = y(x_3) = y(x_0 + 3h)$$

(这三个值可以这样得到, 例如, 利用 $y(x)$ 的幂级数展开 (第九章, 16 节), 或用逐次逼近法 (本节第 1° 段) 来求, 或用龙格–库塔法 (本节第 2° 段) 等).

我们用数 x_0, x_1, x_2, x_3 与 y_0, y_1, y_2, y_3 来计算量 q_0, q_1, q_2, q_3, 其中

$$q_0 = hy_0' = hf(x_0, y_0),\quad q_1 = hy_1' = hf(x_1, y_1),$$
$$q_2 = hy_2' = hf(x_2, y_2),\quad q_3 = hy_3' = hf(x_3, y_3).$$

我们进一步构造量 q 的有限差对角表格:

x	y	$\Delta y = y_{n+1} - y_n$	$y_i' = f(x,y)$	$q = y'h$	$\Delta q = q_{n+1} - q_n$	$\Delta^2 q = \Delta q_{n+1} - \Delta q_n$	$\Delta^3 q = \Delta^2 q_{n+1} - \Delta^2 q_n$
x_0	y_0	Δy_0	$f(x_0, y_0)$	q_0	Δq_0	$\Delta^2 q_0$	$\Delta^3 q_0$
x_1	y_1	Δy_1	$f(x_1, y_1)$	q_1	Δq_1	$\Delta^2 q_1$	$\Delta^3 q_1$
x_2	y_2	Δy_2	$f(x_2, y_2)$	q_2	Δq_2	$\Delta^2 q_2$	$\Delta^3 q_2$
x_3	y_3	Δy_3	$f(x_3, y_3)$	q_3	Δq_3	$\Delta^2 q_3$	
x_4	y_4	Δy_4	$f(x_4, y_4)$	q_4	Δq_4		
x_5	y_5	Δy_5	$f(x_5, y_5)$	q_5			
x_6	y_6						

亚当斯法就是在有限差表格的对角线上应用亚当斯公式

$$\Delta y_n = q_n + \frac{1}{2}\Delta q_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{n-3}. \tag{7}$$

这样, 由分布在有限差表格对角线上的数 $q_3, \Delta q_2, \Delta^2 q_1, \Delta^3 q_0$, 我们利用公式 (7), 并设其中 $n = 3$, 可计算出

$$\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2}\Delta q_2 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_1 + \frac{3}{8}\Delta^3 q_0.$$

求出值 Δy_3 后, 我们计算

$$y_4 = y_3 + \Delta y_3.$$

知道了 x_4 与 y_4 再计算

$$q_4 = hf(x_4, y_4),$$

把 $y_4, \Delta y_3$ 和 q_4 列入有限差表格, 随后在表中增添有限差 $\Delta q_3, \Delta^2 q_2, \Delta^3 q_1$, 使得它们和 q_4 一起分布在与前面对角线平行的新对角线上.

然后, 由新对角线上的数, 利用公式 (7), 并设其中的 $n = 4$, 计算出 $\Delta y_4, y_5$ 与 q_5, 从而得到下面的对角线 $q_5, \Delta q_4, \Delta^2 q_3, \Delta^3 q_2$. 由这条对角线上的数, 可以计算未知解 $y(x)$ 的值 y_6, 等等.

用亚当斯公式 (7) 计算 Δy, 可假设第三阶有限差 $\Delta^3 q$ 是常数. 与此对应, 初始计算步长 h 的数值可由不等式 $h^4 < 10^{-m}$ 确定 (如果我们希望求得精确到 10^{-m} 的 $y(x)$ 值).

在这种意义下, 亚当斯公式 (7) 与米尔恩公式 (5) 和龙格–库塔公式 (3) 等价.

亚当斯法的误差估计是复杂的, 实际上进行估计也是无益的, 因为在一般情况下误差估计会给出过高结果. 在实际计算中应当注意三阶有限差的变化进程, 选取步长 h 足够小, 使得相邻的有限差 $\Delta^3 q_i$ 与 $\Delta^3 q_{i+1}$ 之间的差不大于给定数位上的一至二个单位 (不计备用数字).

为了提高亚当斯公式结果的精确度, 可以增添包含量 q 的第四阶有限差或更高阶有限差的项. 这时对于原先填写的表格, 需要增加函数 y 的初始值的个数. 我们不打算在此引进精度更高的亚当斯公式.

例 2 设有微分方程 $y' = y - x$, 初始条件为 $y(0) = 1.5$. 试联合使用龙格 – 库塔法和亚当斯法计算此方程的解当 $x = 1.5$ 时的值, 精确到 0.01 (参阅例 1).

解 我们利用解例 1 时得到的值 y_1, y_2, y_3, 它们的计算已在表 1 中引进.

随后的值 y_4, y_5, y_6, 我们按照亚当斯法进行计算 (参阅表 3 与表 4)

表 3 按亚当斯法计算 y_4, y_5, y_6 的基本表格

$f(x,y) = -x + y, \quad h = 0.25$

(原始数据用斜体字表示)

i 值	x_i	y_i	Δy_i	$y'_i = f(x_i, y_i)$	$q_i = y'_i h$	Δq_i	$\Delta^2 q_i$	$\Delta^3 q_i$
0	*0*	*1.5000*		*1.5000*	0.3750	0.0355	0.0101	0.0028

续表

i 值	x_i	y_i	Δy_i	$y_i'=f(x_i,y_i)$	$q_i=y_i'h$	Δq_i	$\Delta^2 q_i$	$\Delta^3 q_i$
1	*0.25*	*1.8920*		*1.6420*	0.4105	0.0456	0.0129	0.0037
2	*0.50*	*2.3243*		*1.8243*	0.4561	0.0585	0.0166	0.0047
3	*0.75*	*2.8084*	0.5504	2.0584	0.5146	0.0751	0.0213	
4	1.00	3.3588	0.6356	2.3588	0.5897	0.0964		
5	1.25	3.9944	0.7450	2.7444	0.6861			
6	1.50	4.7394						

答案: 4.74

表 4 按亚当斯法计算的辅助表

$$\Delta y_i = q_i + \frac{1}{2}\Delta q_{i-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{i-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{i-3}$$

i 值	q_i	$\frac{1}{2}\Delta q_{i-1}$	$\frac{5}{12}\Delta^2 q_{i-2}$	$\frac{3}{8}\Delta^3 q_{i-3}$	Δy_i
3	0.5146	0.0293	0.0054	0.0011	0.5504
4	0.5897	0.0376	0.0069	0.0014	0.6356
5	0.6861	0.0482	0.0089	0.0018	0.7450

值 $y_6 = 4.74$ 就是问题的答案.

在解方程组 (4) 时, 对两个函数 $y(x)$ 与 $z(x)$ 分别应用亚当斯公式 (7) 和表 3 所示的计算格式.

求出下列微分方程和微分方程组初值问题的三个逐次近似解:

3176. $y' = x^2 + y^2;\quad y(0) = 0.$

3177. $y' = x + y + z, z' = y - z;\quad y(0) = 1, z(0) = -2.$

3178. $y'' = -y;\quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$

设步长 $h = 0.2$, 用龙格 - 库塔法近似计算下列给定微分方程和微分方程组的解在指定区间右端点处的值:

3179. $y' = y - x; y(0) = 1.5\quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$

3180. $y' = \dfrac{y}{x} - y^2; y(1) = 1\quad (1 \leqslant x \leqslant 2).$

3181. $y' = z + 1, z' = y - x;\quad y(0) = 1, z(0) = 1\quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$

联合使用龙格 - 库塔法和米尔恩法, 或龙格 - 库塔法和亚当斯法, 计算下列微分方程和微分方程组的特解当自变量取指定值时的值, 精确到 0.01.

3182. $y' = x + y$; 当 $x = 0$ 时 $y = 1$. 计算当 $x = 0.5$ 时 y 的值.

3183. $y' = x^2 + y$; 当 $x = 0$ 时 $y = 1$. 计算当 $x = 1$ 时 y 的值.

3184. $y' = 2y - 3$; 当 $x = 0$ 时 $y = 1$. 计算当 $x = 0.5$ 时 y 的值.

3185. $\begin{cases} y' = -x + 2y + z, \\ z' = x + 2y + 3z; \text{ 当 } x = 0 \text{ 时}, y = 2, z = -2. \end{cases}$

计算当 $x = 0.5$ 时 y 与 z 的值.

3186. $\begin{cases} y' = -3y - z, \\ z' = y - z; \text{ 当 } x = 0 \text{ 时}, y = 2, z = -1. \end{cases}$

计算当 $x = 0.5$ 时 y 与 z 的值.

3187. $y'' = 2 - y$; 当 $x = 0$ 时, $y = 2, y' = -1$. 计算当 $x = 1$ 时 y 的值.

3188. $y^3 y'' + 1 = 0$; 当 $x = 1$ 时, $y = 1, y' = 0$. 计算当 $x = 1.5$ 时 y 的值.

3189. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{x}{2}\cos 2t = 0$; 当 $t = 0$ 时, $x = 0, x' = 1$. 求 $x(\pi), x'(\pi)$.

§6. 傅里叶系数的近似计算法

12 纵坐标格式. 设 $y_n = f(x_n)\,(n = 0, 1, \cdots, 12)$ 是函数 $y = f(x)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的等距离点 $x_n = \dfrac{\pi n}{6}$ 处的值, 而且 $y_0 = y_{12}$. 我们构造表格:

	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
		y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7	
和 (Σ)	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
差 (Δ)		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	

	u_0	u_1	u_2	u_3
	u_6	u_7	u_8	
和	s_0	s_1	s_2	s_3
差	t_0	t_1	t_2	

	v_1	v_2	v_3
	v_5	v_4	
和	σ_1	σ_2	σ_3
差	τ_1	τ_2	

函数 $y = f(x)$ 的傅里叶系数 $a_n, b_n\,(n = 0, 1, 2, 3)$ 可按下面公式近似地确定:

$$\begin{aligned} &6a_0 = s_0 + s_1 + s_2 + s_3, && 6b_1 = 0.5\sigma_1 + 0.866\sigma_2 + \sigma_3, \\ &6a_1 = t_0 + 0.866t_1 + 0.5t_2, && 6b_2 = 0.866(\tau_1 + \tau_2), \\ &6a_2 = s_0 - s_3 + 0.5(s_1 - s_2), && 6b_3 = \sigma_1 - \sigma_3, \\ &6a_3 = t_0 - t_2, \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $0.866 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 1 - \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{30}$.

我们有

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{3}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

也常用其他的格式. 为了简化计算, 可利用一套定型公式 (例如, 参阅斯米尔诺夫, 高等数学教程, 1962 年版, 第二卷第六章, 424—430 页).

例 求出由下表

y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}
38	38	12	4	14	4	−18	−23	−27	−24	8	32

给定的函数 $y = f(x)\,(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$ 的傅里叶多项式.

解 构造表格

$$\begin{array}{c|ccccccc} y & 38 & 38 & 12 & 4 & 14 & 4 & -18 \\ & & 32 & 8 & -24 & -27 & -23 & \\ \hline u & 38 & 70 & 20 & -20 & -13 & -19 & -18 \\ v & & 6 & 4 & 28 & 41 & 27 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} u & 38 & 70 & 20 & -20 \\ & -18 & -19 & -13 & \\ \hline s & 20 & 51 & 7 & -20 \\ t & 56 & 89 & 33 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} v & 6 & 4 & 28 \\ & 27 & 41 & \\ \hline \sigma & 33 & 45 & 28 \\ \tau & -21 & -37 & \end{array}$$

按公式 (1) 有

$$a_0 = 9.7, \quad a_1 = 24.9, \quad a_2 = 10.3, \quad a_3 = 3.8,$$
$$b_1 = 13.9, \quad b_2 = -8.4, \quad b_3 = 0.8.$$

因此

$$f(x) \approx 4.8 + (24.9\cos x + 13.9\sin x) + (10.3\cos 2x - 8.4\sin 2x)$$
$$+(3.8\cos 3x + 0.8\sin 3x).$$

利用 12 纵坐标格式, 求出下列函数的傅里叶多项式, 这些函数在区间 $[0, 2\pi]$ 上由自已的一组与自变量等距离值相对应的函数值所给定 $(y_0 = y_{12})$:

3190.

$y_0 = -7200$ $y_1 = 300$ $y_2 = 700$ $y_3 = 4300$
$y_4 = 0$ $y_5 = -5200$ $y_6 = 7400$ $y_7 = -2250$
$y_8 = 3850$ $y_9 = 7600$ $y_{10} = 4500$ $y_{11} = 250$

3191.

$y_0 = 0$ $y_1 = 6.68$ $y_2 = 9.68$ $y_3 = 9.72$
$y_4 = 8.97$ $y_5 = 8.18$ $y_6 = 7.42$ $y_7 = 6.81$
$y_8 = 6.22$ $y_9 = 5.60$ $y_{10} = 4.88$ $y_{11} = 3.67$

3192.

$y_0 = 2.714$ $y_1 = 3.042$ $y_2 = 2.134$ $y_3 = 1.273$
$y_4 = 0.788$ $y_5 = 0.495$ $y_6 = 0.370$ $y_7 = 0.540$
$y_8 = 0.191$ $y_9 = -0.357$ $y_{10} = -0.437$ $y_{11} = 0.767$

3193. 按 12 纵坐标格式, 计算下列函数的前几个傅里叶系数:

a) $f(x) = \frac{1}{2\pi^2}(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$;

b) $f(x) = \frac{1}{\pi^2}(x - \pi)^2 \quad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

答案. 解法. 提示

第一章

1. 因为 $a=(a-b)+b$, 所以 $|a|\leqslant|a-b|+|b|$. 由此得出 $|a-b|\geqslant|a|-|b|$ 和 $|a-b|=|b-a|\geqslant|b|-|a|$. 从而, $|a-b|\geqslant||a|-|b||$. 此外, $|a-b|=|a+(-b)|\leqslant|a|+|-b|=|a|+|b|$. **3**. a) $-2<x<4$; b) $x<-3, x>1$; c) $-1<x<0$; d) $x>0$. **4**. $-24,-6,0,0,0,6$. **5**. $1, 1\frac{1}{4}, \sqrt{1+x^2}, |x|^{-1}\sqrt{1+x^2}, 1/\sqrt{1+x^2}$. **6**. $\pi, \frac{\pi}{2}, 0$. **7**. $f(x)=-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}$. **8**. $f(x)=\frac{7}{6}x^2-\frac{13}{6}+1$. **9**. 0.4. **10**. $\frac{1}{2}(x+|x|)$. **11**. a) $-1\leqslant x<+\infty$; b) $-\infty<x<+\infty$. **12**. $(-\infty,-2),(-2,2),(2,+\infty)$. **13**. a) $-\infty<x\leqslant-\sqrt{2}, \sqrt{2}\leqslant x<+\infty$; b) $x=0, |x|\geqslant\sqrt{2}$. **14**. $-1\leqslant x\leqslant 2$. 应该有 $2+x-x^2\geqslant 0$, 或者 $x^2-x-2\leqslant 0$, 亦即 $(x+1)(x-2)\leqslant 0$. 由此得出: 或者 $x+1\geqslant 0, x-2\leqslant 0$, 亦即 $-1\leqslant x\leqslant 2$; 或者 $x+1\leqslant 0, x-2\geqslant 0$, 亦即 $x\leqslant -1, x\geqslant 2$, 而这是不可能的. 因此 $-1\leqslant x\leqslant 2$. **15**. $-2<x\leqslant 0$. **16**. $-\infty<x\leqslant-1, 0\leqslant x\leqslant 1$. **17**. $-2<x<2$. **18**. $-1<x<1, 2<x<+\infty$. **19**. $-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1$. **20**. $1\leqslant x\leqslant 100$. **21**. $k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. **22**. $\varphi(x)=2x^4-5x^2-10, \psi(x)=-3x^3+6x$. **23**. 1) 偶; 2) 奇; 3) 偶; 4) 奇; 5) 奇. **24**. 利用恒等式 $f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$. **26**. a) 周期的, $T=\frac{2}{3}\pi$; b) 周期的, $T=\frac{2\pi}{\lambda}$; c) 周期的, $T=\pi$; d) 周期的, $T=\pi$; e) 非周期的. **27**. 如果 $0\leqslant x\leqslant c$, 则有 $y=\frac{b}{c}x, S=\frac{b}{2c}x^2$; 如果 $c<x\leqslant a$, 则有 $y=b, S=bx-\frac{bc}{2}$. **28**. 当 $0\leqslant x\leqslant l_1$ 时有 $m=q_1x$; 当 $l_1<x\leqslant l_1+l_2$ 时有 $m=q_1l_1+q_2(x-l_1)$; 当 $l_1+l_2<x\leqslant l_1+l_2+l_3=l$ 时有 $m=q_1l_1+q_2l_2+q_3(x-l_1-l_2)$. **29**. $\varphi(\psi(x))=2^{2x}, \psi(\varphi(x))=2^{x^2}$. **30**. x. **31**. $(x+2)^2$. **37**. $-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{4}$. **38**. a) 当 $x=-1$ 时 $y=0$, 当 $x>-1$ 时 $y>0$, 当 $x<-1$ 时 $y<0$; b) 当 $x=-1$ 和 $x=2$ 时 $y=0$, 当 $-1<x<2$ 时 $y>0$, 当 $-\infty<x<-1$ 和 $2<x<+\infty$ 时 $y<0$; c) 当 $-\infty<x<+\infty$ 时 $y>0$; d) 当 $x=0$, $x=-\sqrt{3}$ 和 $x=\sqrt{3}$ 时 $y=0$, 当 $-\sqrt{3}<x<0$ 和 $\sqrt{3}<x<+\infty$ 时 $y>0$, 当 $-\infty<x<-\sqrt{3}$ 和 $0<x<\sqrt{3}$ 时 $y<0$, e) $x=1$ 时 $y=0$, 当 $-\infty<x<-1$ 和 $1<x<+\infty$ 时 $y>0$, 当 $0<x<1$ 时 $y<0$. **39**. a) $x=\frac{1}{2}(y-3)$ $(-\infty<y<+\infty)$; b) $x=\sqrt{y+1}$ 和 $x=-\sqrt{y+1}$ $(-1\leqslant y<+\infty)$; c) $x=\sqrt[3]{1-y^3}$ $(-\infty<y<+\infty)$; d) $x=$

2×10^y $(-\infty < y < +\infty)$; e) $x = \frac{1}{3}\tan y$ $(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$. **40**. 当 $-\infty < y \leqslant 0$ 时 $x = y$; 当 $0 < y < +\infty$ 时 $x = \sqrt{y}$. **41**. a) $y = u^{10}$, $u = 2x - 5$; b) $y = 2^u$, $u = \cos x$; c) $y = \lg u, u = \tan v, v = \frac{x}{2}$; d) $y = \arcsin u$, $u = 3^v$, $v = -x^2$; **42**. a) $y = \sin^2 x$; b) $y = \arctan\sqrt{\lg x}$; c) 如果 $|x| \leqslant 1$ 则有 $y = 2(x^2-1)$; 而如果 $|x| > 1$ 则有 $y = 0$. **43**. a) $y = -\cos x^2, \sqrt{\pi} \leqslant |x| \leqslant \sqrt{2\pi}$; b) $y = \lg(10 - 10^x), -\infty < x < 1$; c) 当 $-\infty < x < 0$ 时 $y = \frac{x}{3}$ 以及当 $0 \leqslant x < +\infty$ 时 $y = x$. **46**. 参看附录 VI 中的图 1. **51**. 将二次三项式配成完全平方, 我们有 $y = y_0 + a(a - x_0)^2$, 其中 $x_0 = -\frac{b}{2a}$ 和 $y_0 = (4ac - b^2)/4a$. 由此得出, 所求图形为抛物线 $y = ax^2$ 沿 OX 轴移动 x_0 和沿 OY 轴移动 y_0. **53**. 参看附录 VI 中的图 2. **58**. 参看附录 VI 中的图 3. **61**. 图形是双曲线 $y = \frac{m}{x}$ 沿 OX 轴移动 x_0, 沿 OY 轴移动 y_0. **62**. 分出整式部分后, 我们有 $y = \frac{2}{3} - \frac{13}{9}/(x + \frac{2}{3})$ (参看第 61 题). **65**. 参看附录 VI, 图 4. **67**. 参看附录 VI, 图 5. **71**. 参看附录 VI, 图 6. **72**. 参看附录 VI, 图 7. **73**. 参看附录 VI, 图 8. **75**. 参看附录 VI, 图 19. **78**. 参看附录 VI, 图 23. **80**. 参看附录 VI, 图 9. **81**. 参看附录 VI, 图 9. **82**. 参看附录 VI, 图 10. **83**. 参看附录 VI, 图 10. **84**. 参看附录 VI, 图 11. **85**. 参看附录 VI, 图 11. **87**. 函数的周期 $T = \frac{2\pi}{n}$. **89**. 所求图形是振幅为 5、周期为 π 的正弦曲线 $y = 5\sin 2x$ 沿 OX 轴向右移动 $1\frac{1}{2}$. **90**. 令 $a = A\cos\varphi$ 和 $b = -A\sin\varphi$, 有 $y = A\sin(x - \varphi)$, 其中 $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ 和 $\varphi = \arctan(-\frac{b}{a})$. 在现在情况下 $A = 10, \varphi = 0.927$. **92**. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$. **93**. 所求图形为图形 $y_1 = x$ 与 $y_2 = \sin x$ 的叠加. **94**. 所求图形为图形 $y_1 = x$ 与 $y_2 = \sin x$ 的乘积. **99**. 这是偶函数. 因此对于 $x > 0$ 可确定对应于 1) $y = 0$, 2) $y = 1$ 和 3) $y = -1$ 的点. 当 $x \to +\infty$ 时 $y \to 1$. **101**. 参看附录 VI, 图 14. **102**. 参看附录 VI, 图 15. **103**. 参看附录 VI, 图 17. **104**. 参看附录 VI, 图 17. **105**. 参看附录 VI, 图 18. **107**. 参看附录 VI, 图 18. **118**. 参看附录 VI, 图 12. **119**. 参看附录 VI, 图 12. **120**. 参看附录 VI, 图 13. **121**. 参看附录 VI, 图 13. **132**. 参看附录 VI, 图 30. **133**. 参看附录 VI, 图 32. **134**. 参看附录 VI, 图 31. **138**. 参看附录 VI, 图 33. **139**. 参看附录 VI, 图 28. **140**. 参看附录 VI, 图 25. **141**. 构造数值表:

t	0	1	2	3	$\cdots$	-1	-2	-3
x	0	1	8	27	$\cdots$	-1	-8	-27
y	0	1	4	9	$\cdots$	1	4	9

找出所求的点 (x, y) 之后, 即得所求的曲线 (参看附录 VI, 图 7). (这里不考虑参数 t 的几何意义!) **142**. 参看附录 VI, 图 19. **143**. 参看附录 VI, 图 27. **144**. 参看附录 VI, 图 29. **145**. 参看附录 VI, 图 22. **150**. 参看附录 VI, 图 28. **151**. 解出关于 y 的方程之后, 得到 $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. 这时所求图形容易按点作出. **153**. 参看附录 VI, 图 21. **156**. 参看附录 VI, 图 27. 只要作出对应于横坐标为 $x = 0, \pm a/2, \pm a$ 的点 x, y. **157**. 解出关于 x 的方程之后, 我们就有 $x = 10\lg y - y(*)$. 由此得出, 对纵坐标 y 的任意值 $(y > 0)$, 按照公式 $(*)$ 算出横坐标 x , 从而得到所求曲线的点 (x, y). 此外当 $y \to 0$ 时 $\lg y \to -\infty$. **159**. 转换成极坐标 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和 $\tan\varphi = \frac{y}{x}$, 我们有 $r = e^{\varphi}$(参看附录 VI, 图 32). **160**. 转换成极坐标 $x = r\cos\varphi$ 和 $y = r\sin\varphi$, 我们有 $r = \frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}$ (参看附录 VI, 图 32). **161**. $F = 32 + 1.8C$. **162**. $y = 0.6x(10 - x)$, 当 $x = 5$ 时 $y_{\max} = 15$. **163**. $y = \frac{ab}{2}\sin x$; 当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时 $y_{\max} = \frac{ab}{2}$. **164**. a) $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 2$; b) $x = 0.68$; c) $x_1 = 1.37, x_2 = 10$; d) $x =$

0.40; e) $x = 1.50$; f) $x = 0.86$. **165**. a) $x_1 = 2, y_1 = 5; x_2 = 5, y_2 = 2$; b) $x_1 = -3, y_1 = -2; x_2 = -2, y_2 = -3; x_3 = 2, y_3 = 3; x_4 = 3, y_4 = 2$; c) $x_1 = 2, y_1 = 2; x_2 \approx 3.1, y_2 \approx -2.5$; d) $x_1 \approx -3.6, y_1 \approx -3.1; x_2 \approx -2.7, y_2 \approx 2.9; x_3 \approx 2.9, y_3 \approx 1.8; x_4 \approx 3.4, y_4 \approx -1.6$; e) $x_1 = \frac{\pi}{4}, y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}; x_2 = \frac{5\pi}{4}, y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. **166**. $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. a) $n \geqslant 4$; b) $n > 10$; c) $n \geqslant 32$. **167**. $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = N$. a) $N = 9$; b) $N = 99$; c) $N = 999$. **168**. $\delta = \frac{\varepsilon}{5}(\varepsilon < 1)$. a) 0.02; b) 0.002; c) 0.0002. **169**. a) 当 $0 < x < \delta(N)$ 时 $\lg x < -N$; b) 当 $x > X(N)$ 时 $2^x > N$; c) 当 $x > X(N)$ 时 $|f(x)| > N$. **170**. a) 0; b) 1; c) 2; d) $\frac{7}{30}$. **171**. $\frac{1}{2}$. **172**. 1. **173**. $-\frac{3}{2}$. **174**. 1. **175**. 3. **176**. 1. **177**. $\frac{3}{4}$. **178**. $\frac{1}{3}$. 提示: 利用公式 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. **179**. 0. **180**. 0. **181**. 1. **182**. 0. **183**. ∞. **184**. 0. **185**. 72. **186**. 2. **187**. 2. **188**. ∞. **189**. 0. **190**. 1. **191**. 0. **192**. ∞. **193**. -2. **194**. ∞. **195**. $\frac{1}{2}$. **196**. $\frac{a-1}{3a^2}$. **197**. $3x^2$. **198**. -1. **199**. $\frac{1}{2}$. **200**. 3. **201**. $\frac{4}{3}$. **202**. $\frac{1}{9}$. **203**. $-\frac{1}{56}$. **204**. 12. **205**. $\frac{3}{2}$. **206**. $-\frac{1}{3}$. **207**. 1. **208**. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **209**. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. **210**. $-\frac{1}{3}$. **211**. 0. **212**. $\frac{a}{2}$. **213**. $-\frac{5}{2}$. **214**. $\frac{1}{2}$. **215**. 0. **216**. 1) $\frac{1}{2}\sin 2$; 2) 0. **217**. 3. **218**. $\frac{5}{2}$. **219**. $\frac{1}{3}$. **220**. π. **221**. $\frac{1}{2}$. **222**. $\cos a$. **223**. $-\sin a$. **224**. π. **225**. $\cos x$. **226**. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **227**. a) 0; b) 1. **228**. $\frac{2}{\pi}$. **229**. $\frac{1}{2}$. **230**. 0. **231**. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **232**. $\frac{1}{2}(n^2 - m^2)$. **233**. $\frac{1}{2}$. **234**. 1. **235**. $\frac{2}{3}$. **236**. $\frac{2}{\pi}$. **237**. $-\frac{1}{4}$. **238**. π. **239**. $\frac{1}{4}$. **240**. 1. **241**. 1. **242**. $\frac{1}{4}$. **243**. 0. **244**. $\frac{3}{2}$. **245**. 0. **246**. e^{-1}. **247**. e^2. **248**. e^{-1}. **249**. e^{-4}. **250**. e^x. **251**. e. **252**. a) 1. $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}[1-(1-\cos x)]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}(1-2\sin^2\frac{x}{2})^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[(1-2\sin^2\frac{x}{2})^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}}\right]^{-\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\left(-\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}\right)}$. 因为 $\lim_{x\to 0}\left(-\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}\right) = -2\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \cdot \frac{x^2}{4x}\right] = -2\cdot 1\cdot \lim_{x\to 0}\frac{x}{4} = 0$, 所以 $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$; b) $\frac{1}{\sqrt{e}}$. 类似于上面有 $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}\left(-\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\right)}$. 因为 $\lim_{x\to 0}\left(-\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\right) = -2\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \cdot \frac{x^2}{4x^2}\right] = -\frac{1}{2}$, 故有 $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$. **253**. $\ln 2$. **254**. $10\lg 2$. **255**. 1. **256**. 1. **257**. $-\frac{1}{2}$. **258**. 1. 令 $e^x - 1 = \alpha$, 这里 $\alpha \to 0$. **259**. $\ln a$. 利用恒等式 $a = e^{\ln a}$. **260**. $\ln a$. 令 $\frac{1}{n} = \alpha$, 其中 $\alpha \to 0$ (参看第 259 题). **261**. $a - b$. **262**. 1. **263**. a) 1; b) $\frac{1}{2}$. **264**. a) -1; b) 1. **265**. a) -1; b) 1. **266**. a) 1; b) 0. **267**. a) 0; b) 1. **268**. a) -1; b) 1. **269**. a) -1; b) 1. **270**. a) $-\infty$; b) $+\infty$. **271**. 如果 $x \neq k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$, 那么 $\cos^2 x < 1$ 和 $y = 0$; 若 $x = k\pi$, 则有 $\cos^2 x = 1$ 和 $y = 1$. **272**. 当 $0 \leqslant x < 1$ 时 $y = x$; 当 $x = 1$ 时 $y = \frac{1}{2}$; 当 $x > 1$ 时 $y = 0$. **273**. $y = |x|$. **274**. 当 $x < 0$ 时 $y = -\frac{\pi}{2}$; 当 $x = 0$ 时 $y = 0$; 当 $x > 0$ 时 $y = \frac{\pi}{2}$. **275**. 当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时 $y = 1$; 当 $1 < x < +\infty$ 时 $y = x$. **276**. $\frac{61}{450}$. **277**. $x_1 \to -\frac{c}{b}, x_2 \to \infty$. **278**. π. **279**. $2\pi R$. **280**. $\frac{e}{e-1}$. **281**. $1\frac{1}{3}$. **282**. $\frac{\sqrt{e^\pi+1}}{e^{\frac{\pi}{2}}-1}$. **284**. $\lim_{n\to\infty} AC_n = \frac{l}{3}$. **285**. $\frac{ab}{2}$. **286**. $k = 1, b = 0$; 直线 $y = x$ 是曲线 $y = \frac{x^3+1}{x^2+1}$ 的渐近线. **287**. $Q_t^{(n)} = Q_0(1 + \frac{kt}{n})^n$, 其中 k 为比例系数 ("复利率"), $Q_t = Q_0 e^{kt}$. **288**. $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$. a) $|x| > 10$; b) $|x| > 100$; c) $|x| > 1000$. **289**. 当 $0 < \varepsilon < 1$ 时 $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$. a) $|x-1| < 0.05$; b) $|x-1| < 0.005$; c) $|x-1| < 0.0005$; **290**. $|x-2| < \frac{1}{N} = \delta$. a) $\delta = 0.1$; b) $\delta = 0.01$; c) $\delta = 0.001$. **291**. a) 二阶; b) 三阶. $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$. **292**. a) 1; b) 2; c) 3. **293**. a) 1; b) $\frac{1}{4}$; c) $\frac{2}{3}$; d) 2; e) 3. **295**. 不等价. **296**. 15. **297**. -1. **298**. -1. **299**. 3.

300. a) 1.03 (1.0296); b) 0.985 (0.9849); c) 3.167 (3.1623), $\sqrt{10}=\sqrt{9+1}=3\sqrt{1+\frac{1}{9}}$; d) 10.954 (10.954). **301**. 1) 0.98 (0.9804); 2) 1.03 (1.0309); 3) 0.0095 (0.00952); 4) 3.875 (3.8730); 5) 1.12 (1.125); 6) 0.72 (0.7480); 7) 0.043 (0.04139) **303**. a) 2; b) 4; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{2}{3}$. **307**. 如果 $x>0$, 则当 $|\Delta x|<x$ 时有 $|\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}|=|\Delta x|/(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})\leqslant|\Delta x|/\sqrt{x}$. **309**. 利用不等式 $|\cos(x+\Delta x)-\cos x|\leqslant|\Delta x|$. **310**. a) $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, 其中 k 为常数; b) $x\neq k\pi$, 其中 k 为常数. **311**. 利用不等式 $||x+\Delta x|-|x||\leqslant|\Delta x|$. **313**. $A=4$. **314**. $f(0)=1$. **315**. 不可能. **316**. a) $f(0)=n$; b) $f(0)=\frac{1}{2}$; c) $f(0)=2$; d) $f(0)=2$; e) $f(0)=0$; f) $f(0)=1$. **317**. $x=2$ 为第二类间断点. **318**. $x=-1$ 为可去间断点. **319**. $x=-2$ 为第二类间断点; $x=2$ 为可去间断点. **320**. $x=0$ 为第一类间断点. **321**. a) $x=0$ 为第二类间断点; b) $x=0$ 为可去间断点. **322**. $x=0$ 为可去间断点, $x=k\pi$ $(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为无穷间断点. **323**. $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为无穷间断点. **324**. $x=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为无穷间断点. **325**. $x=0$ 为第一类间断点. **326**. $x=-1$ 为可去间断点, $x=1$ 为第一类间断点. **327**. $x=-1$ 为第二类间断点. **328**. $x=0$ 为可去间断点. **329**. $x=1$ 为第一类间断点. **330**. $x=3$ 为第一类间断点. **332**. $x=1$ 为第一类间断点. **333**. 连续函数. **334**. a) $x=0$ 为第一类间断点; b) 连续函数; c) $x=k\pi$ (k 为整数) 为第一类间断点. **335**. a) $x=k$ (k 为整数) 为第一类间断点; b) $x=k$ (k 为不等于零的整数) 为第一类间断点. **337**. 不可能, 因为函数 $y=E(x)$ 当 $x=1$ 时间断. **338**. 1.53. **339**. 证明: 当 x_0 充分大时有 $P(-x_0)P(x_0)<0$.

第二章

341. a) 3; b) 0.21; c) $2h+h^2$. **342**. a) 0.1; b) -3; c) $\sqrt[3]{a+h}-\sqrt[3]{a}$. **344**. a) 624, 1560; b) 0.01,100; c) $-1, 0.000011$. **345**. a) $a\Delta x, a$, b) $3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3, 3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2$; c) $-\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{x^2(x+\Delta x)^2}, -\frac{2x+\Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2}$; d) $\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}, \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$; e) $2^x(2^{\Delta x}-1), \frac{2^x(2^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$; f) $\ln\frac{x+\Delta x}{x}, \frac{1}{\Delta x}\ln(1+\frac{\Delta x}{x})$. **346**. a) -1; b) 0.1; c) $-h$, 0. **347**. 21. **348**. 15 cm/s. **349**. 7. **350**. $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. **351**. $f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. **352**. a) $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$; b) $\frac{d\varphi}{dt}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, 这里 φ 为在时刻 t 的转角. **353**. a) $\frac{\Delta T}{\Delta t}$; b) $\frac{dT}{dt}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta T}{\Delta t}$, 这里 T 为在时刻 t 的温度. **354**. $\frac{dQ}{dt}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}$, 这里 Q 为在时刻 t 的物质数量. **355**. a) $\frac{\Delta m}{\Delta x}$; b) $\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta m}{6\Delta x}$. **356**. a) $-\frac{1}{6}\approx-0.16$; b) $-\frac{5}{21}\approx-0.238$; c) $-\frac{50}{201}\approx-0.249, y'_{x=2}=-0.25$. **357**. $\sec^2 x.y'=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\tan(x+\Delta x)-\tan x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x\cos x\cos(x+\Delta x)}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to0}\frac{1}{\cos x\cos(x+\Delta x)}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$. **358**. a) $3x^2$; b) $-\frac{2}{x^3}$; c) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; d) $\frac{-1}{\sin^2 x}$. **359**. $\frac{1}{12}$. $f'(8)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(8+\Delta x)-f(8)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\sqrt[3]{8+\Delta x}-\sqrt[3]{8}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{8+\Delta x-8}{\Delta x[\sqrt[3]{(8+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{(8+\Delta x)8}+\sqrt[3]{8^2}]}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{1}{\sqrt[3]{(8+\Delta x)^2}+2\sqrt[3]{(8+\Delta x)}+4}=\frac{1}{12}$. **360**. $f'(0)=-8, f'(1)=0, f'(2)=0$. **361**. $x_1=0, x_2=3$. 对于给定函数, 方程 $f'(x)=f(x)$ 具有形式 $3x^2=x^3$. **362**. 30 m/s. **363**. 1, 2. **364**. -1. **365**. $f'(x_0)=\frac{-1}{x_0^2}$. **366**. $-1, 2, \tan\varphi=3$. 利用例 3 和第 365 题的结果. **367**. a) $f'(0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}=\infty$; b) $f'(1)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\sqrt[5]{1+\Delta x-1}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{1}{\sqrt[5]{(\Delta x)^4}}=+\infty$; c) $f'_-\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\left|\cos\left(\frac{2k+1}{2}\pi+\Delta x\right)\right|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{|\sin\Delta x|}{\Delta x}=-1, f'_+\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{|\sin\Delta x|}{\Delta x}=1$. **368**. $5x^4-12x^2+2$.

369. $-\frac{1}{3}+2x-2x^3$. **370.** $2ax+b$. **371.** $-\frac{15x^2}{a}$. **372.** $mat^{m-1}+b(m+n)t^{m+n-1}$.
373. $\frac{6ax^5}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **374.** $-\frac{\pi}{x^2}$. **375.** $2x^{-\frac{1}{3}}-5x^{\frac{3}{2}}-3x^{-4}$. **376.** $\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}$. 提示: $y=x^2x^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{8}{3}}$.
377. $\frac{4b}{3x^2\sqrt[3]{x}}=-\frac{2a}{3x\sqrt[3]{x^2}}$. **378.** $\frac{bc-ad}{(c+dx)^2}$. **379.** $\frac{-2x^2-6x+25}{(x^2-5x+5)^2}$. **380.** $\frac{1-4x}{x^2(2x-1)^2}$.
381. $\frac{1}{\sqrt{z}(1-\sqrt{z})^2}$. **382.** $5\cos x-3\sin x$. **383.** $\frac{4}{\sin^2 2x}$. **384.** $\frac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}$.
385. $t^2\sin t$. **386.** $y'=0$. **387.** $\cot x-\frac{x}{\sin^2 x}$. **388.** $\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
389. $x\arctan x$. **390.** $x^6e^x(x+7)$. **391.** xe^x. **392.** $e^x\frac{x-2}{x^3}$. **393.** $\frac{5x^4-x^5}{e^x}$.
394. $e^x(\cos x-\sin x)$. **395.** x^2e^x. **396.** $e^x\left(\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. **397.** $\frac{x(2\ln x-1)}{\ln^2 x}$.
398. $3x^2\ln x$. **399.** $\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x^2}-\frac{2}{x^2}$. **400.** $\frac{2\ln x}{x\ln 10}-\frac{1}{x}$. **401.** $\operatorname{sh}x+x\operatorname{ch}x$.
402. $\frac{2x\operatorname{ch}x-x^2\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^2 x}$. **403.** $-\operatorname{th}^2 x$. **404.** $\frac{-3(x\ln x+\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x)}{x\ln^2 x\operatorname{sh}^2 x}$. **405.** $\frac{-2x^2}{1-x^4}$.
406. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{Arsh}x+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\arcsin x$. **407.** $\frac{x-\sqrt{x^2-1}\operatorname{Arch}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$. **408.** $\frac{1+2x\operatorname{Arcth}x}{(1-x^2)^2}$.
410. $\frac{3a}{c}\left(\frac{ax+b}{c}\right)^2$. **411.** $12ab+18b^2y$. **412.** $16x(3+2x^2)^3$. **413.** $\frac{x^2-1}{(2x-1)^8}$. **414.** $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.
415. $\frac{bx^2}{\sqrt[3]{(a+bx^3)^2}}$. **416.** $-\sqrt{\sqrt[3]{\frac{a^2}{x^2}}-1}$. **418.** $\frac{1-\tan^2 x+\tan^4 x}{\cos^2 x}$. **419.** $\frac{-1}{2\sin^2 x\sqrt{\cot x}}$.
420. $2-15\cos^2 x\sin x$. **421.** $\frac{-16\cos 2t}{\sin^3 2t}$. 提示: $x=\sin^{-2}t+\cos^{-2}t$. **422.** $\frac{\sin x}{(1-3\cos x)^3}$.
423. $\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}$. **424.** $\frac{3\cos x+2\sin x}{2\sqrt{15\sin x-10\cos x}}$. **425.** $\frac{2\cos x}{3\sqrt[3]{\sin x}}+\frac{3\sin x}{\cos^4 x}$. **426.** $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\arcsin x}}$.
427. $\frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{\arctan x}}-\frac{3(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$. **428.** $\frac{-1}{(1+x^2)(\arctan x)^2}$. **429.** $\frac{e^x+xe^x+1}{2\sqrt{xe^x+x}}$.
430. $\frac{(2e^x-2^x)\ln 2}{3\sqrt[3]{(2e^x-2^x+1)^2}}+\frac{5\ln^4 x}{x}$. **432.** $(2x-5)\cos(x^2-5x+1)-\frac{a}{x^2\cos^2\frac{a}{x}}$. **433.** $-a\sin(\alpha x+\beta)$.
434. $\sin(2t+\varphi)$. **435.** $-2\frac{\cos x}{\sin^3 x}$. **436.** $\frac{-1}{\sin^2\frac{x}{a}}$. **437.** $x\cos 2x^2\sin 3x^2$. **439.** $\frac{-2}{x\sqrt{x^4-1}}$.
440. $\frac{-1}{2\sqrt{x-x^2}}$. **441.** $\frac{-1}{1+x^2}$. **442.** $\frac{-1}{1+x^2}$. **443.** $-10xe^{-x^2}$. **444.** $-2x\cdot 5^{-x^2}\ln 5$.
445. $2x10^{2x}(1+x\ln 10)$. **446.** $\sin 2^t+2^t t\cos 2^t\ln 2$. **447.** $\frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$. **448.** $\frac{2}{2x+7}$.
449. $\cot x\lg e$. **450.** $\frac{-2x}{1-x^2}$. **451.** $\frac{2\ln x}{x}-\frac{1}{x\ln x}$. **452.** $\frac{(e^x+5\cos x)\sqrt{1-x^2}-4}{(e^x+5\sin x-4\arcsin x)\sqrt{1-x^2}}$.
453. $\frac{1}{(1+\ln^2 x)x}+\frac{1}{(1+x^2)\arctan x}$. **454.** $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x+1}}+\frac{1}{2(\sqrt{x}+x)}$. **455.** 解: $y'=(\sin^3 5x)'\cos^2\frac{x}{3}$ $+\sin^3 5x(\cos^2\frac{x}{3})'=3\sin^2 5x\cos 5x\cdot 5\cos^2\frac{x}{3}+\sin^3 5x\cdot 2\cos\frac{x}{3}(-\sin\frac{x}{3})\cdot\frac{1}{3}=15\sin^2 5x\cos 5x\cos^2\frac{x}{3}$ $-\frac{2}{3}\sin^3 5x\cos\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}$. **456.** $\frac{4x+3}{(x-2)^3}$. **457.** $\frac{x^2+4x-6}{(x-3)^5}$. **458.** $\frac{x^7}{(1-x^2)^5}$.
459. $\frac{x-1}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}$. **460.** $\frac{1}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$. **461.** $\frac{x^2}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$. **462.** $\frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}}$.
463. $x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}$. **464.** $\frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$. **465.** $4x^3(a-2x^3)(a-5x^3)$.
466. $\frac{2abmnx^{n-1}(a+bx^n)^{m-1}}{(a-bx^n)^{m+1}}$. **467.** $\frac{x^3-1}{(x+2)^6}$. **468.** $\frac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}$. **469.** $\frac{3x^2+2(a+b+c)x+ab+bc+ac}{2\sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}}$.
470. $\frac{1+2\sqrt{y}}{6\sqrt{y}\sqrt[3]{(y+\sqrt{y})^2}}$. **471.** $2(7t+4)\sqrt[3]{3t+2}$. **472.** $\frac{y-a}{\sqrt{(2ay-y^2)^3}}$. **473.** $\frac{1}{\sqrt{e^x+1}}$.
474. $\sin^3 x\cos^2 x$. **475.** $\frac{1}{\sin^4 x\cos^4 x}$. **476.** $10\tan 5x\sec^2 5x$. **477.** $x\cos x^2$.
478. $3t^2\sin 2t^3$. **479.** $3\cos x\cos 2x$. **480.** $\tan^4 x$. **481.** $\frac{\cos 2x}{\sin^4 x}$. **482.** $\frac{(\alpha-\beta)\sin 2x}{2\sqrt{\alpha\sin^2 x+\beta\cos^2 x}}$.
483. 0. **484.** $\frac{1}{2}\frac{\arcsin x(2\arccos x-\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}$. **485.** $\frac{2}{x\sqrt{2x^2-1}}$. **486.** $\frac{1}{1+x^2}$.
487. $\frac{x\arccos x-\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^{3/2}}$. **488.** $\frac{1}{\sqrt{a-bx^2}}$. **489.** $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ $(a>0)$. **490.** $2\sqrt{a^2-x^2}$ $(a>0)$.
491. $\frac{-x}{\sqrt{2x-x^2}}$. **492.** $\arcsin\sqrt{x}$. **493.** $\frac{5}{\sqrt{1-25x^2}\arcsin 5x}$. **494.** $\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.
495. $\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$. **496.** $\frac{1}{5+4\sin x}$. **497.** $4x\sqrt{\frac{x}{b-x}}$. **498.** $\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}$. **499.** $\frac{a}{2}e^{\frac{ax}{2}}$.

500. $(\sin 2x)e^{\sin^2 x}$. **501**. $2m^2p(2ma^{mx}+b)^{p-1}a^{mx}\ln a$. **502**. $e^{\alpha t}(\alpha\cos\beta t-\beta\sin\beta t)$. **503**. $e^{\alpha x}\sin\beta x$. **504**. $e^{-x}\cos 3x$. **505**. $x^{n-1}a^{-x^2}(n-2x^2\ln a)$. **506**. $-\frac{1}{2}y\tan x(1+\sqrt{\cos x}\ln a)$. **507**. $\frac{3^{\cot\frac{1}{x}}\ln 3}{(x\sin\frac{1}{x})^2}$. **508**. $\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$. **509**. $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$. **510**. $\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$. **511**. $\frac{1}{\sqrt{2ax+x^2}}$. **512**. $\frac{-2}{x\ln^3 x}$. **513**. $-\frac{1}{x^4}\tan\frac{x-1}{x}$. **514**. $\frac{2x+11}{x^2-x-2}$. 提示: $y=5\ln(x-2)-3\ln(x+1)$. **515**. $\frac{3x^2-16x+19}{(x-1)(x-2)(x-3)}$. **516**. $\frac{1}{\sin^3 x\cos x}$. **517**. $\sqrt{x^2-a^2}$. **518**. $\frac{-6x^2}{(3-2x^3)\ln(3-2x^3)}$. **519**. $\frac{15a\ln^2(ax+b)}{ax+b}$. **520**. $\frac{2}{\sqrt{x^2+a^2}}$. **521**. $\frac{mx+n}{x^2-a^2}$. **522**. $\sqrt{2}\sin\ln x$. **523**. $\frac{1}{\sin^3 x}$. **524**. $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$. **525**. $\frac{x+1}{x^3-1}$. **526**. $\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}\left[2^{\arcsin 3x}\ln 2+2(1-\arccos 3x)\right]$. **527**. $\left(3^{\frac{\sin ax}{\cos bx}}\ln 3+\frac{\sin^2 ax}{\cos^2 bx}\right)\cdot\frac{a\cos ax\cos bx+b\sin ax\sin bx}{\cos^2 bx}$. **528**. $\frac{1}{1+2\sin x}$. **529**. $\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$. **530**. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}+\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$. **531**. $-\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$. **532**. $\frac{x^2}{x^4+x^2-2}$. **533**. $\frac{2}{\cos x\sqrt{\sin x}}$. **534**. $\frac{x^2-3x}{x^4-1}$. **535**. $\frac{1}{1+x^3}$. **536**. $\frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{2/3}}$. **537**. $6\,\mathrm{sh}^2 2x\,\mathrm{ch}\,2x$. **538**. $e^{\alpha x}(\alpha\,\mathrm{ch}\,\beta x+\beta\,\mathrm{sh}\,\beta x)$. **539**. $6\,\mathrm{th}^2 2x(1-\mathrm{th}^2 2x)$. **540**. $2\,\mathrm{cth}\,2x$. **541**. $\frac{2x}{\sqrt{a^4+x^4}}$. **542**. $\frac{1}{x\sqrt{\ln^2 x-1}}$. **543**. $\frac{1}{\cos 2x}$. **544**. $\frac{-1}{\sin x}$. **545**. $\frac{2}{1-x^2}$. **546**. $x\,\mathrm{Arth}\,x$. **547**. $x\,\mathrm{Arsh}\,x$. **548**. a) 当 $x>0$ 时 $y'=1$; 当 $x<0$ 时 $y'=-1$; $y'(0)$ 不存在; b) $y'=|2x|$. **549**. $y'=\frac{1}{x}$. **550**. 当 $x\leqslant 0$ 时, $f'(x)=-1$; 当 $x>0$ 时, $f'(x)=-e^{-x}$. **552**. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}$. **553**. 6π. **554**. a) $f'_-(0)=-1, f'_+(0)=1$; b) $f'_-(0)=\frac{2}{a}, f'_+(0)=-\frac{2}{a}$; c) $f'_-(0)=1, f'_+(0)=0$; d) $f'_-(0)=f'_+(0)=0$; e) $f'_-(0)$ 和 $f'_+(0)$ 都不存在. **555**. $1-x$. **556**. $2+\frac{x-3}{4}$. **557**. -1. **558**. 0. **561**. $y'=e^{-x}(1-x)$. 因为 $e^{-x}=\frac{y}{x}$, 所以 $y'=\frac{y}{x}(1-x)$ 或者 $xy'=y(1-x)$. **566**. $(1+2x)(1+3x)+2(1+x)(1+3x)+3(1+x)(1+2x)$. **567**. $-\frac{(x+2)(5x^2+19x+20)}{(x+1)^4(x+3)^5}$. **568**. $\frac{x^2-4x+2}{2\sqrt{x(x-1)(x-2)^3}}$. **569**. $\frac{3x^2+5}{3(x^2+1)}\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}$. **570**. $\frac{(x-2)^8(x^2-7x+1)}{(x-1)(x-3)\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$. **571**. $-\frac{5x^2+x-24}{3(x-1)^{1/2}(x+1)^{5/3}(x+3)^{5/2}}$. **572**. $x^x(1+\ln x)$. **573**. $x^{x^2+1}(1+2\ln x)$. **574**. $\sqrt[x]{x}\frac{1-\ln x}{x^2}$. **575**. $x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{2}\ln x)$. **576**. $x^{x^x}x^x(\frac{1}{x}+\ln x+\ln^2 x)$. **577**. $x^{\sin x}(\frac{\sin x}{x}+\cos x\ln x)$. **578**. $(\cos x)^{\sin x}(\cos x\ln\cos x-\sin x\tan x)$. **579**. $(1+\frac{1}{x})^x[\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x}]$. **580**. $(\arctan x)^x\left[\ln\arctan x+\frac{x}{(1+x^2)\arctan x}\right]$. **581**. a) $x'_y=\frac{1}{3(1+x^2)}$; b) $x'_y=\frac{2}{2-\cos x}$; c) $x'_y=\frac{10}{1+5e^{\frac{x}{2}}}$. **582**. $\frac{3}{2}t^2$. **583**. $\frac{-2t}{t+1}$. **584**. $\frac{-2t}{1-t^2}$. **585**. $\frac{t(2-t^3)}{1-2t^2}$. **586**. $\frac{2}{3\sqrt[6]{t}}$. **587**. $\frac{t+1}{t(t^2+1)}$. **588**. $\tan t$. **589**. $-\frac{b}{a}$. **590**. $-\frac{b}{a}\tan t$. **591**. $-\tan 3t$. **592**. 当 $t<0$ 时, $y'_x=-1$; 当 $t>0$ 时, $y'_x=1$. **593**. $-2e^{3t}$. **594**. $\tan t$. **596**. 1. **597**. ∞. **599**. 不能得出. **600**. 是的, 因为等式为恒等式. **601**. $\frac{2}{5}$. **602**. $-\frac{b^2x}{a^2y}$. **603**. $-\frac{x^2}{y^2}$. **604**. $-\frac{x(3x+2y)}{x^2+2y}$. **605**. $-\sqrt{\frac{y}{x}}$. **606**. $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. **607**. $\frac{2y^2}{3(x^2-y^2)+2xy}=\frac{1-y^3}{1+3xy^2+4y^3}$. **608**. $\frac{10}{10-3\cos y}$. **609**. -1. **610**. $\frac{y\cos^2 y}{1-x\cos^2 y}$. **611**. $\frac{y}{x}\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$. **612**. $(x+y)^2$. **613**. $y'=\frac{1}{e^y-1}=\frac{1}{x+y-1}$. **614**. $\frac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}$. **615**. $\frac{y}{x-y}$. **616**. $\frac{x+y}{x-y}$. **617**. $\frac{cy+x\sqrt{x^2+y^2}}{cx-y\sqrt{x^2+y^2}}$. **618**. $\frac{x\ln y-y}{y\ln x-x}\cdot\frac{y}{x}$. **620**. a) 0; b) $\frac{1}{2}$; c) 0. **622**. $45°, \arctan 2\approx 63°26'$. **623**. $45°$. **624**. $\arctan\frac{2}{e}\approx 36°21'$. **625**. $(0,20),(1,15),(-2,-12)$. **626**. $(1,-3)$. **627**. $y=x^2-x+1$. **628**. $k=\frac{-1}{11}$. **629**. $(\frac{1}{8},-\frac{1}{16})$. **631**. $y-5=0, x+2=0$. **632**. $x-1=0, y=0$. **633**. a) $y=2x, y=-\frac{1}{2}$; b) $x-2y-1=0, 2x+y-2=0$; c) $6x+2y-\pi=0, 2x-6y+3\pi=0$; d) $y=x-1, y=1-x$; e) 在点 $(1,1)$ 处为 $2x+y-3=0, x-2y+1=0$; 在点 $(-1,1)$ 处为 $2x-y+3=0, x+2y-1=0$.

634. $7x-10y+6=0, 10x+7y-34=0$. **635**. $y=0, (\pi+4)x+(\pi-4)y-\frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}=0$. **636**. $5x+6y-13=0, 6x-5y+21=0$. **637**. $x+y-2=0$. **638**. 在点 $(1,0)$ 处：$y=2x-2, y=\frac{1-x}{2}$; 在点 $(2,0)$ 处：$y=-x+2, y=x-2$; 在点 $(3,0)$ 处: $y=2x-6, y=\frac{3-x}{2}$. **639**. $14x-13y+12=0, 13x+14y-41=0$. **640**. 切线方程为 $\frac{x}{2x_0}+\frac{y}{2y_0}=1$. 于是, 切线与 OX 轴交于点 $A(2x_0,0)$, 与 OY 轴交于点 $B(0,2y_0)$. 求出 AB 的中点, 就得到点 (x_0,y_0). **643**. $40°36'$. **644**. 在点 $(0,0)$ 处两抛物线相切, 在点 $(1,1)$ 处相交, 其交角为 $\arctan\frac{1}{7}\approx 8°8'$. **647**. $S_t=S_n=2, t=n=2\sqrt{2}$. **648**. $\frac{1}{\ln 2}$. **652**. $T=2a\sin\frac{t}{2}\tan\frac{t}{2}, N=2a\sin\frac{t}{2}, S_t=2a\sin^2\frac{t}{2}\tan\frac{t}{2}, S_n=a\sin t$. **653**. $\arctan\frac{1}{k}$. **654**. $\frac{\pi}{2}+2\varphi$. **655**. $t=2\pi a\sqrt{1+4\pi^2}, n=a\sqrt{1+4\pi^2}, S_t=4\pi^2 a, S_n=a, \tan\mu=-\varphi_0$. **656**. $S_t=a, S_n=\frac{a}{\varphi_0^2}, t=\sqrt{a^2+\rho_0^2}, n=\frac{\rho_0}{a}\sqrt{a^2+\rho_0^2}, \tan\mu=-\varphi_0$. **657**. 3 cm/s, −9 cm/s. **658**. 15 cm/s. **659**. $-\frac{3}{2}$ m/s. **660**. 轨道的方程为 $y=x\tan\alpha-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2$. 飞行距离等于 $\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$. 速度值的大小 (模) 为 $\sqrt{v_0^2-2v_0 g\sin\alpha+g^2t^2}$, 速度向量的斜率为 $\frac{v_0\sin\alpha-gt}{v_0\cos\alpha}$. 为了确定轨道必须从给定方程组中消去参数 t. 飞行距离就是点 A 的横坐标 (图 17). 速度在坐标轴上的投影为 $\frac{dx}{dt}$ 和 $\frac{dy}{dt}$. 速度值的大小 (模) 为 $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$, 速度向量的方向沿着轨道切线. **661**. 以每秒 0.4 单位长度的速度减少. **662**. $(\frac{9}{8},\frac{9}{2})$. **663**. 对角线以 3.8 cm/s 的速度增长, 面积以 40 cm²/s 的速度增长. **664**. 表面积以 0.2π m²/s 的速度增长, 体积以 0.05π m³/s 的速度增长. **665**. $\frac{\pi}{3}$ cm/s. **666**. 整个杆的质量为 360 g, 在点 M 处的密度等于 $5x$ g/cm, 在点 A 处的密度等于 0, 在点 B 处的密度等于 60 g/cm. **667**. $56x^2+210x^4$. **668**. $e^{x^2}(4x^2+2)$. **669**. $2\cos 2x$. **670**. $2(1-x^2)/3(1+x^2)^2$. **671**. $-x/\sqrt{(a^2+x^2)^3}$. **672**. $2\arctan x+\frac{2x}{1+x^2}$. **673**. $\frac{2}{1-x^2}+\frac{2x\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$. **674**. $\frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}$. **679**. $y'''=6$. **680**. $f'''(3)=4320$. **681**. $y^{(5)}=\frac{24}{(x+1)^5}$. **682**. $y^{(6)}=-64\sin 2x$. **684**. $0,1,2,2$. **685**. 速度 $v=5, 4.997, 4.7$. 加速度 $a=0,-0.006,-0.06$. **686**. 点 M_1 的运动规律为 $x=a\cos\omega t$, 在时刻 t 的速度等于 $-a\omega\sin\omega t$, 在时刻 t 的加速度为 $-a\omega^2\cos\omega t$. 初始速度为 0, 初始加速度等于 $-a\omega^2$, 当 $x=0$ 时的速度等于 $\mp a\omega$, 当 $x=0$ 时的加速度等于 0. 速度的最大值为 $a\omega$. 加速度的最大值为 $a\omega^2$. **687**. $y^{(n)}=n!a^n$. **688**. a) $n!(1-x)^{-(n+1)}$; b) $(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n\cdot x^{n-\frac{1}{2}}}$. **689**. a) $\sin(x+n\frac{\pi}{2})$; b) $2^n\cos(2x+n\frac{\pi}{2})$; c) $(-3)^n e^{-3x}$; d) $(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$; e) $\frac{(-1)^{n+1}n!}{(1+x)^{n+1}}$; f) $\frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$; g) $2^{n-1}\sin[2x+(n-1)\frac{\pi}{2}]$; h) $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}$. **690**. a) xe^x+ne^x; b) $2^{n-1}e^{-2x}[2(-1)^n x^2+2n(-1)^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2}]$; c) $(1-x^2)\cos(x+\frac{n\pi}{2})-2nx\cos(x+\frac{(n-1)\pi}{2})-n(n-1)\cos(x+\frac{(n-2)\pi}{2})$; d) $\frac{(-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n x^{(2n+1)/2}}[x-(2n-1)]$; e) $\frac{(-1)^n 6(n-4)!}{x^{n-3}}$, 当 $n\geqslant 4$. **691**. $y^{(n)}(0)=(n-1)!$ **692**. a) $9t^3$; b) $2t^2+2$; c) $-\sqrt{1-t^2}$. **693**. a) $\frac{-1}{a\sin^3 t}$; b) $\frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}$; c) $\frac{-1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}$; d) $\frac{-1}{at\sin^3 t}$. **694**. a) 0; b) $2e^{3at}$; **695**. a) $(1+t^2)(1+3t^2)$; b) $\frac{t(1+t)}{(1-t)^3}$. **696**. $\frac{-2e^{-t}}{(\cos t+\sin t)^3}$. **697**. 我们有 $y=e^x-1$ 和 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=1$. 在此通常的微分法则不能应用. **699**. $\frac{3\cot^4 t}{\sin t}$. **700**. $\frac{4e^{2t}(2\sin t-\cos t)}{(\sin t+\cos t)^5}$. **701**. $-6e^{3t}(1+3t+t^2)$. **702**. $m^n t^m$. **703**. $\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{-f''(x)}{[f'(x)]^3}$, $\frac{d^3x}{dy^3}=\frac{3[f''(x)]^2-f'(x)f'''(x)}{[f'(x)]^5}$. **705**. $-\frac{p^2}{y^3}$. **706**. $-\frac{b^4}{a^2y^3}$. **707**. $-\frac{2y^2+2}{y^5}$. **708**. $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y}{(1-y)^3}, \frac{d^2x}{dy^2}=\frac{1}{y^2}$. **709**. $\frac{111}{256}$. **710**. $\frac{-1}{16}$. **711**. a) $\frac{1}{3}$; b) $-\frac{3a^2x}{y^5}$. **712**. $\Delta y=0.009001, dy=0.009$. **713**. 当 $x=1$ 和 $\Delta x=-\frac{1}{3}$ 时有 $d(1-x^3)=1$. **714**. $dS=2x\Delta x, \Delta S=2x\Delta x+(\Delta x)^2$. **717**. 当 $x=0$ 时. **718**. 没有. **719**. $dy=-\frac{\pi}{72}\approx -0.0436$. **720**. $dy=\frac{1}{2700}\approx 0.00037$.

721. $dy = \frac{\pi}{45} \approx 0.0698$. **722.** $\frac{-m dx}{x^{m+1}}$. **723.** $\frac{dx}{(1-x)^2}$. **724.** $\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$. **725.** $\frac{a dx}{x^2+a^2}$. **726.** $-2xe^{-x^2}dx$. **727.** $\ln x dx$. **728.** $\frac{-2dx}{1-x^2}$. **729.** $-\frac{1+\cos\varphi}{\sin^2\varphi}d\varphi$. **730.** $\frac{e^t dt}{1+e^{2t}}$. **732.** $-\frac{10x+8y}{7x+5y}dx$. **733.** $\frac{-ye^{-x/y}dx}{y^2-xe^{-x/y}} = \frac{y}{x-y}dx$. **734.** $\frac{x+y}{x-y}dx$. **735.** $\frac{12}{11}dx$. **737.** a) 0.485; b) 0.965; c) 1.2; d) −0.045; e) $\frac{\pi}{4} + 0.025 \approx 0.81$. **738.** 565 cm^3. **739.** $\sqrt{5} \approx 2.25, \sqrt{17} \approx 4.13, \sqrt{70} \approx 8.38, \sqrt{640} \approx 25.3$. **740.** $\sqrt[3]{10} \approx 2.16, \sqrt[3]{70} \approx 4.13, \sqrt[3]{200} \approx 5.85$. **741.** a) 5; b) 1.1; c) 0.93; d) 0.9. **742.** 1.0019. **743.** 0.57. **744.** 2.03. **748.** $\frac{-(dx)^2}{(1-x^2)^{3/2}}$. **749.** $\frac{-x(dx)^2}{(1-x^2)^{3/2}}$. **750.** $(-\sin x \ln x + \frac{2\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2})(dx)^2$. **751.** $\frac{2\ln x - 3}{x^3}(dx)^2$. **752.** $-e^{-x}(x^2-6x+6)(dx)^3$. **753.** $\frac{384(dx)^4}{(2-x)^5}$. **754.** $3 \cdot 2^n \sin(2x + 5 + \frac{n\pi}{2})(dx)^n$. **755.** $e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha + n\alpha)(dx)^n$. **757.** 不正确, 因为 $f'(2)$ 不存在. **758.** 不满足, 因为函数在点 $x = \frac{\pi}{2}$ 处不连续. **762.** $\chi = 0$. **763.** (2, 4). **765.** a) $\xi = \frac{14}{9}$; b) $\xi = \frac{\pi}{4}$. **768.** $\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{3\xi^3}$, 其中 $\xi = 1 + \theta(x-1), 0 < \theta < 1$. **769.** $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!}\cos\xi_1$, 其中 $\xi_1 = \theta_1 x, 0 < \theta_1 < 1$; $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \times \cos\xi_2$, 其中 $\xi_2 = \theta_2 x, 0 < \theta_2 < 1$. **770.** $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{x^n}{n!}e^\xi$, 其中 $\xi = \theta x, 0 < \theta < 1$. **772.** 误差: a) $\frac{1}{16}\frac{x^3}{(1+\xi)^{5/2}}$; b) $\frac{5}{81}\frac{x^3}{(1+\xi)^{8/3}}$. 两种情况下都有 $\xi = \theta x, 0 < \theta < 1$. **773.** 误差小于 $\frac{3}{5!} = \frac{1}{40}$. **775.** 解. 我们有 $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = \left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1-\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}$. 把这两个因子按 $\frac{x}{a}$ 的幂进行展开, 我们得到 $\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{x}{a} - \frac{1}{8}\frac{x^2}{a^2}, \left(1-\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{x}{a} + \frac{3}{8}\frac{x^2}{a^2}$. 相乘后可得 $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \approx 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2}$. 其次, 将 $e^{\frac{x}{a}}$ 按 $\frac{x}{a}$ 的幂展开, 可得同样的多项式: $e^{\frac{x}{a}} \approx 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2}$. **777.** $-\frac{1}{3}$. **778.** ∞. **779.** 1. **780.** 3. **781.** $\frac{1}{2}$. **782.** 5. **783.** ∞. **784.** 0. **785.** $\frac{\pi^2}{2}$. **786.** 1. **788.** $\frac{2}{\pi}$. **789.** 1. **790.** 0. **791.** a. **792.** 对于 $n > 1$, 极限为 ∞; 对于 $n = 1$, 极限为 a; 对于 $n < 1$, 极限为 0. **793.** 0. **795.** $\frac{1}{5}$. **796.** $\frac{1}{12}$. **797.** −1. **799.** 1. **800.** e^3. **801.** 1. **802.** 1. **803.** 1. **804.** $\frac{1}{e}$. **805.** $\frac{1}{e}$. **806.** $\frac{1}{e}$. **807.** 1. **808.** 1. **810.** 应当求出 $\lim_{\alpha\to 0}\frac{S}{(2/3)bh}$, 其中 $S = \frac{R^2}{2}(\alpha - \sin\alpha)$ 是弓形面积的精确表达式 (R 为所在圆的半径).

第三章

811. $(-\infty, -2)$ 增大, $(-2, \infty)$ 减小. **812.** $(-\infty, 2)$ 减小, $(2, \infty)$ 增大. **813.** $(-\infty, \infty)$ 增大. **814.** $(-\infty, 0)$ 和 $(2, \infty)$ 增大, $(0, 2)$ 减小. **815.** $(-\infty, 2)$ 和 $(2, \infty)$ 减小. **816.** $(-\infty, 1)$ 增大, $(1, \infty)$ 减小. **817.** $(-\infty, -2)$, $(-2, 8)$ 和 $(8, \infty)$ 减小. **818.** $(0, 1)$ 减小, $(1, \infty)$ 增大. **819.** $(-\infty, -1)$ 和 $(1, \infty)$ 增大, $(-1, 1)$ 减小. **820.** $(-\infty, \infty)$ 增大. **821.** $(0, \frac{1}{e})$ 减小, $(\frac{1}{e}, \infty)$ 增大. **822.** $(-2, 0)$ 增大. **823.** $(-\infty, 2)$ 减小, $(2, \infty)$ 增大. **824.** $(-\infty, a)$ 增大, (a, ∞) 减小. **825.** $(-\infty, 0)$ 和 $(0, 1)$ 减小, $(1, \infty)$ 增大. **827.** 当 $x = \frac{1}{2}$ 时 $y_{\max} = \frac{9}{4}$. **828.** 没有极值. **830.** 当 $x = 0$ 时 $y_{\min} = 0$; 当 $x = 12$ 时 $y_{\min} = 0$; 当 $x = 6$ 时 $y_{\max} = 1296$. **831.** 当 $x \approx 0.23$ 时 $y_{\min} \approx -0.76$; 当 $x = 1$ 时 $y_{\max} \approx 0$; 当 $x \approx 1.43$ 时 $y_{\min} \approx -0.05$. 当 $x = 2$ 时没有极值. **832.** 没有极值. **833.** 当 $x = 0$ 时 $y_{\max} = -2$; 当 $x = 2$ 时 $y_{\min} = 2$. **834.** 当 $x = 3.2$ 时 $y_{\max} = \frac{9}{16}$. **835.** 当 $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ 时 $y_{\max} = -3\sqrt{3}$; 当 $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ 时 $y_{\min} = 3\sqrt{3}$. **836.** 当 $x = 0$ 时 $y_{\max} = \sqrt{2}$. **837.** 当 $x = -2\sqrt{3}$ 时 $y_{\max} = -\sqrt{3}$; 当 $x = 2\sqrt{3}$ 时 $y_{\min} = \sqrt{3}$. **838.** 当 $x = \pm 1$ 时 $y_{\min} = 0$; 当 $x = 0$ 时 $y_{\max} = 1$.

839. 当 $x=(k-\frac{1}{6})\pi$ 时 $y_{\min}=-\frac{3}{2}\sqrt{3}$; 当 $x=(k+\frac{1}{6})\pi$ 时 $y_{\max}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. **840**. 当 $x=12k\pi$ 时 $y_{\max}=5$; 当 $x=12(k\pm\frac{2}{5})\pi$ 时 $y_{\max}=5\cos\frac{2\pi}{5}$; 当 $x=12(k\pm\frac{1}{5})\pi$ 时 $y_{\min}=-5\cos\frac{2\pi}{5}$; 当 $x=6(2k+1)\pi$ 时 $y_{\min}=1(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. **841**. 当 $x=0$ 时 $y_{\min}=0$. **842**. 当 $x=\frac{1}{e}$ 时 $y_{\min}=-\frac{1}{e}$. **843**. 当 $x=\frac{1}{e^2}$ 时 $y_{\max}=\frac{4}{e^2}$; 当 $x=1$ 时 $y_{\min}=0$. **844**. 当 $x=0$ 时 $y_{\min}=1$. **845**. 当 $x=-1$ 时 $y_{\min}=-\frac{1}{e}$. **846**. 当 $x=0$ 时 $y_{\min}=0$; 当 $x=2$ 时 $y_{\max}=\frac{4}{e^2}$. **847**. 当 $x=1$ 时 $y_{\min}=e$. **848**. 无极值. **849**. 当 $x=-1$ 有最小值 $m=-\frac{1}{2}$; 当 $x=1$ 有最大值 $M=\frac{1}{2}$. **850**. 当 $x=0$ 和 $x=10$ 时 $m=0$; 当 $x=5$ 时 $M=5$. **851**. 当 $x=(2k+1)\frac{\pi}{4}$ 时 $m=\frac{1}{2}$; 当 $x=\frac{k\pi}{2}$ 时 $M=1(k=0,\pm1,\pm2.\cdots)$. **852**. 当 $x=1$ 时 $m=0$; 当 $x=-1$ 时 $M=\pi$. **853**. 当 $x=-1$ 时 $m=-1$; 当 $x=3$ 时 $M=27$. **854**. a) 当 $x=1$ 时 $m=-6$; 当 $x=5$ 时 $M=266$; b) 当 $x=-10$ 时 $m=-1579$; 当 $x=12$ 时 $M=3745$. **856**. $p=-2,q=4$. **861**. 每一个数都应该等于 $\frac{a}{2}$. **862**. 矩形应为边长等于 $\frac{l}{4}$ 的正方形. **863**. 等腰的. **864**. 墙壁的一边应为其余边的 2 倍. **865**. 被截去的正方形的边长应等于 $\frac{a}{6}$. **866**. 高应等于底边的 $\frac{1}{2}$. **867**. 所求圆柱体的底直径和高相等. **868**. 圆柱体的高 $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, 底半径 $R\sqrt{\frac{2}{3}}$, 其中 R 为已知球的半径. **869**. 圆柱体的高为 $R\sqrt{2}$, 其中 R 为已知球的半径. **870**. 圆锥体的高为 $\frac{4}{3}R$, 其中 R 为已知球的半径. **871**. 圆锥体的高为 $\frac{4}{3}R$, 其中 R 为已知球的半径. **872**. 圆锥的底半径 $\frac{3}{2}r$, 其中 r 为已知圆柱体的底半径. **873**. 所求圆锥的高是球的直径的 2 倍. **874**. $\varphi=\pi$ 即槽的截面为半圆. **875**. 留下的扇形的中心角 $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$. **876**. 圆柱体部分的高应等于零, 即容器应成半球形. **877**. $h=(l^{\frac{2}{3}}-d^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$. **878**. $\frac{x}{2x_0}+\frac{y}{2y_0}=1$. **879**. 矩形的边长为 $a\sqrt{2}$ 和 $b\sqrt{2}$, 其中 a 和 b 为椭圆的半轴. **880**. 位于抛物线上的矩形的顶点坐标为 $(\frac{2}{3}a,\pm2\sqrt{\frac{pa}{3}})$. **881**. $(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{3}{4})$. **882**. 所求角度等于 $\arccos\frac{1}{k}$ 和 $\arctan\frac{h}{d}$ 中的最大值. **883**. $AM=a\frac{\sqrt[3]{T_1}}{\sqrt[3]{T_1}+\sqrt[3]{T_2}}$. **884**. $\frac{r}{\sqrt{2}}$. **885**. a) $x=y=\frac{d}{\sqrt{2}}$; b) $x=\frac{d}{\sqrt{3}},y=d\sqrt{\frac{2}{3}}$. **886**. $x=\sqrt{\frac{2aM}{q}},P_{\min}=\sqrt{2aqM}$. **887**. $\sqrt{Mm}$. 在两个球作完全弹性碰撞时, 质量为 m_1 的静止的球与速度为 v 质量为 m_2 的球碰撞后所得到的速度等于 $\frac{2m_2v}{m_1+m_2}$. **888**. $n=\sqrt{\frac{NR}{r}}$ (如果这个数不是整数或不是 N 的因数, 可取与此数最接近的能整除 N 的整数). 因为电池组的内电阻等于 $\frac{n^2r}{N}$, 所以所求得的解的物理意义为: 电池组的内电阻尽可能地接近于外电阻. **889**. $y=\frac{2}{3}h$. **891**. $(-\infty,2)$ 下凹, $(2,\infty)$ 上凹, $M(2,12)$ 拐点. **892**. $(-\infty,\infty)$ 上凹. **893**. $(-\infty,-3)$ 下凹, $(-3,\infty)$ 上凹, 无拐点. **894**. $(-\infty,-6)$ 和 $(0,6)$ 上凹, $(-6,0)$ 和 $(6,\infty)$ 下凹, 拐点 $M_1(-6,-\frac{9}{2}),O(0,0),M_2(6,\frac{9}{2})$. **895**. $(-\infty,-\sqrt{3})$ 和 $(0,\sqrt{3})$ 上凹, $(-\sqrt{3},0)$ 和 $(\sqrt{3},\infty)$ 下凹, 拐点 $M_{1,2}(\pm\sqrt{3},0)$ 和 $O(0,0)$. **896**. $((4k+1)\frac{\pi}{2},(4k+3)\frac{\pi}{2})$ 上凹, $((4k+3)\frac{\pi}{2},(4k+5)\frac{\pi}{2})$ 下凹 $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$, 拐点为 $((2k+1)\frac{\pi}{2},0)$. **897**. $(2k\pi,(2k+1)\pi)$ 上凹, $((2k-1)\pi,2k\pi)$ 下凹 $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$, 拐点的横坐标等于 $x=k\pi$. **898**. $(0,\frac{1}{\sqrt{e^3}})$ 下凹, $(\frac{1}{\sqrt{e^3}},\infty)$ 上凹, 拐点 $M(\frac{1}{\sqrt{e^3}},-\frac{3}{2e^3})$. **899**. $(-\infty,0)$ 上凹, $(0,\infty)$ 下凹, 拐点$O(0,0)$. **900**. $(-\infty,-3)$ 和 $(-1,\infty)$ 上凹, $(-3,-1)$ 下凹, 拐点 $M_1(-3,\frac{10}{e^3})$ 和 $M_2(-1,\frac{2}{e})$. **901**. $x=2,y=0$. **902**. $x=1,x=3,y=0$. **903**. $x=\pm2,y=1$. **904**. $y=x$. **905**. $y=-x$ (左的), $y=x$ (右的). **906**. $y=-1$ (左的), $y=1$ (右的). **907**. $x=\pm1,y=-x$ (左的), $y=x$ (右的). **908**. $y=-2$ (左的), $y=2x-2$ (右的). **909**. $y=2$. **910**. $x=0,y=1$ (左的), $y=0$ (右的). **911**. $x=0;y=1$. **912**. $y=0$. **913**. $x=-1$. **914**. $y=x-\pi$ (左

的), $y=x+\pi$ (右的). **915**. $y=a$. **916**. 当 $x=0$ 时 $y_{\max}=0$; 当 $x=2$ 时 $y_{\min}=-4$. 拐点 $M_1(1,-2)$. **917**. 当 $x=\pm\sqrt{3}$ 时 $y_{\max}=1$; 当 $x=0$ 时 $y_{\min}=0$. 拐点 $M_{1,2}(\pm 1,\frac{5}{9})$. **918**. 当 $x=-1$ 时 $y_{\max}=4$; 当 $x=1$ 时 $y_{\min}=0$. 拐点 $M_1(0,2)$. **919**. 当 $x=-2$ 时 $y_{\max}=8$; 当 $x=2$ 时 $y_{\min}=0$. 拐点 $M(0,4)$. **920**. 当 $x=0$ 时 $y_{\min}=-1$, 拐点 $M_{1,2}(\pm\sqrt{5},0)$ 和 $M_{3,4}(\pm 1,\frac{64}{125})$. **921**. 当 $x=0$ 时 $y_{\max}=-2$; 当 $x=2$ 时 $y_{\min}=2$. 渐近线 $x=1, y=x-1$. **922**. 拐点 $M_{1,2}(\pm 1,\pm 2)$, 渐近线 $x=0$. **923**. 当 $x=-1$ 时 $y_{\max}=-4$; 当 $x=1$ 时 $y_{\min}=4$. 渐近线 $x=0$. **924**. 当 $x=1$ 时 $y_{\min}=3$, 拐点 $M(-\sqrt[3]{2},0)$. 渐近线 $x=0$. **925**. 当 $x=0$ 时 $y_{\max}=\frac{1}{3}$, 拐点 $M_{1,2}(\pm 1,\frac{1}{4})$, 渐近线 $y=0$. **926**. 当 $x=0$ 时 $y_{\max}=-2$, 渐近线 $x=\pm 2$ 和 $y=0$. **927**. 当 $x=-2$ 时 $y_{\min}=-1$; 当 $x=2$ 时 $y_{\max}=1$. 拐点 $O(0,0)$ 和 $M_{1,2}(\pm 2\sqrt{3},\pm\frac{\sqrt{3}}{2})$, 渐近线 $y=0$. **928**. 当 $x=4$ 时 $y_{\max}=1$, 拐点 $M(5,\frac{8}{9})$, 渐近线 $x=2, y=0$. **929**. 拐点 $O(0,0)$, 渐近线 $x=\pm 2$ 和 $y=0$. **930**. 当 $x=\frac{8}{3}$ 时 $y_{\max}=-\frac{27}{16}$, 渐近线 $x=0, x=4$ 和 $y=0$. **931**. 当 $x=-1$ 时 $y_{\max}=-4$; 当 $x=1$ 时 $y_{\min}=4$. 渐近线 $x=0$ 和 $y=3x$. **932**. $A(0,2)$ 和 $B(4,2)$ 为端点, 当 $x=2$ 时 $y_{\max}=2\sqrt{2}$. **933**. $A(-8,-4)$ 和 $B(8,4)$ 为端点, 拐点 $O(0,0)$. **934**. 端点 $A(-3,0)$, 当 $x=-2$ 时 $y_{\min}=-2$. **935**. 端点 $A(-\sqrt{3},0), O(0,0)$ 和 $B(\sqrt{3},0)$, 当 $x=-1$ 时 $y_{\max}=\sqrt{2}$, 拐点 $M\left(\sqrt{3+2\sqrt{3}},\sqrt{6\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}}\right)$. **936**. 当 $x=0$ 时 $y_{\max}=1$, 拐点 $M_{1,2}(\pm 1,0)$. **937**. 拐点 $M_1(0,1)$ 和 $M_2(1,0)$, 渐近线 $y=-x$. **938**. 当 $x=-1$ 时 $y_{\max}=0$; 当 $x=0$ 时 $y_{\min}=-1$. **939**. 当 $x=0$ 时 $y_{\max}=2$, 拐点 $M_{1,2}(\pm 1,\sqrt[3]{2})$, 渐近线 $y=0$. **940**. 当 $x=-4$ 时 $y_{\min}=-4$; 当 $x=4$ 时 $y_{\max}=4$, 拐点 $O(0,0)$, 渐近线 $y=0$. **941**. 当 $x=2$ 时 $y_{\min}=\sqrt[3]{4}$; 当 $x=4$ 时 $y_{\min}=\sqrt[3]{4}$; 当 $x=3$ 时 $y_{\max}=2$. **942**. 当 $x=0$ 时 $y_{\min}=2$, 渐近线 $x=\pm 2$. **943**. 渐近线 $x=\pm 2$ 和 $y=0$. **944**. 当 $x=\sqrt{3}$ 时 $y_{\min}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$; 当 $x=-\sqrt{3}$ 时 $y_{\max}=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$. 拐点 $M_1(-3,-\frac{3}{2}), O(0,0)$ 和 $M_2(3,\frac{3}{2})$, 渐近线 $x=\pm 1$. **945**. 当 $x=6$ 时 $y_{\min}=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$, 拐点 $M(12,\frac{12}{\sqrt[3]{100}})$, 渐近线 $x=2$. **946**. 当 $x=1$ 时 $y_{\max}=\frac{1}{e}$, 拐点 $M(2,\frac{2}{e^2})$, 渐近线 $y=0$. **947**. 拐点 $M_1(-3a,\frac{10a}{e^3})$ 和 $M_2(-a,\frac{2a}{e})$, 渐近线 $y=0$. **948**. 当 $x=4$ 时 $y_{\max}=e^2$, 拐点 $M_{1,2}(\frac{8\pm 2\sqrt{22}}{2},e^{\frac{3}{2}})$, 渐近线 $y=0$. **949**. 当 $x=0$ 时 $y_{\max}=2$, 拐点 $M_{1,2}(\pm 1,\frac{3}{e})$, 渐近线 $y=0$. **950**. 当 $x=\pm 1$ 时 $y_{\max}=1$; 当 $x=0$ 时 $y_{\min}=0$. **951**. 当 $x=e^2\approx 7.39$ 时 $y_{\max}=0.74$, 拐点 $M(e^{\frac{8}{3}}\approx 14.39, 0.70)$, 渐近线 $x=0$ 和 $y=0$. **952**. 当 $x=\frac{a}{\sqrt{e}}$ 时 $y_{\min}=-\frac{a^2}{4e}$, 拐点 $M(\frac{a}{\sqrt{e^3}},-\frac{3a^2}{4e^3})$. **953**. 当 $x=e$ 时 $y_{\min}=e$, 拐点 $M(e^2,\frac{e^2}{2})$, 渐近线 $x=1$, 当 $x\to 0$ 时 $y\to 0$. **954**. 当 $x=\frac{1}{e^2}-1\approx -0.86$ 时 $y_{\max}=\frac{4}{e^2}\approx 0.54$; 当 $x=0$ 时 $y_{\min}=0$. 拐点 $M(\frac{1}{e}-1\approx -0.63,\frac{1}{e}\approx 0.37)$, 当 $x\to -1+0$ 时 $y\to 0$(极限端点). **955**. 当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时 $y_{\min}=1$, 拐点 $M_{1,2}(\pm 1.89, 1.33)$, 渐近线 $x=\pm 1$. **956**. 渐近线 $x=0, y=0$. **957**. 渐近线 $y=0$ (当 $x\to +\infty$), $y=-x$ (当 $x\to -\infty$). **958**. 渐近线 $x=-\frac{1}{e}, x=0, y=1$. 函数在区间 $[-\frac{1}{e},0]$ 上不定义. **959**. 周期为 2π 的周期函数. 当 $x=\frac{5}{4}\pi+2k\pi$ 时 $y_{\min}=-\sqrt{2}$; 当 $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ 时 $y_{\max}=\sqrt{2}$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$. 拐点 $M_k(\frac{3}{4}\pi+2k\pi,0)$. **960**. 周期为 2π 的周期函数. 当 $x=\frac{5}{3}\pi+2k\pi$ 时 $y_{\min}=-\frac{3}{4}\sqrt{3}$; 当 $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ 时 $y_{\max}=\frac{3}{4}\sqrt{3}$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$. 拐点 $M_k(k\pi,0)$ 和 $N_k(\arccos(-\frac{1}{4})+2k\pi,\frac{3}{16}\sqrt{15})$. **961**. 周期为 2π 的周期函数. 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上当 $x=\pm\frac{\pi}{3}$ 时 $y_{\max}=\frac{1}{4}$; 当 $x=\pm\pi$ 时 $y_{\min}=-2$; 当 $x=0$ 时 $y_{\min}=0$. 拐点 $M_{1,2}(\pm 0.57, 0.13)$ 和 $M_{3,4}(\pm 2.20,-0.95)$. **962**. 周期为 2π 的奇周期函数. 在区间 $[0,2\pi]$:

当 $x=0$ 时 $y_{\max}=1$; 当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时 $y_{\min}=0.71$; 当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时 $y_{\max}=1$; 当 $x=\pi$ 时 $y_{\min}=-1$; 当 $x=\frac{5\pi}{4}$ 时 $y_{\max}=-0.71$; 当 $x=\frac{3\pi}{2}$ 时 $y_{\min}=-1$; 当 $x=2\pi$ 时 $y_{\max}=1$. 拐点 $M_1(0.36,0.86), M_2(1.21,0.86), M_3(2.36,0), M_4(3.51,-0.86), M_5(4.35,-0.86), M_6(5.50,0)$.

963. 周期为 2π 的周期函数. 当 $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ 时 $y_{\min}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 当 $x=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ 时 $y_{\max}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$, 渐近线 $x=\frac{3}{4}\pi+k\pi$. **964**. 周期为 π 的周期函数. 拐点 $M_k(\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\sqrt{2}}{2})$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 渐近线 $x=\frac{3}{4}\pi+k\pi$. **965**. 周期为 2π 的偶周期函数. 在区间 $[0,\pi]$ 上当 $x=\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时 $y_{\max}=\frac{4}{3\sqrt{3}}$; 当 $x=\pi$ 时 $y_{\max}=0$; 当 $x=\arccos(-\frac{1}{\sqrt{3}})$ 时 $y_{\min}=-\frac{4}{3\sqrt{3}}$; 当 $x=0$ 时 $y_{\min}=0$. 拐点 $M_1(\frac{\pi}{2},0), M_2(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{4\sqrt{7}}{27}), M_3(\pi-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3},-\frac{4\sqrt{7}}{27})$. **966**. 周期为 2π 的偶周期函数. 在区间 $[0,\pi]$ 上当 $x=0$ 时 $y_{\max}=1$; 当 $x=\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ 时 $y_{\max}=\frac{2}{3\sqrt{6}}$; 当 $x=\arccos\frac{1}{\sqrt{6}}$ 时 $y_{\min}=-\frac{2}{3\sqrt{6}}$; 当 $x=\pi$ 时 $y_{\min}=-1$. 拐点 $M_1\left(\frac{\pi}{2},0\right), M_2\left(\arccos\sqrt{\frac{13}{18}},\frac{4}{9}\sqrt{\frac{13}{18}}\right)$, $M_3\left(\arccos\left(-\sqrt{\frac{13}{18}}\right),-\frac{4}{9}\sqrt{\frac{13}{18}}\right)$. **967**. 奇函数. 拐点 $M_k(k\pi,k\pi)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. **968**. 偶函数. 端点 $A_{1,2}(\pm2.83,-1.57)$. 当 $x=0$ 时 $y_{\max}=1.57$ (返回点), 拐点 $M_{1,2}(\pm1.54,-0.34)$. **969**. 奇函数. 存在域 $-1<x<1$. 拐点 $O(0,0)$, 渐近线 $x=\pm1$. **970**. 奇函数. 当 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ 时 $y_{\max}=\frac{\pi}{2}-1+2k\pi$; 当 $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$ 时 $y_{\min}=\frac{3\pi}{2}+1+2k\pi$. 拐点 $M_k(k\pi,2k\pi)$, 渐近线 $x=\frac{2k+1}{2}\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. **971**. 偶函数. 当 $x=0$ 时 $y_{\min}=0$, 渐近线 $y=-\frac{\pi}{2}x-1$ (当 $x\to-\infty$), 渐近线 $y=\frac{\pi}{2}x-1$ (当 $x\to+\infty$). **972**. 当 $x=0$ 时 $y_{\min}=0$ (角点), 渐近线 $y=1$. **973**. 当 $x=1$ 时 $y_{\min}=1+\frac{\pi}{2}$; 当 $x=-1$ 时 $y_{\max}=\frac{3\pi}{2}-1$. 拐点 (对称中心) $(0,\pi)$, 渐近线 $y=x+2\pi$ (左的) 和 $y=x$ (右的). **974**. 当 $x=1$ 时 $y_{\min}\approx1.285$; 当 $x=-1$ 时 $y_{\max}\approx1.856$. 拐点 $M(0,\frac{\pi}{2})$, 渐近线 $y=\frac{x}{2}+\pi$ (当 $x\to-\infty$) 和渐近线 $y=\frac{x}{2}$ (当 $x\to+\infty$). **975**. 渐近线 $x=0$ 和 $y=x-\ln2$. **976**. 当 $x=1$ 时 $y_{\min}\approx1.32$, 渐近线 $x=0$. **977**. 以 2π 为周期的周期函数. 当 $x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ 时 $y_{\min}=\frac{1}{e}$; 当 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ 时 $y_{\max}=e$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 拐点 $M_k(\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2k\pi,e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}})$ 和 $N_k(-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+(2k+1)\pi,e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}})$. **978**. 端点 $A(0,1)$ 和端点 $B(1,4.81)$. 拐点 $M(0.28,1.74)$. **979**. 拐点 $M(0.5,1.59)$. 渐近线 $y\approx0.21$ (当 $x\to-\infty$) 渐近线 $y\approx4.81$ (当 $x\to+\infty$). **980**. 函数的定义域: 区间 $(2k\pi,2k\pi+\pi)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 的集合. 以 2π 为周期的周期函数. 当 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ 时 $y_{\max}=0$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 渐近线 $x=k\pi$. **981**. 定义域: 区间 $((2k-\frac{1}{2})\pi,(2k+\frac{1}{2})\pi)$ (其中 k 为常数) 的集合. 周期为 2π 的周期函数. 拐点 $M_k(2k\pi,0)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 渐近线 $x=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$. **982**. 定义域 $x>0$. 函数单调上升. 渐近线 $x=0$. **983**. 定义域 $|x-2k\pi|<\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 周期为 2π 的周期函数. 当 $x=2k\pi$ 时 $y_{\min}=1$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 渐近线 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$. **984**. 渐近线 $y\approx1.57$. 当 $x\to0$ 时 $y\to-\frac{\pi}{2}$. **985**. 端点 $A_{1,2}(\pm1.31,1.57)$. 当 $x=0$ 时 $y_{\min}=0$. **986**. 当 $x=\frac{1}{e}\approx0.37$ 时 $y_{\min}=(\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}}\approx0.69$. 当 $x\to+0$ 时 $y\to1$. **987**. 极限端点 $A(+0,0)$. 当 $x=e\approx2.72$ 时 $y_{\max}=e^{\frac{1}{e}}\approx1.44$. 渐近线 $y=1$, 拐点 $M_1(0.58,0.12)$ 和 $M_2(4.35,1.40)$. **988**. 当 $t=1$ $(y=3)$ 时 $x_{\max}=-1$; 当 $t=-1$ $(x=3)$ 时 $y_{\min}=-1$. **989**. 为得到图形只要令 t 在 0 到 2π 的范围内变化. 当 $t=\pi$ $(y=0)$ 时 $x_{\min}=-a$; 当 $t=0$ $(y=0)$ 时 $x_{\max}=a$; 当 $t=+\frac{3}{2}\pi$ $(x=0)$ 时 $y_{\min}=-a$ (返回点); 当 $t=\frac{\pi}{2}$ $(x=0)$ 时 $y_{\max}=+a$ (返回点). 当 $t=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$ $(x=\pm\frac{a}{2\sqrt{2}},y=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$ 时为拐点. **990**. 当 $t=-1$ $(y=-e)$ 时 $x_{\min}=-\frac{1}{e}$; 当 $t=1(x=e)$ 时 $y_{\max}=\frac{1}{e}$. 当 $t=-\sqrt{2}$ 和 $t=\sqrt{2}$ 时为拐点 $(-\frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}},-\sqrt{2}e^{\sqrt{2}})$ 和 $(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}},\frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}})$, 渐近线 $x=0$ 和 $y=0$. **991**. 当

$t=0$ 时 $x_{\min}=1$ 和 $y_{\min}=1$ (返回点), 渐近线 $y=2x$ (当 $t\to+\infty$). **992**. 当 $t=0$ 时 $y_{\min}=0$. **993**. $ds=\frac{a}{y}dx, \cos\alpha=\frac{y}{a}, \sin\alpha=-\frac{x}{a}$. **994**. $ds=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4-c^2x^2}{a^2-x^2}}dx, \cos\alpha=\frac{a\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^4-c^2x^2}}, \sin\alpha=-\frac{bx}{\sqrt{a^4-c^2x^2}}$, 其中 $c=\sqrt{a^2-b^2}$. **995**. $ds=\frac{1}{y}\sqrt{p^2+y^2}dx, \cos\alpha=\frac{y}{\sqrt{p^2+y^2}}, \sin\alpha=\frac{p}{\sqrt{p^2+y^2}}$. **996**. $ds=\sqrt[3]{\frac{a}{x}}dx, \cos\alpha=\sqrt[3]{\frac{x}{a}}, \sin\alpha=-\sqrt[3]{\frac{y}{a}}$. **997**. $ds=\operatorname{ch}\frac{x}{a}dx, \cos\alpha=\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{x}{a}}, \sin\alpha=\operatorname{th}\frac{x}{a}$. **998**. $ds=2a\sin\frac{t}{2}dt, \cos\alpha=\sin\frac{t}{2}, \sin\alpha=\cos\frac{t}{2}$. **999**. $ds=3a\sin t\cos t dt, \cos\alpha=-\cos t, \sin\alpha=\sin t$. **1000**. $ds=a\sqrt{1+\varphi^2}d\varphi, \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}$. **1001**. $ds=\frac{a}{\varphi^2}\sqrt{1+\varphi^2}d\varphi, \cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}$. **1002**. $ds=\frac{a}{\cos^3\frac{\varphi}{2}}, \sin\beta=\cos\frac{\varphi}{2}$. **1003**. $ds=a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi, \sin\beta=\cos\frac{\varphi}{2}$. **1004**. $ds=r\sqrt{1+(\ln a)^2}, \sin\beta=\frac{1}{\sqrt{1+(\ln a)^2}}$. **1005**. $ds=\frac{a^2}{r}d\varphi, \sin\beta=\cos 2\varphi$. **1006**. $K=36$. **1007**. $K=\frac{1}{3\sqrt{2}}$. **1008**. $K_A=\frac{a}{b^2}, K_B=\frac{b}{a^2}$. **1009**. $K=\frac{6}{13\sqrt{13}}$. **1010**. 在两顶点上 $K=\frac{3}{a\sqrt{2}}$. **1011**. $(\frac{9}{8},3)$ 和 $(\frac{9}{8},-3)$. **1012**. $(-\frac{\ln 2}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$. **1013**. $R=|\frac{(1+9x^4)^{3/2}}{6x}|$. **1014**. $R=\frac{(b^4x^2+a^4y^2)^{3/2}}{a^4b^4}$. **1015**. $R=\frac{(y^2+1)^2}{4y}$. **1016**. $R=|\frac{3}{2}a\sin 2t|$. **1017**. $R=|at|$. **1018**. $R=|r\sqrt{1+k^2}|$. **1019**. $R=\left|\frac{4}{3}a\cos\frac{\varphi}{2}\right|$. **1020**. $R_{\min}=|p|$. **1022**. $(2,2)$. **1023**. $(-\frac{11}{2}a,\frac{16}{3}a)$. **1024**. $(x-3)^2+(y-\frac{3}{2})^2=\frac{1}{4}$. **1025**. $(x+2)^2+(y-3)^2=8$. **1026**. $pY^2=\frac{8}{27}(X-p)^3$ (半立方抛物线). **1027**. $(aX)^{\frac{2}{3}}+(bY)^{\frac{2}{3}}=(c)^{\frac{4}{3}}$, 其中 $c^2=a^2-b^2$.

第四章

为简单起见, 本章答案中省略任意附加常数.

1031. $\frac{5}{7}a^2x^7$. **1032**. $2x^3+4x^2+3x$. **1033**. $\frac{x^4}{4}+\frac{(a+b)x^3}{3}+\frac{abx^2}{2}$. **1034**. $a^2x+\frac{abx^4}{2}+\frac{b^2x^7}{7}$. **1035**. $\frac{2x}{3}\sqrt{2px}$. **1036**. $\frac{nx^{\frac{n-1}{n}}}{n-1}$. **1037**. $\sqrt[n]{nx}$. **1038**. $a^2x-\frac{9}{5}a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}}+\frac{9}{7}a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{3}}-\frac{x^3}{3}$. **1039**. $\frac{2x^2\sqrt{x}}{5}+x$. **1040**. $\frac{3x^4\sqrt[3]{x}}{13}-\frac{3x^2\sqrt[3]{x}}{7}-6\sqrt[3]{x}$. **1041**. $\frac{2x^{2m}\sqrt{x}}{4m+1}-\frac{4x^{m+n}\sqrt{x}}{2m+2n+1}+\frac{2x^{2n}\sqrt{x}}{4n+1}$. **1042**. $2a\sqrt{ax}-4ax+4x\sqrt{ax}-2x^2+\frac{2x^3}{5\sqrt{ax}}$. **1043**. $\frac{1}{\sqrt{7}}\arctan\frac{x}{\sqrt{7}}$. **1044**. $\frac{1}{2\sqrt{10}}\ln|\frac{x-\sqrt{10}}{x+\sqrt{10}}|$. **1045**. $\ln(x+\sqrt{4+x^2})$. **1046**. $\arcsin\frac{x}{2\sqrt{2}}$. **1047**. $\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}-\ln(x+\sqrt{x^2+2})$. **1048***. a) $\tan x-x$. 设 $\tan^2x=\sec^2x-1$; b) $x-\operatorname{th}x$. 设 $\operatorname{th}^2x=1-\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}$. **1049**. a) $-\cot x-x$; b) $x-\operatorname{cth}x$. **1050**. $\frac{(3e)^x}{\ln 3+1}$. **1051**. $a\ln|\frac{C}{a-x}|$. $\int\frac{a}{a-x}dx=-a\int\frac{d(a-x)}{a-x}=-a\ln|a-x|+a\ln C=a\ln|\frac{C}{a-x}|$. **1052**. $x+\ln|2x+1|$. 解. 分子除以分母, 得 $\frac{2x+3}{2x+1}=1+\frac{2}{2x+1}$. 由此 $\int\frac{2x+3}{2x+1}dx=\int dx+\int\frac{2dx}{2x+1}=x+\int\frac{d(2x+1)}{2x+1}=x+\ln|2x+1|$. **1053**. $-\frac{3}{2}+\frac{11}{4}\ln|3+2x|$. **1054**. $\frac{x}{b}-\frac{a}{b^2}\ln|a+bx|$. **1055**. $\frac{a}{\alpha}x+\frac{b\alpha-a\beta}{\alpha^2}\ln|\alpha x+\beta|$. **1056**. $\frac{x^2}{2}+x+2\ln|x-1|$. **1057**. $\frac{x^2}{2}+2x+\ln|x+3|$. **1058**. $\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2+2x+3\ln|x-1|$. **1059**. $a^2x+2ab\ln|x-a|-\frac{b^2}{x-a}$. **1060**. $\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}$. 提示: $\int\frac{xdx}{(x+1)^2}=\int\frac{(x+1)-1}{(x+1)^2}dx=\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{(x+1)^2}$. **1061**. $-2b\sqrt{1-y}$. **1062**. $-\frac{2}{3b}\sqrt{(a-bx)^3}$. **1063**. $\sqrt{x^2+1}$. 解. $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}$. **1064**. $2\sqrt{x}+\frac{\ln^2x}{2}$. **1065**. $\frac{1}{\sqrt{15}}\arctan(x\sqrt{\frac{3}{5}})$. **1066**. $\frac{1}{4\sqrt{14}}\ln|\frac{x\sqrt{7}-2\sqrt{2}}{x\sqrt{7}+2\sqrt{2}}|$. **1067**. $\frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}}\times\ln|\frac{\sqrt{a+b}+x\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-x\sqrt{a-b}}|$. **1068**. $x-\sqrt{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}$. **1069**. $-(\frac{x^2}{2}+\frac{a^2}{2}\ln|a^2-x^2|)$. **1070**. $x-\frac{5}{2}\ln(x^2+4)+\arctan\frac{x}{2}$. **1071**. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(2\sqrt{2}x+\sqrt{7+8x^2})$. **1072**. $\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin(x\sqrt{\frac{5}{7}})$. **1073**. $\frac{1}{3}\ln|3x^2-2|-\frac{5}{2\sqrt{6}}\ln|\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}|$. **1074**. $\frac{3}{\sqrt{35}}\arctan(\sqrt{\frac{5}{7}}x)-\frac{1}{5}\ln(5x^2+$

7). **1075.** $\frac35\sqrt{5x^2+1}+\frac{1}{\sqrt5}\ln(x\sqrt5+\sqrt{5x^2+1})$. **1076.** $\sqrt{x^2-4}+3\ln|x+\sqrt{x^2-4}|$. **1077.** $\frac12\ln|x^2-5|$. **1078.** $\frac14\ln(2x^2+3)$. **1079.** $\frac{1}{2a}\ln(a^2x^2+b^2)+\frac1a\arctan\frac{ax}{b}$. **1080.** $\frac12\arcsin\frac{x^2}{a^2}$. **1081.** $\frac13\arctan x^3$. **1082.** $\frac13\ln|x^3+\sqrt{x^6-1}|$. **1083.** $\frac23\sqrt{(\arcsin x)^3}$. **1084.** $\frac{(\arctan\frac x2)^2}{4}$. **1085.** $\frac18\ln(1+4x^2)-\frac{\sqrt{(\arctan 2x)^3}}{3}$. **1086.** $2\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$. **1087.** $-\frac{a}{m}e^{-mx}$. **1088.** $-\frac{1}{3\ln4}4^{2-3x}$. **1089.** e^t+e^{-t}. **1090.** $\frac a2 e^{\frac{2x}{a}}+2x-\frac a2e^{-\frac{2x}{a}}$. **1091.** $\frac{1}{\ln a-\ln b}(\frac{a^x}{b^x}-\frac{b^x}{a^x})-2x$. **1092.** $\frac{2}{\ln a}(\frac13 a^{\frac32x+2x}+a^{-\frac12x})$. **1093.** $-\frac{1}{2e^{x^2+1}}$. **1094.** $\frac{1}{2\ln7}7^{x^2}$. **1095.** $-e^{\frac1x}$. **1096.** $\frac{2}{\ln5}5^{\sqrt x}$. **1097.** $\ln|e^x-1|$. **1098.** $-\frac{2}{3b}\sqrt{(a-be^x)^3}$. **1099.** $\frac{3a}{4}(e^{\frac xa}+1)^{\frac43}$. **1100.** $\frac x3-\frac{1}{3\ln2}\ln(2^x+3)$. 提示: $\frac{1}{2^x+3}\equiv\frac13(1-\frac{2^x}{2^x+3})$. **1101.** $\frac{1}{\ln a}\arctan(a^x)$. **1102.** $-\frac{1}{2b}\ln\left|\frac{1+e^{-bx}}{1-e^{-bx}}\right|$. **1103.** $\arcsin e^t$. **1104.** $-\frac1b\cos(a+bx)$. **1105.** $\sqrt2\sin\frac{x}{\sqrt2}$. **1106.** $x-\frac{1}{2a}\cos2ax$. **1107.** $2\sin\sqrt x$. **1108.** $-\ln10\cdot\cos(\lg x)$. **1109.** $\frac x2-\frac{\sin2x}{4}$. 提示: $\sin^2x=\frac12(1-\cos2x)$. **1110.** $\frac x2+\frac{\sin2x}{4}$. 提示: 参阅 1109 题提示. **1111.** $\frac1a\tan(ax+b)$. **1112.** $-\frac{\cot ax}{a}-x$. **1113.** $a\ln\left|\tan\frac{x}{2a}\right|$. **1114.** $\frac1{15}\ln\left|\tan(\frac{5x}{2}+\frac\pi8)\right|$. **1115.** $\frac1a\ln\left|\tan\frac{ax+b}{2}\right|$. **1116.** $\frac12\tan(x^2)$. **1117.** $\frac12\cos(1-x^2)$. **1118.** $x-\frac{1}{\sqrt2}\cot\sqrt2x-\sqrt2\ln\left|\tan\frac{\sqrt2x}{2}\right|$. **1119.** $-\ln|\cos x|$. **1120.** $\ln|\sin x|$. **1121.** $(a-b)\ln\left|\sin\frac{x}{a-b}\right|$. **1122.** $5\ln\left|\sin\frac x5\right|$. **1123.** $-2\ln|\cos\sqrt x|$. **1124.** $\frac12\ln|\sin(x^2+1)|$. **1125.** $\ln|\tan x|$. **1126.** $\frac a2\sin^2\frac xa$. **1127.** $\frac{\sin^46x}{24}$. **1128.** $-\frac{1}{4a\sin^4ax}$. **1129.** $-\frac13\ln(3+\cos3x)$. **1130.** $-\frac12\sqrt{\cos2x}$. **1131.** $-\frac29\sqrt{(1+3\cos^2x)^3}$. **1132.** $\frac34\tan^4\frac x3$. **1133.** $\frac23\sqrt{\tan^3x}$. **1134.** $-\frac{3\cot^{\frac53}x}{5}$. **1135.** $\frac13(\tan3x+\frac{1}{\cos3x})$. **1136.** $\frac1a(\ln\left|\tan\frac{ax}{2}\right|+2\sin ax)$. **1137.** $\frac{1}{3a}\ln|b-a\cot3x|$. **1138.** $\frac25\operatorname{ch}5x-\frac35\operatorname{sh}5x$. **1139.** $-\frac x2+\frac14\operatorname{sh}2x$. **1140.** $\ln\left|\operatorname{th}\frac x2\right|$. **1141.** $2\arctan e^x$. **1142.** $\ln|\operatorname{th}x|$. **1143.** $\ln\operatorname{ch}x$. **1144.** $\ln|\operatorname{sh}x|$. **1145.** $-\frac5{12}\sqrt[5]{(5-x^2)^6}$. **1146.** $\frac14\ln|x^4-4x+1|$. **1147.** $\frac{1}{4\sqrt5}\arctan\frac{x^4}{\sqrt5}$. **1148.** $-\frac12e^{-x^2}$. **1149.** $\sqrt{\frac32}\arctan(x\sqrt{\frac32})-\frac{1}{\sqrt3}\ln(x\sqrt3+\sqrt{2+3x^2})$. **1150.** $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-2\ln|x+1|$. **1151.** $-\frac{2}{\sqrt{e^x}}$. **1152.** $\ln|x+\cos x|$. **1153.** $\frac13(\ln|\sec3x+\tan3x|+\frac{1}{\sin3x})$. **1154.** $-\frac{1}{\ln x}$. **1155.** $\ln|\tan x+\sqrt{\tan^2x-2}|$. **1156.** $\sqrt2\arctan(\sqrt2x)-\frac{1}{4(2x^2+1)}$. **1157.** $\frac{a^{\sin x}}{\ln a}$. **1158.** $\frac{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}{2}$. **1159.** $\frac12\arcsin(x^2)$. **1160.** $\frac1a\tan ax-x$. **1161.** $\frac x2-\frac{\sin x}{2}$. **1162.** $\arcsin\frac{\tan x}{2}$. **1163.** $a\ln\left|\tan(\frac{x}{2a}+\frac\pi4)\right|$. **1164.** $\frac34\sqrt[3]{(1+\ln x)^4}$. **1165.** $-2\ln|\cos\sqrt{x-1}|$. **1166.** $\frac12\ln\left|\tan\frac{x^2}{2}\right|$. **1167.** $e^{\arctan x}+\frac{\ln^2(1+x^2)}{4}+\arctan x$. **1168.** $-\ln|\sin x+\cos x|$. **1169.** $\sqrt2\ln\left|\tan\frac{x}{2\sqrt2}\right|-2x-\sqrt2\cos\frac{x}{\sqrt2}$. **1170.** $x+\frac1{\sqrt2}\ln\left|\frac{x-\sqrt2}{x+\sqrt2}\right|$. **1171.** $\ln|x|+2\arctan x$. **1172.** $e^{\sin^2x}$. **1173.** $\frac5{\sqrt3}\arcsin\frac{\sqrt3x}{2}+\sqrt{4-3x^2}$. **1174.** $x-\ln(1+e^x)$. **1175.** $\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan(x\sqrt{\frac{a-b}{a+b}})$. **1176.** $\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-2})$. **1177.** $\frac1a\ln|\tan ax|$. **1178.** $-\frac{T}{2\pi}\cos(\frac{2\pi t}{T}+\varphi_0)$. **1179.** $\frac14\ln\left|\frac{2+\ln x}{2-\ln x}\right|$. **1180.** $-\frac12(\arccos\frac x2)^2$. **1181.** $-e^{-\tan x}$. **1182.** $\frac12\arcsin(\frac{\sin^2x}{\sqrt2})$. **1183.** $-2\cot2x$. **1184.** $\frac{(\arcsin x)^2}{2}-\sqrt{1-x^2}$. **1185.** $\ln(\sec x+\sqrt{\sec^2x+1})$. **1186.** $\frac{1}{4\sqrt5}\ln\frac{\sqrt5+\sin2x}{\sqrt5-\sin2x}$. **1187.** $\frac1{\sqrt2}\arctan(\frac{\tan x}{\sqrt2})$. 提示: $\int\frac{dx}{1+\cos^2x}=\int\frac{dx}{\sin^2x+2\cos^2x}=\int\frac{\frac{dx}{\cos^2x}}{\tan^2x+2}$. **1188.** $\frac23\sqrt{[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^3}$. **1189.** $\frac13\operatorname{sh}(x^3+3)$. **1190.** $\frac{1}{\ln3}3^{\operatorname{th}x}$. **1191.** a) $\frac1{\sqrt2}\arccos\frac{\sqrt2}{x}$, 当 $x>\sqrt2$; b) $-\ln(1+e^{-x})$; c) $\frac1{80}(5x^2-3)^8$; d) $\frac23(x+1)^3-2\sqrt{x+1}$; e) $\ln(\sin x+\sqrt{1+\sin^2x})$. **1192.** $\frac14\left[\frac{(2x+5)^{12}}{12}-\frac{5(2x+5)^{11}}{11}\right]$. **1193.** $2\left[\frac{\sqrt{x^3}}{3}-\frac x2+2\sqrt x-2\ln(1+\sqrt x)\right]$. **1194.** $\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|$. **1195.** $2\arctan\sqrt{e^x-1}$. **1196.** $\ln x-\ln2\ln|\ln x+2\ln2|$. **1197.** $\frac{(\arcsin x)^3}{3}$. **1198.** $\frac23(e^x-2)\sqrt{e^x+1}$. **1199.**

$\frac{2}{5}(\cos^2 x - 5)\sqrt{\cos x}$. **1200**. $\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}\right|$. 令 $x = \frac{1}{t}$. **1201**. $-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x$. **1202**. $-\frac{x^2}{3}\sqrt{2-x^2} - \frac{4}{3}\sqrt{2-x^2}$. **1203**. $\sqrt{x^2-a^2} - |a|\arccos\frac{|a|}{x}$. **1204**. 如果 $x > 0$, 则 $\arccos\frac{1}{x}$; 如果 $x < 0$, 则 $\arccos(-\frac{1}{x})$①. 令 $x = \frac{1}{t}$. **1205**. $\sqrt{x^2+1} - \ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|$. **1206**. $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x}$. 附注. 可用变换 $x = \frac{1}{z}$ 来代替三角变换. **1207**. $\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x$. **1208**. $2\arcsin\sqrt{x}$. **1210**. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|$. **1211**. $x\ln x - x$. **1212**. $x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. **1213**. $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$. **1214**. $\sin x - x\cos x$. **1215**. $\frac{x\sin 3x}{3} + \frac{\cos 3x}{9}$. **1216**. $-\frac{x+1}{e^x}$. **1217**. $-\frac{x\ln 2+1}{2^x\ln^2 2}$. **1218**. $\frac{e^{3x}}{27}(9x^2-6x+2)$. 解. 代替多次分部积分, 可用下面的待定系数法:

$$\int x^2 e^{3x}dx = (Ax^2+Bx+C)e^{3x}$$

或者求导后有

$$x^2e^{3x} = (Ax^2+Bx+C)3e^{2x} + (2Ax+B)e^{3x}.$$

约去 e^{3x}, 并比较 x 的同次幂系数得:

$$1 = 3A, \quad 0 = 3B+2A, \quad 0 = 3C+B,$$

由此得出 $A = \frac{1}{3}, B = -\frac{2}{9}, C = \frac{2}{27}$. 在一般形式 $\int P_n(x)e^{ax} = Q_n(x)e^{ax}$ 下, 其中 $P_n(x)$ 是给定的 n 次多项式, 而 $Q_n(x)$ 是含有待定系数的 n 次多项式. **1219**. $-e^{-x}(x^2+5)$. 参阅 1218** 题. **1220**. $-3e^{-\frac{x}{3}}(x^3+9x^2+54x+162)$. 参阅 1218** 题. **1221**. $-\frac{x\cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{8}$. **1222**. $\frac{2x^2+10x+11}{4}\sin 2x + \frac{2x+5}{4}\cos 2x$. 建议也采用待定系数法:

$$\int P_n(x)\cos\beta x dx = Q_n(x)\cos\beta x + R_n(x)\sin\beta x,$$

其中 $P_n(x)$ 是已给的 n 次多项式, 而 $Q_n(x)$ 与 $R_n(x)$ 是含有待定系数的 n 次多项式 (参阅 1218** 题). **1223**. $\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}$. **1224**. $x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x$. **1225**. $-\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2}$. **1226**. $2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}$. **1227**. $\frac{x^2+1}{2}\arctan x - \frac{x}{2}$. **1228**. $\frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{4}\arcsin x + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}$. **1229**. $x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$. **1230**. $-x\cot x + \ln|\sin x|$. **1231**. $-\frac{x}{\sin x} + \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$. **1232**. $\frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}$. **1233**. $\frac{3^x(\sin x + \cos x\ln 3)}{1+(\ln 3)^2}$. **1234**. $\frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}$. **1235**. $\frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]$. **1236**. $-\frac{e^{-x^2}}{2}(x^2+1)$. **1237**. $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)$. **1238**. $(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x)\ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} - 3x$. **1239**. $\frac{x^2-1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| - x$. **1240**. $-\frac{\ln^2 x}{x} - \frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x}$. **1241**. $[\ln(\ln x) - 1]\cdot\ln x$. **1242**. $\frac{x^3}{3}\arctan 3x - \frac{x^2}{18} + \frac{1}{162}\ln(9x^2+1)$. **1243**. $\frac{1+x^2}{2}(\arctan x)^2 - x\arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. **1244**. $x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x$. **1245**. $-\frac{\arcsin x}{x} + \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right|$. **1246**. $-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{x}$. **1247**. $\frac{x\tan x}{2} + \frac{\ln|\cos 2x|}{4} - \frac{x^2}{2}$. **1248**. $\frac{e^{-x}}{2}(\frac{\cos 2x - 2\sin 2x}{5} - 1)$. **1249**. $\frac{x}{2} + \frac{x\cos(2\ln x) + 2x\sin(2\ln x)}{10}$. **1250**. $-\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan x$. 设 $u = x, dv = \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$, 可得 $du = dx, v = -\frac{1}{2(x^2+1)}$. 由此得出 $\int\frac{x^2dx}{(x^2+1)^2} = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \int\frac{dx}{2(x^2+1)} = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan x + C$. **1251**. $\frac{1}{2a^2}(\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + \frac{x}{x^2+a^2})$. 利用恒等式 $1 \equiv \frac{1}{a^2}[(x^2+a^2) - x^2]$. **1252**. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$ $(a > 0)$. 设 $u = \sqrt{a^2-x^2}, dv = dx$, 由此得出 $du = -\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}, v = x$, 从而

①今后, 在类似的情况下, 有时将指出只对被积函数存在域内任意部分适用的答案.

有 $\int\sqrt{a^2-x^2} = x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{-x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{(a^2-x^2)-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int\sqrt{a^2-x^2}dx + a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$. 亦即, $2\int\sqrt{a^2-x^2}dx = x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}$. **1253.** $\frac{x}{2}+\sqrt{A+x^2}+\frac{A}{2}\ln|x+\sqrt{A+x^2}|$. 参阅 1252* 题. **1254.** $-\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}$. 参阅 1252*题. **1255.** $\frac12\arctan\frac{x+1}{2}$. **1256.** $\frac12\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|$. **1257.** $\frac{2}{\sqrt{11}}\arctan\frac{6x-1}{\sqrt{11}}$. **1258.** $\frac12\ln(x^2-7x+13)+\frac{7}{\sqrt3}\arctan\frac{2x-7}{\sqrt3}$. **1259.** $\frac32\ln(x^2-4x+5)+4\arctan(x-2)$. **1260.** $x-\frac52\ln(x^2+3x+4)+\frac{9}{\sqrt7}\arctan\frac{2x+3}{\sqrt7}$. **1261.** $x+3\ln(x^2-6x+10)+8\arctan(x-3)$. **1262.** $\frac{1}{\sqrt2}\arcsin\frac{4x-3}{5}$. **1263.** $\arcsin(2x-1)$. **1264.** $\ln\left|x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right|$. **1265.** $3\sqrt{x^2-4x+5}$. **1266.** $-2\sqrt{1-x-x^2}-9\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt5}$. **1267.** $\frac15\sqrt{5x^2-2x+1}+\frac{1}{5\sqrt5}\ln(\sqrt5x-\frac{1}{\sqrt5}+\sqrt{5x^2-2x+1})$. **1268.** $\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right|$. **1269.** $-\arcsin\frac{2-x}{\sqrt5 x}$. **1270.** $\arcsin\frac{2-x}{\sqrt2(1-x)}$ $(x>\sqrt2)$. **1271.** $-\arcsin\frac{1}{x+1}$. **1272.** $\frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+5}+2\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+5})$. **1273.** $\frac{2x-1}{4}\sqrt{x-x^2}+\frac18\arcsin(2x-1)$. **1274.** $\frac{2x+1}{4}\sqrt{2-x-x^2}+\frac98\arcsin\frac{2x+1}{3}$. **1275.** $\frac14\ln\left|\frac{x^2-3}{x^2-1}\right|$. **1276.** $-\frac{1}{\sqrt3}\arctan\frac{3-\sin x}{\sqrt3}$. **1277.** $\ln(e^x+\frac12+\sqrt{1+e^x+e^{2x}})$. **1278.** $-\ln|\cos x+2+\sqrt{\cos^2x+4\cos x+1}|$. **1279.** $-\sqrt{1-4\ln x-\ln^2x}-2\arcsin\frac{2+\ln x}{\sqrt5}$. **1280.** $\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right|$ $(a\neq b)$. **1281.** $x+3\ln|x-3|-3\ln|x-2|$. **1282.** $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^4}\right|$. **1283.** $\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|$. **1284.** $5x+\ln\left|\frac{x^{\frac12}(x-4)^{\frac{161}{6}}}{(x-1)^{\frac73}}\right|$. **1285.** $\frac{1}{1+x}+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|$. **1286.** $\frac14x+\frac1{16}\ln\left|\frac{x^{16}}{(2x-1)^7(2x+1)^9}\right|$. **1287.** $\frac{x^2}{2}-\frac{11}{(x-2)^2}-\frac{8}{x-2}$. **1288.** $-\frac{9}{2(x-3)}-\frac{1}{2(x+1)}$. **1289.** $\frac{8}{49(x-5)}-\frac{27}{49(x+2)}+\frac{30}{343}\ln\left|\frac{x-5}{x+2}\right|$. **1290.** $-\frac{1}{2(x^2-3x+2)^2}$. **1291.** $x+\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right|$. **1292.** $x+\frac14\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac12\arctan x$. **1293.** $\frac1{52}\ln|x-3|-\frac1{20}\ln|x-1|+\frac1{65}\ln(x^2+4x+5)+\frac{7}{130}\arctan(x+2)$. **1294.** $\frac16\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac1{\sqrt3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt3}$. **1295.** $\frac{1}{4\sqrt2}\ln\frac{x^2+\sqrt2x+1}{x^2-\sqrt2x+1}+\frac{\sqrt2}{4}\arctan\frac{\sqrt2x}{1-x^2}$. **1296.** $\frac14\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt3}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt3x}$. **1297.** $\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{\arctan x}{2}$. **1298.** $\frac{2x-1}{2(x^2+2x+2)}+\arctan(x+1)$. **1299.** $\ln|x+1|+\frac{x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{5}{3\sqrt3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt3}-\frac12\ln(x^2+x+1)$. **1300.** $\frac{3x-17}{2(x^2-4x+5)}+\frac12\ln(x^2-4x+5)+\frac{15}{2}\arctan(x-2)$. **1301.** $\frac{-x^2+x}{4(x+1)(x^2+1)}-\frac12\ln|x+1|-\frac14\ln(x^2+1)+\frac14\arctan x$. **1302.** $\frac38\arctan x-\frac{x}{4(x^4-1)}-\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$. **1303.** $\frac{15x^5+40x^3+33x}{48(1+x^2)^3}+\frac{15}{48}\arctan x$. **1304.** $x-\frac{x-3}{x^2-2x+2}+2\ln(x^2-2x+2)+\arctan(x-1)$. **1305.** $\frac1{21}(8\ln|x^3+8|-\ln|x^3+1|)$. **1306.** $\frac12\ln|x^4-1|-\frac14\ln|x^8+x^4-1|-\frac{1}{2\sqrt5}\ln\frac{2x^4+1-\sqrt5}{2x^4+1+\sqrt5}$. **1307.** $-\frac{13}{2(x-4)^2}+\frac{3}{x-4}+2\ln\left|\frac{x-4}{x-2}\right|$. **1308.** $\frac13\left(2\ln\left|\frac{x^3+1}{x^3}\right|-\frac1{x^3}-\frac1{x^3+1}\right)$. **1309.** $\frac{1}{x-1}+\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|$. **1310.** $\ln|x|-\frac17\ln|x^7+1|$. 设 $1=(x^7+1)-x^7$. **1311.** $\ln|x|-\frac15\ln|x^5+1|+\frac{1}{5(x^5+1)}$. **1312.** $\frac13\arctan(x+1)-\frac16\arctan\frac{x+1}{2}$. **1313.** $-\frac{1}{9(x-1)^9}-\frac{1}{4(x-1)^8}-\frac{1}{7(x-1)^7}$. **1314.** $-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{3x^3}-\frac1x-\arctan x$. **1315.** $2\sqrt{x-1}\left[\frac{(x-1)^3}{7}+\frac{3(x-1)^2}{5}+x\right]$. **1316.** $\frac{3}{10a^2}[2\sqrt[3]{(ax+b)^5}-5b\sqrt[3]{(ax+b)^2}]$. **1317.** $2\arctan\sqrt{x+1}$. **1318.** $6\sqrt[6]{x}+3\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}-6\ln(1+\sqrt[6]{x})$. **1319.** $\frac67x\sqrt[6]{x}-\frac65\sqrt[6]{x^5}-\frac32\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}-3\ln|1+\sqrt[3]{x}|+6\arctan\sqrt[6]{x}$. **1320.** $\ln\left|\frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{x+2+\sqrt{x+1}}\right|-\frac{2}{\sqrt3}\arctan\frac{2(\sqrt{x+1}+1)}{\sqrt3}$. **1321.** $2\sqrt{x}-2\sqrt2\arctan\sqrt{\frac{x}{2}}$. **1322.** $-2\arctan\sqrt{1-x}$. **1323.** $\frac{\sqrt{x^2-1}}{2}(x-2)+\frac12\ln|x+\sqrt{x^2-1}|$. **1324.** $\frac13\ln\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2}+\frac{2}{\sqrt3}\arctan\frac{2z+1}{\sqrt3}+\frac{2z}{z^3-1}$, 其中 $z=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$. **1325.** $-\frac{\sqrt{2x+3}}{x}$. **1326.** $\frac{2x+3}{4}\sqrt{x^2-x+1}-\frac18\ln(2x-1+2\sqrt{x^2-x+1})$. **1327.** $-\frac{8+4x^2+3x^4}{15}\sqrt{1-x^2}$. **1328.** $(\frac5{16}x-\frac5{24}x^3+\frac16x^5)\sqrt{1-x^2}-\frac5{16}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. **1329.** $(\frac{1}{4x^4}+\frac{3}{8x^2})\sqrt{x^2-1}-\frac38\arcsin\frac1x$. **1330.** $\frac{1}{2(x+1)^2}\sqrt{x^2+2x}-\frac12\arcsin\frac{1}{x+1}$. **1331.** $R+\ln|x|+\frac32\ln(x-\frac12+R)-\ln(1-\frac{x}{2}+R)$. 其中 $R=\sqrt{x^2-x+1}$. **1332.** $\frac12\frac{1+x^2}{\sqrt{1+2x^2}}$.

1333. $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{x^{-4}+1}+1}{\sqrt[4]{x^{-4}+1}-1}-\frac{1}{2}\arctan\sqrt[4]{x^{-4}+1}$. **1334.** $\frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}$. **1335.** $\frac{1}{10}\ln\frac{(z-1)^2}{z^2+z+1}+\frac{\sqrt{3}}{5}\arctan\frac{2z+1}{\sqrt{3}}$, 其中 $z=\sqrt[5]{1+x^5}$. **1336.** $-\frac{1}{8}\frac{4+3x^3}{x(2+x^3)^{2/3}}$. **1337.** $-2\sqrt[3]{(x^{-\frac{3}{4}}+1)^2}$. **1338.** $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x$. **1339.** $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x$. **1340.** $\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}$. **1341.** $\frac{1}{4}\cos^8\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\cos^6\frac{x}{2}$. **1342.** $\frac{\sin^2 x}{2}-\frac{1}{2\sin^2 x}-2\ln|\sin x|$. **1343.** $\frac{3x}{8}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}$. **1344.** $\frac{x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}$. **1345.** $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}$. **1346.** $\frac{5}{16}x+\frac{1}{12}\sin 6x+\frac{1}{64}\sin 12x-\frac{1}{144}\sin^3 6x$. **1347.** $-\cot x-\frac{\cot^3 x}{3}$. **1348.** $\tan x+\frac{2}{3}\tan^3 x+\frac{1}{5}\tan^5 x$. **1349.** $-\frac{\cot^3 x}{3}-\frac{\cot^5 x}{5}$. **1350.** $\tan x+\frac{\tan^3 x}{3}-2\cot 2x$. **1351.** $\frac{1}{2}\tan^2 x+3\ln|\tan x|-\frac{3}{2\tan^2 x}-\frac{1}{4\tan^4 x}$. **1352.** $\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}+2\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$. **1353.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\ln\left|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\right|\right]$. **1354.** $-\frac{\cos x}{4\sin^4 x}-\frac{3\cos x}{8\sin^2 x}+\frac{3}{8}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$. **1355.** $\frac{\sin 4x}{16\cos^4 4x}+\frac{3\sin 4x}{32\cos^2 4x}+\frac{3}{32}\ln\left|\tan(2x+\frac{\pi}{4})\right|$. **1356.** $\frac{1}{5}\tan 5x-x$. **1357.** $-\frac{\cot^2 x}{2}-\ln|\sin x|$. **1358.** $-\frac{1}{3}\cot^3 x+\cot x+x$. **1359.** $\frac{3}{2}\tan^2\frac{x}{3}+\tan^3\frac{x}{3}-3\tan\frac{x}{3}+3\ln\left|\cos\frac{x}{3}\right|+x$. **1360.** $\frac{x^2}{4}-\frac{\sin 2x^2}{8}$. **1361.** $-\frac{\cot^3 x}{3}$. **1362.** $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\cos^4 x}+\frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^{10} x}-\frac{3}{16}\sqrt[3]{\cos^{16} x}$. **1363.** $2\sqrt{\tan x}$. **1364.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{z^2+z\sqrt{2}+1}{z^2-z\sqrt{2}+1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{z\sqrt{2}}{z^2-1}$. 其中 $z=\sqrt{\tan x}$. **1365.** $-\frac{\cos 8x}{16}+\frac{\cos 2x}{4}$. **1366.** $-\frac{\sin 25x}{50}+\frac{\sin 5x}{10}$. **1367.** $\frac{3}{5}\sin\frac{5}{6}x+3\sin\frac{x}{6}$. **1368.** $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\cos x$. **1369.** $\frac{\sin 2ax}{4a}+\frac{x\cos 2b}{2}$. **1370.** $\frac{t\cos\varphi}{2}-\frac{\sin(2\omega t+\varphi)}{4\omega}$. **1371.** $\frac{\sin x}{2}+\frac{\sin 5x}{20}+\frac{\sin 7x}{28}$. **1372.** $\frac{1}{24}\cos 6x-\frac{1}{16}\cos 4x-\frac{1}{8}\cos 2x$. **1373.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\tan\frac{x}{2}}{2-\tan\frac{x}{2}}\right|$. **1374.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8})\right|$. **1375.** $x-\tan\frac{x}{2}$. **1376.** $-x+\tan x+\sec x$. **1377.** $\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}-5}{\tan\frac{x}{2}-3}\right|$. **1378.** $\arctan(1+\tan\frac{x}{2})$. **1379.** $\frac{12}{13}x-\frac{5}{13}\ln|2\sin x+3\cos x|$. 设 $3\sin x+2\cos x\equiv\alpha(2\sin x+3\cos x)+\beta(2\sin x+3\cos x)'$. 由此得出 $2\alpha-3\beta=3, 3\alpha+2\beta=2$, 亦即 $\alpha=\frac{12}{13},\beta=-\frac{5}{13}$. 从而有 $\int\frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx=\frac{12}{13}\int dx-\frac{5}{13}\int\frac{(2\sin x+3\cos x)'}{2\sin x+3\cos x}dx=\frac{12}{13}x-\frac{5}{13}\ln|2\sin x+3\cos x|$. **1380.** $-\ln|\cos x-\sin x|$. **1381.** $\frac{1}{2}\arctan(\frac{\tan x}{2})$. 分式的分子和分母同除以 $\cos^2 x$. **1382.** $\frac{1}{\sqrt{15}}\arctan(\frac{\sqrt{3}\tan x}{\sqrt{5}})$. 参阅 1381 题. **1383.** $\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{2\tan x+3-\sqrt{13}}{2\tan x+3+\sqrt{13}}\right|$. 参阅 1381 题. **1384.** $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\tan x-5}{\tan x}\right|$. 参阅 1381 题. **1385.** $-\frac{1}{2(1-\cos x)^2}$. **1386.** $\ln(1+\sin^2 x)$. **1387.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x}$. **1388.** $\frac{1}{4}\ln\frac{5-\sin x}{1-\sin x}$. **1389.** $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{3\tan\frac{x}{2}-1}{2\sqrt{2}}$. 利用恒等式 $\frac{1}{(2-\sin x)(3-\sin x)}\equiv\frac{1}{2-\sin x}-\frac{1}{3-\sin x}$. **1390.** $-x+2\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}+1}\right|$. 利用恒等式 $\frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}\equiv-1+\frac{2}{1+\sin x-\cos x}$. **1391.** $\frac{\operatorname{ch}^3 x}{3}-\operatorname{ch}x$. **1392.** $\frac{3x}{8}+\frac{\operatorname{sh}2x}{4}+\frac{\operatorname{sh}4x}{32}$. **1393.** $\frac{\operatorname{sh}^4 x}{4}$. **1394.** $-\frac{x}{8}+\frac{\operatorname{sh}4x}{32}$. **1395.** $\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{\operatorname{ch}x}$. **1396.** $-2\operatorname{cth}2x$. **1397.** $\ln(\operatorname{ch}x)-\frac{\operatorname{th}^4 x}{2}$. **1398.** $x-\operatorname{cth}x-\frac{\operatorname{cth}^3 x}{3}$. **1399.** $\arctan(\operatorname{th}x)$. **1400.** $\frac{2}{\sqrt{5}}\arctan(\frac{3\operatorname{th}\frac{x}{2}+2}{\sqrt{5}})$ (或 $\frac{2}{\sqrt{5}}\arctan(e^x\sqrt{5})$). **1401.** $-\frac{\operatorname{sh}^2 x}{2}-\frac{\operatorname{sh}2x}{4}-\frac{x}{2}$. 利用恒等式 $\frac{-1}{\operatorname{sh}x-\operatorname{ch}x}\equiv\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x$. **1402.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}\operatorname{ch}x+\sqrt{\operatorname{ch}2x})$. **1403.** $\frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+2\arcsin\frac{x+1}{2}$. **1404.** $\frac{x}{2}\sqrt{2+x^2}+\ln(x+\sqrt{2+x^2})$. **1405.** $\frac{x}{2}\sqrt{9+x^2}-\frac{9}{2}\ln(x+\sqrt{9+x^2})$. **1406.** $\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+2}+\frac{1}{2}\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+2})$. **1407.** $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-4}-2\ln|x+\sqrt{x^2-4}|$. **1408.** $\frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x}-\frac{1}{8}\ln|2x+1+2\sqrt{x^2+x}|$. **1409.** $\frac{x-3}{2}\sqrt{x^2-6x-7}-8\ln|x-3+\sqrt{x^2-6x-7}|$. **1410.** $\frac{1}{64}(2x+1)(8x^2+8x+17)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{27}{128}\ln(2x+1+\sqrt{x^2+x+1})$. **1411.** $2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$. **1412.** $\frac{x-1}{4\sqrt{x^2-2x+5}}$. **1413.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$. **1414.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right|$. **1415.** $\frac{e^{2x}}{2}(x^4-2x^3+5x^2-5x+\frac{7}{2})$. **1416.** $\frac{1}{6}(x^3+\frac{x^2}{2}\sin 6x+\frac{x}{6}\cos 6x-\frac{1}{36}\sin 6x)$. **1417.** $-\frac{x\cos 3x}{6}+\frac{\sin 3x}{18}+\frac{x\cos x}{2}-\frac{\sin x}{2}$. **1418.** $\frac{e^{2x}}{8}(2-\sin 2x-\cos 2x)$. **1419.** $\frac{e^{2x}}{2}(\frac{2\sin 2x+\cos 2x}{5}-\frac{4\sin 4x+\cos 4x}{17})$. **1420.** $\frac{e^x}{2}[x(\sin x+\cos x)-\sin x]$. **1421.** $-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\ln|e^x-1|+\frac{1}{6}\ln(e^x+2)$. **1422.** $x-\ln(2+e^x+2\sqrt{e^{2x}+x+1})$.

1423. $\frac{1}{3}[x^3\ln\frac{1+x}{1-x}+\ln(1-x^2)+x^2]$. **1424.** $x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2x$. **1425.** $(\frac{x^2}{2}-\frac{9}{100})\arccos(5x-2)-\frac{5x+6}{100}\sqrt{20x-25x^2-3}$. **1426.** $\frac{\sin x\operatorname{ch}x-\cos x\operatorname{sh}x}{2}$. **1427.** $I_n=\frac{1}{2(n-1)a^2}\cdot\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+(2n-3)I_{n-1}\right], I_2=\frac{1}{2a^2}(\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}), I_3=\frac{1}{4a^2}\left[\frac{x(3x^2+5a^2)}{2a^2(x^2+a^2)^2}+\frac{3}{2a^3}\arctan\frac{x}{a}\right]$. **1428.** $I_n=-\frac{\cos x\sin^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}, I_4=\frac{3x}{8}-\frac{\cos x\sin^3x}{4}-\frac{3\sin 2x}{16}, I_5=-\frac{\cos x\sin^4x}{5}-\frac{4}{15}\cos x\sin^2x-\frac{8}{15}\cos x$. **1429.** $I_n=\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}, I_3=\frac{\sin x}{2\cos^2x}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\right|, I_4=\frac{\sin x}{3\cos^3x}+\frac{2}{3}\tan x$. **1430.** $I_n=-x^ne^{-x}+nI_{n-1}, I_{10}=-e^{-x}(x^{10}+10x^9+10\cdot 9x^8+\cdots+10\cdot 9\cdot 8\cdot\cdots\cdot 2x+10\cdot 9\cdot\cdots\cdot 1)$. **1431.** $\frac{1}{\sqrt{14}}\arctan\frac{\sqrt{2}(x-1)}{\sqrt{7}}$. **1432.** $\ln\sqrt{x^2-2x+2}-4\arctan(x-1)$. **1433.** $\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{1}{4}\ln(x^2+x+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\arctan(2x+1)$. **1434.** $\frac{1}{5}\ln\sqrt{\frac{x^2}{x^2+5}}$. **1435.** $2\ln\left|\frac{x+3}{x+2}\right|-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$. **1436.** $\frac{1}{2}(\ln\left|\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right|-\frac{1}{x+1})$. **1437.** $\frac{1}{4}(\frac{x}{x^2+2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}})$. **1438.** $\frac{1}{4}(\frac{2x}{1-x^2}+\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|)$. **1439.** $\frac{1}{6}\frac{x-2}{(x^2-x+1)^2}+\frac{1}{6}\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. **1440.** $\frac{x(3+2\sqrt{x})}{1-2\sqrt{x}}$. **1441.** $-\frac{1}{x}-\frac{4}{3x\sqrt{x}}-\frac{1}{2x^2}$. **1442.** $\ln(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1})$. **1443.** $\sqrt{2x}-\frac{3}{5}\sqrt[6]{(2x)^5}$. **1444.** $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}+1}$. **1445.** $\frac{2x-1}{\sqrt{4x^2-2x+1}}$. **1446.** $-2(\sqrt[4]{5-x}-1)^2-4\ln(1+\sqrt[4]{5-x})$. **1447.** $\ln|x+\sqrt{x^2-1}|-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$. **1448.** $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$. **1449.** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2+1}{\sqrt{2}}$. **1450.** $\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$. **1451.** $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{x}\right|-\frac{1}{8\sqrt{3}}\arcsin\frac{2(x+1)}{x+4}$. 提示. $\frac{1}{x^2+4x}=\frac{1}{4}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4})$. **1452.** $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-9}-\frac{9}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-9}|$. **1453.** $\frac{1}{16}(8x-1)\sqrt{x-4x^2}+\frac{1}{64}\arcsin(8x-1)$. **1454.** $\ln\left|\frac{x}{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}\right|$. **1455.** $\frac{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}{3}-\frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+2}-\frac{1}{2}\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})$. **1456.** $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3x^3}$. **1457.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{\sqrt{1-x^3}+1}\right|$. **1458.** $-\frac{1}{3}\ln|z-1|+\frac{1}{6}\ln(z^2+z+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2z+1}{\sqrt{3}}$, 其中 $z=\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$. **1459.** $\frac{5}{2}\ln(x^2+\sqrt{1+x^4})$. **1460.** $\frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}$. **1461.** $\ln|\tan x|-\cot^2x-\frac{1}{4}\cot^4x$. **1462.** $-\cot x-\frac{2\sqrt{(\cot x)^3}}{3}$. **1463.** $\frac{5}{12}(\cos^2x-6)\sqrt[5]{\cos^2x}$. **1464.** $-\frac{\cos 5x}{20\sin^4 5x}-\frac{3\cos 5x}{40\sin^2 5x}+\frac{3}{40}\ln\left|\tan\frac{5x}{2}\right|$. **1465.** $\frac{\tan^3x}{3}+\frac{\tan^5x}{5}$. **1466.** $\frac{1}{4}\sin 2x$. **1467.** $\tan^2(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})+2\ln\left|\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\right|$. **1468.** $-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{4\tan\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}$. **1469.** $\frac{1}{\sqrt{10}}\arctan(\frac{2\tan x}{\sqrt{10}})$. **1470.** $\arctan(2\tan x+1)$. **1471.** $\frac{1}{2}\ln|\tan x+\sec x|-\frac{1}{2}\csc\ x$. **1472.** $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}})-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{2}})$. **1473.** $\ln|\tan x+2+\sqrt{\tan^2x+4\tan x+1}|$. **1474.** $\frac{1}{a}\ln(\sin ax+\sqrt{a^2+\sin^2ax})$. **1475.** $\frac{1}{3}x\tan 3x+\frac{1}{9}\ln|\cos 3x|$. **1476.** $\frac{x^2}{4}-\frac{x\sin 2x}{4}-\frac{\cos 2x}{8}$. **1477.** $\frac{1}{3}e^{x^3}$. **1478.** $\frac{e^{2x}}{4}(2x-1)$. **1479.** $\frac{x^3}{3}\ln\sqrt{1-x}-\frac{1}{6}\ln|x-1|-\frac{x^3}{18}-\frac{x^2}{12}-\frac{x}{6}$. **1480.** $\sqrt{1+x^2}\arctan x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. **1481.** $\frac{1}{3}\sin\frac{3x}{2}-\frac{1}{10}\sin\frac{5x}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$. **1482.** $-\frac{1}{1+\tan x}$. **1483.** $\ln|1+\cot x|-\cot x$. **1484.** $\frac{\operatorname{sh}^2x}{2}$. **1485.** $-2\operatorname{ch}\sqrt{1-x}$. **1486.** $\frac{1}{4}\ln\operatorname{ch}2x$. **1487.** $-x\operatorname{cth}x+\ln|\operatorname{sh}x|$. **1488.** $\frac{1}{2e^x}-\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\ln|e^x-2|$. **1489.** $\frac{1}{2}\arctan\frac{e^x-3}{2}$. **1490.** $\frac{4}{7}\sqrt[4]{(e^x+1)^7}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{(e^x+1)^3}$. **1491.** $\frac{1}{\ln 4}\ln\left|\frac{1+2^x}{1-2^x}\right|$. **1492.** $-\frac{10^{-2x}}{2\ln 10}(x^2-1+\frac{x}{\ln 10}+\frac{1}{2\ln^2 10})$. **1493.** $2\sqrt{e^x+1}+\ln\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}$. **1494.** $\ln\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right|-\frac{\arctan x}{x}$. **1495.** $\frac{1}{4}\left(x^4\arcsin\frac{1}{x}+\frac{x^2+2}{3}\sqrt{x^2-1}\right)$. **1496.** $\frac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)$. **1497.** $\frac{1}{5}\left(-x^2\cos 5x+\frac{2}{5}x\sin 5x+3x\cos 5x+\frac{2}{25}\cos 5x-\frac{3}{5}\sin 5x\right)$. **1498.** $\frac{1}{2}\left[(x^2-2)\arctan(2x+3)+\frac{3}{4}\ln(2x^2+6x+5)-\frac{x}{2}\right]$. **1499.** $\frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}+(x-\frac{1}{2})\arcsin\sqrt{x}$. **1500.** $\frac{x|x|}{2}$.

第五章

1501. $b-a$. **1502**. $v_0T-g\frac{T^2}{2}$. **1503**. 3. **1504**. $\frac{2^{10}-1}{\ln 2}$. **1505**. 156. 将 OX 轴上从 $x=1$ 到 $x=5$ 的区间进行划分: 使分点的横坐标构成几何级数 $x_0=1, x_1=x_0q, x_2=x_0q^2, \cdots, x_n=x_0q^n$. **1506**. $\ln\frac{b}{a}$. 参阅第 1505 题. **1507**. $1-\cos x$. 利用公式 $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\cdots+\sin n\alpha=\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left[\cos\frac{\alpha}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})\alpha\right]$. **1508**. 1) $\frac{dI}{da}=-\frac{1}{\ln a}$; 2) $\frac{dI}{db}=\frac{1}{\ln b}$. **1509**. $\ln x$. **1510**. $-\sqrt{1+x^4}$. **1511**. $2xe^{-x^4}-e^{-x^2}$. **1512**. $\frac{\cos x}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x^2}$. **1513**. $x=n\pi$ $(n=1,2,3,\cdots)$. **1514**. $\ln 2$. **1515**. $-\frac{3}{8}$. **1516**. $e^x-e^{-x}=2\operatorname{sh}x$. **1517**. $\sin x$. **1518**. $\frac{1}{2}$. 和 $s_n=\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}\right)$ 可以看作为函数 $f(x)=x$ 在闭区间 $[0,1]$ 上的积分和. 所以 $\lim_{\Delta x\to 0}s_n=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$. **1519**. $\ln 2$. 和 $s_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$ 可以看作为函数 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 在区间 $[0,1]$ 上的积分和, 其中分点为 $x_k=\frac{k}{n}$ $(k=1,2,\cdots,n)$. 所以 $\lim_{\Delta x\to 0}s_n=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln 2$. **1520**. $\frac{1}{p+1}$. **1521**. $\frac{7}{3}$. **1522**. $\frac{100}{3}=33\frac{1}{3}$. **1523**. $\frac{7}{4}$. **1524**. $\frac{16}{3}$. **1525**. $-\frac{2}{3}$. **1526**. $\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}$. **1527**. $\ln\frac{9}{8}$. **1528**. $35\frac{1}{45}-32\ln 3$. **1529**. $\arctan 3-\arctan 2=\arctan\frac{1}{7}$. **1530**. $\ln\frac{4}{3}$. **1531**. $\frac{\pi}{16}$. **1532**. $1-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **1533**. $\frac{\pi}{4}$. **1534**. $\frac{\pi}{6}$. **1535**. $\frac{1}{3}\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **1536**. $\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$. **1537**. $\frac{2}{3}$. **1538**. $\ln 2$. **1539**. $1-\cos 1$. **1540**. 0. **1541**. $\frac{8}{9\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6}$. **1542**. $\arctan e-\frac{\pi}{4}$. **1543**. $\operatorname{sh}1=\frac{1}{2}(e-\frac{1}{e})$. **1544**. $\operatorname{th}(\ln 3)-\operatorname{th}(\ln 2)=\frac{1}{5}$. **1545**. $-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sh}2\pi$. **1546**. 2. **1547**. 发散. **1548**. 当 $p<1$ 时为 $\frac{1}{1-p}$; 当 $p\geqslant 1$ 时发散. **1549**. 发散. **1550**. $\frac{\pi}{2}$. **1551**. 发散. **1552**. 1. **1553**. 当 $p>1$ 时为 $\frac{1}{p-1}$; 当 $p\leqslant 1$ 时发散. **1554**. π. **1555**. $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$. **1556**. 发散. **1557**. 发散. **1558**. $\frac{1}{\ln 2}$. **1559**. 发散. **1560**. $\frac{1}{\ln a}$. **1561**. 发散. **1562**. $\frac{1}{k}$. **1563**. $\frac{\pi^2}{8}$. **1564**. $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ln 3$. **1565**. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. **1566**. 发散. **1567**. 收敛. **1568**. 发散. **1569**. 收敛. **1570**. 收敛. **1571**. 收敛. **1572**. 发散. **1573**. 收敛. **1574**. 提示: $\mathrm{B}(p,q)=\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx$, 其中 $f(x)=x^{p-1}(1-x)^{q-1}$. 因为 $\lim_{\Delta x\to 0}f(x)x^{1-p}=1$ 和 $\lim_{\Delta x\to 0}(1-x)^{1-q}f(x)=1$, 所以当 $1-p<1$ 和 $1-q<1$, 亦即当 $p>0$ 和 $q>0$ 时两个积分都收敛. **1575**. 提示: $\Gamma(p)=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^\infty f(x)dx$, 其中 $f(x)=x^{p-1}e^{-x}$. 第一个积分当 $p>0$ 时收敛, 第二个积分对任意的 p 收敛. **1576**. 不. **1577**. $2\sqrt{2}\int_1^2\sqrt{t}dt$. **1578**. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1+\sin^2 t}}$. **1579**. $\int_{\ln 2}^{\ln 3}dt$. **1580**. $\int_0^\infty\frac{f(\arctan t)}{1+t^2}dt$. **1581**. $x=(b-a)t+a$. **1582**. $4-2\ln 3$. **1583**. $8-\frac{9}{2\sqrt{3}}\pi$. **1584**. $2-\frac{\pi}{2}$. **1585**. $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$. **1586**. $\frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}}$. **1587**. $1-\frac{\pi}{4}$. **1588**. $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$. **1589**. $4-\pi$. **1590**. $\frac{1}{5}\ln 112$. **1591**. $\ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}$. **1592**. $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$. **1593**. $\frac{\pi a^2}{8}$. **1594**. $\frac{\pi}{2}$. **1599**. $\frac{\pi}{2}-1$. **1600**. 1. **1601**. $\frac{e^2+3}{8}$. **1602**. $\frac{1}{2}(e^\pi+1)$. **1603**. 1. **1604**. $\frac{a}{a^2+b^2}$. **1605**. $\frac{b}{a^2+b^2}$. **1606**. 解: $\Gamma(p+1)=\int_0^\infty x^pe^{-x}dx$. 应用分部积分公式, 令 $x^p=u, e^{-x}dx=dv$. 由此得出

$$du=px^{p-1}dx, v=-e^{-x}$$

和

$$\Gamma(p+1)=[-x^pe^{-x}]_0^\infty+p\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx=p\Gamma(p) \qquad (*)$$

如果 p 是自然数, 则应用上面公式 (*) p 次, 并考虑到

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx=1,$$

我们得到

$$\Gamma(p+1)=p!.$$

1607. 当 $n=2k$ 为偶数, $I_{2k}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2k-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2k}\frac{\pi}{2}$; 当 $n=2k+1$ 为奇数, $I_{2k+1}=\frac{2\cdot4\cdot6\cdots2k}{1\cdot3\cdot5\cdots(2k+1)}$. $I_9=\frac{128}{315}, I_{10}=\frac{63\pi}{512}$. **1608.** $\frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$. **1609.** $\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right)$. 令 $\sin^2x=t$. **1610.** a) 正号; b) 负号; c) 正号. (应当作出被积函数当自变量的值在积分区间时的图形). **1611.** a) 第一; b) 第二; c) 第一. **1612.** $\frac{1}{3}$. **1613.** a. **1614.** $\frac{1}{2}$. **1615.** $\frac{3}{8}$. **1616.** $2\arcsin\frac{1}{3}$. **1617.** $2<I<\sqrt{5}$. **1618.** $\frac{2}{9}<I<\frac{2}{7}$. **1619.** $\frac{2}{13}\pi<I<\frac{2}{7}\pi$. **1620.** $0<I<\frac{\pi^2}{32}$. (被积函数单调增加). **1621.** $\frac{1}{2}<I<\frac{\sqrt{2}}{2}$. **1623.** $S=\frac{32}{3}$. **1624.** 1. **1625.** $\frac{1}{2}$. 考虑到函数符号. **1626.** $4\frac{1}{4}$. **1627.** 2. **1628.** $\ln2$. **1629.** $m^2\ln3$. **1630.** πa^2. **1631.** 12. **1632.** $\frac{4}{3}p^2$. **1633.** $4\frac{1}{2}$. **1634.** $10\frac{2}{3}$. **1635.** 4. **1636.** $\frac{32}{3}$. **1637.** $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$. **1638.** $e+\frac{1}{e}-2=2(\operatorname{ch}1-1)$. **1639.** $ab[2\sqrt{3}-\ln(2+\sqrt{3})]$. **1640.** $\frac{3}{8}\pi a^2$. 参阅附录 Ⅵ, 图 27. **1641.** $2a^2e^{-1}$. **1642.** $\frac{4}{3}a^2$. **1643.** 15π. **1644.** $\frac{9}{2}\ln3$. **1645.** 1. **1646.** $3\pi a^2$. 参阅附录 Ⅵ, 图 23. **1647.** $a^2\left(2+\frac{\pi}{2}\right)$. 参阅附录 Ⅵ, 图 24. **1648.** $2\pi+\frac{4}{3}$ 和 $6\pi-\frac{4}{3}$. **1649.** $\frac{16}{3}\pi-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 和 $\frac{32}{3}\pi+\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **1650.** $\frac{3}{8}\pi ab$. **1651.** $3\pi a^2$. **1652.** $\pi(b^2+2ab)$. **1653.** $6\pi a^2$. **1654.** $\frac{3}{2}\pi a^2$. 对于参数 t 的变化范围为 $0\leqslant t\leqslant\infty$ 的闭圈. 参阅附录 Ⅵ, 图 22. **1655.** $\frac{3}{2}\pi a^2$. 参阅附录 Ⅵ, 图 28. **1656.** $8\pi^3a^2$. 参阅附录 Ⅵ, 图 30. **1657.** $\frac{\pi a^2}{8}$. **1658.** a^2. **1659.** $\frac{\pi a^2}{4}$. 参阅附录 Ⅵ, 图 33. **1660.** $\frac{9}{2}\pi$. **1661.** $\frac{14-8\sqrt{2}}{3}a^2$. **1662.** $\frac{\pi p^2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}$. **1663.** $a^2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **1664.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. 变换到极坐标. **1665.** $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$. **1666.** $\sqrt{h^2-a^2}$. 利用公式 $\operatorname{ch}^2\alpha-\operatorname{sh}^2\alpha=1$. **1667.** $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$. **1668.** $\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+\ln\frac{(\sqrt{1+e^2}-1)(\sqrt{2}+1)}{e}$. **1669.** $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. **1670.** $\ln(e+\sqrt{e^2-1})$. **1671.** $\ln(2+\sqrt{3})$. **1672.** $\frac{1}{4}(e^2+1)$. **1673.** $a\ln\frac{a}{b}$. **1674.** $2a\sqrt{3}$. **1675.** $\ln\frac{e^{2b}-1}{e^{2a}-1}+a-b=\ln\frac{\operatorname{sh}b}{\operatorname{sh}a}$. **1676.** $\frac{1}{2}aT^2$. 参阅附录 Ⅵ, 图 29. **1677.** $\frac{4(a^3-b^3)}{ab}$. **1678.** $16a$. **1679.** $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$. **1680.** $8a$. **1681.** $2a[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)]$. **1682.** $\frac{\sqrt{5}}{2}+\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. **1683.** $\frac{a\sqrt{1+m^2}}{m}$. **1684.** $\frac{1}{2}(4+\ln3)$. **1685.** $\frac{\pi a^5}{30}$. **1686.** $\frac{4}{3}\pi ab^2$. **1687.** $\frac{a^3\pi}{4}(e^2+4-e^{-2})$. **1688.** $\frac{3}{8}\pi^2$. **1689.** $v_x=\frac{\pi}{4}$. **1690.** $v_y=\frac{4}{7}\pi$. **1691.** $v_x=\frac{\pi}{2}, v_y=2\pi$. **1692.** $\frac{16\pi a^3}{5}$. **1693.** $\frac{32}{15}\pi a^3$. **1694.** $\frac{4}{3}\pi p^3$. **1695.** $\frac{3}{10}\pi$. **1696.** $\frac{\pi a^3}{2}(15-16\ln2)$. **1697.** $2\pi^2a^3$. **1698.** $\frac{\pi R^2H}{2}$. **1699.** $\frac{16}{15}\pi h^2a$. **1701.** a) $5\pi^2a^3$; b) $6\pi^3a^3$; c) $\frac{\pi a^3}{6}(9\pi^2-16)$. **1702.** $\frac{32}{105}\pi a^3$. **1703.** $\frac{8}{3}\pi a^3$. **1704.** $\frac{4}{21}\pi a^3$. **1705.** $\frac{h}{3}\left(AB+\frac{Ab+aB}{2}+ab\right)$. **1706.** $\frac{\pi abh}{3}$. **1707.** $\frac{128}{105}a^3$. **1708.** $\frac{8}{3}\pi a^2b$. **1709.** $\frac{1}{2}\pi a^2h$. **1710.** $\frac{16}{3}a^3$. **1711.** $\pi a^2\sqrt{pq}$. **1712.** $\pi abh\left(1+\frac{h^2}{3c^2}\right)$. **1713.** $\frac{4}{3}\pi abc$. **1714.** $\frac{8\pi}{3}(\sqrt{13^3}-1), \frac{16}{3}\pi a^2(5\sqrt{5}-8)$. **1715.** $2\pi[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)]$. **1716.** $\pi(\sqrt{5}-\sqrt{2})+\pi\ln\frac{2(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{5}+1}$. **1717.** $\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$. **1718.** $\frac{\pi a^2}{4}(e^2-e^{-2}+4)=\frac{\pi a^2}{2}(2+\operatorname{sh}2)$. **1719.** $\frac{12}{5}\pi a^2$. **1720.** $\frac{\pi}{3}(e-1)(e^2+e+4)$. **1721.** $4\pi^2ab$. 这里 $y=b\pm\sqrt{a^2-x^2}$. 取正号得到环的外表曲面, 取负号得到环的内部曲面. **1722.** 1) $2\pi b^2+\frac{2\pi ab}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon$; 2) $2\pi a^2+\frac{\pi b^2}{\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$, 其中 $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ (椭圆偏心率). **1723.** a) $\frac{64\pi a^2}{3}$; b) $16\pi^2a^2$; c) $\frac{32}{3}\pi a^2$. **1724.** $\frac{128}{5}\pi a^2$. **1725.** $2\pi a^2(2-\sqrt{2})$. **1726.** $\frac{128}{5}\pi a^2$. **1727.** $M_X=\frac{b}{2}\sqrt{a^2+b^2}, M_Y=\frac{a}{2}\sqrt{a^2+b^2}$. **1728.** $M_a=\frac{ab^2}{2}, M_b=\frac{a^2b}{2}$. **1729.** $M_X=M_Y=\frac{a^3}{6}, \bar{x}=\bar{y}=\frac{a}{3}$. **1730.** $M_X=M_Y=\frac{3}{5}a^2, \bar{x}=\bar{y}=\frac{2}{5}a$. **1731.** $2\pi a^2$. **1732.** $\bar{x}=0, \bar{y}=\frac{a}{4}\frac{2+\operatorname{sh}2}{\operatorname{sh}1}$.

1733. $\bar{x}=\frac{a\sin\alpha}{\alpha}, \bar{y}=0$. **1734**. $\bar{x}=\pi a, \bar{y}=\frac{4}{3}a$. **1735**. $\bar{x}=\frac{4a}{3\pi}, \bar{y}=\frac{4b}{3\pi}$. **1736**. $\bar{x}=\bar{y}=\frac{9}{20}$. **1737**. $\bar{x}=\pi a, \bar{y}=\frac{5}{6}a$. **1738**. $\left(0,0,\frac{a}{2}\right)$. 用水平平面将半球面划分成面积微元为 $d\sigma$ 的球面小带条, 从而有 $d\sigma=2\pi a dz$, 其中 dz 是带的高. 由此得出 $\bar{z}=\frac{2\pi\int_0^a azdz}{2\pi a^2}=\frac{a}{2}$. 由对称性, $\bar{x}=\bar{y}=0$. **1739**. 到圆锥顶的距离为高的 $\frac{3}{4}$. 解: 用平行于底面的平面将圆锥划分成薄层元素, 薄层的质量元素 $dm=\gamma\pi\rho^2 dz$, 其中 γ 是密度, z 是薄层到圆锥顶点的距离. $\rho=\frac{r}{h}z$, 由此得出 $\bar{z}=\frac{\pi\int_0^h\frac{r^2}{h^2}z^3dz}{\frac{1}{3}\pi r^2 h}=\frac{3}{4}h$. **1740**. $\left(0,0,\frac{3}{8}a\right)$. 解: 由对称性, $\bar{x}=\bar{y}=0$. 为了确定 $\bar{z}$, 将半球用水平平面划分成薄层元, 薄层元质量 $dm=\gamma\pi r^2dz$, 其中 γ 是密度, z 是薄层元到半球底面的距离, $r=\sqrt{a^2-z^2}$ 为截面半径, 由此得出 $\bar{z}=\frac{\pi\int_0^a(a^2-z^2)zdz}{\frac{2}{3}\pi a^3}=\frac{3}{8}a$ **1741**. $I=\pi a^3$. **1742**. $I_a=\frac{1}{3}ab^3, I_b=\frac{1}{3}a^3b$, **1743**. $I=\frac{4}{15}hb^3$. **1744**. $I_a=\frac{1}{4}\pi a^3b, I_b=\frac{1}{4}\pi a^3 b$. **1745**. $I=\frac{1}{2}\pi(R_2^4-R_1^4)$. 将圆环划分为同心的圆环元, 圆环元的质量 $dm=\gamma\cdot 2\pi rdr$, 从而转动惯量 $I=2\pi\int_{R_1}^{R_2}r^3dr=\frac{1}{2}\pi(R_2^4-R_1^4)$ $(\gamma=1)$. **1746**. $I=\frac{1}{10}\pi R^4H\gamma$. 将圆锥分割成平行于圆锥轴的圆柱形管筒元素, 这样管筒元素的体积 $dV=2\pi rhdr$, 其中 r 为管筒元素的内半径 (到圆锥轴的距离), $h=H\left(1-\frac{r}{R}\right)$ 为管筒元素的高, 于是转动惯量 $I=\gamma\int_0^R 2\pi H\left(1-\frac{r}{R}\right)r^3dr=\frac{r\pi R^4H}{10}$, 其中 γ 为圆锥密度. **1747**. $I=\frac{2}{5}Ma^2$. 将球划分成圆柱形筒元素, 它的轴为给定直径. 圆柱形筒的体积元 $dV=2\pi rhdr$, 其中 r 为筒的内径, $h=2a\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}$ 为它的高. 于是转动惯量 $I=4\pi a\gamma\int_0^a\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}r^3dr=\frac{8}{15}\pi a^5\gamma$, 其中 γ 为球密度, 又因为球质量 $M=\frac{4}{3}\pi a^3\gamma$, 所以 $I=\frac{2}{5}Ma^2$. **1748**. $V=2\pi^2a^2b, S=4\pi^2ab$. **1749**. a) $\bar{x}=\bar{y}=\frac{2}{5}a$; b) $\bar{x}=\bar{y}=\frac{9}{10}p$. **1750**. a) $\bar{x}=0, \bar{y}=\frac{4}{3}\frac{r}{\pi}$. (选择坐标轴使得 OX 轴与直径相合, 而原点选在圆心); b) $\bar{x}=\frac{h}{3}$. 解. 由三角形绕其底边旋转得到的双锥体体积 $V=\frac{1}{3}\pi bh^2$, 其中 b 为三角形底边长度, h 为三角形的高. 根据古尔金定理, 同一个体积为 $V=2\pi\bar{x}\frac{1}{2}bh$, 这里 $\bar{x}$ 为质心到底边的距离. 由此得出 $\bar{x}=\frac{h}{3}$. **1751**. $v_0t-\frac{gt^2}{2}$. **1752**. $\frac{c^2}{2g}\ln\left(1+\frac{v_0^2}{c^2}\right)$. **1753**. $x=\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t, v_{cp}=\frac{2}{\pi}v_0$. **1754**. $S=10^4$ m. **1755**. $v=\frac{A}{b}\ln\left(\frac{a}{a-bt}\right), h=\frac{A}{b^2}\left[bt_1-(a-bt_1)\ln\frac{a}{a-bt_1}\right]$. **1756**. $A=\frac{\pi\gamma}{2}gR^2H^2$. 提示: 水 (重力) 的微元等于厚度为 dx 的水体积重量, 即 $dF=\gamma\pi R^2gdx$, 其中 γ 为水的密度. 由此得出力所作功的微元 $dA=\gamma\pi R^2(H-x)dx$, 这里 x 为水层到桶底面的距离. **1757**. $A=\frac{\pi}{12}\gamma R^2H^2$. **1758**. $A=\frac{\pi\gamma}{4}R^4g$. **1759**. $A=\gamma g\pi R^3H$. **1760**. $A=\frac{mgh}{1+\frac{h}{R}}, A_\infty=mgR$. 解: 作用在质量为 m 的物体上的力为 $F=k\frac{mM}{r^2}$, 其中 r 是物体到地心的距离. 因为当 $r=R$ 时有 $F=mg$, 所以 $kM=gR^2$. 因此所求的功为 $A=\int_R^{R+h}k\frac{mM}{r^2}dr=kmM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right)=\frac{mgh}{1+\frac{h}{R}}$. 当 $h=\infty$ 有 $A_\infty=mgR$. **1761**. 1.6×10^{12} J. 电荷相互作用力 $F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_0q_1}{x^2}$, 其中 $\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N\cdot m}^2}$为电子常数. 于是将电荷 e_1 从点 x_1 移到 x_2 需要作的功为 $A=\frac{q_0q_1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x^2}=\frac{q_0q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)\approx1.6\times10^{12}$ J. **1762**. $A=0.08\pi\ln2$ J. 对于恒温过程 $pV=p_0V_0$, 空气从体积 V_0 膨胀到 V_1 所作的功为 $A=\int_{V_0}^{V_1}pdV=p_0V_0\ln\frac{V_1}{V_0}$. **1763**. $A\approx1.5$ J. 对于绝热过程有泊松定律 $pV^k=p_0V_0^k$ 成立, 其中 $k\approx1.4$. 由此得出 $A=\int_{V_0}^{V_1}\frac{p_0V_0^k}{V^k}dV=\frac{p_0V_0}{k-1}\left[1-\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{k-1}\right]$. **1764**. $A=\frac{4}{3}\pi\mu Pa$. 如果 a 为轴的底半径, 则在轴承的单位面积上受到的压力 $p=\frac{P}{\pi a^2}$. 于是距离中心为 r、宽度为 dr 的圆环元上的摩擦力等于 $\frac{2\mu P}{a^2}rdr$. 当轴转一圈时在环元上摩擦力所作的功元为 $dA=\frac{4\pi\mu P}{a^2}r^2dr$. 所以全部的功为 $A=\frac{4\pi\mu P}{a^2}\int_0^a r^2dr=\frac{4}{3}\pi\mu Pa$. **1765**. $\frac{1}{4}MR^2\omega^2$. 圆盘的动能元素 $dK=\frac{v^2dm}{2}=\frac{\rho r^2\omega^2}{2}d\sigma$, 其中 $d\sigma=2\pi rdr$ 是面积元素, r 是它到旋转轴的距离, ρ 是面密度, $\rho=\frac{M}{\pi R^2}$. 因此, $dK=\frac{M\omega^2}{2\pi R^2}r^2d\sigma$, 由此得出 $K=\frac{M\omega^2}{R^2}\int_0^R r^3dr=\frac{MR^2\omega^2}{4}$. **1766**. $K=$

$\frac{3}{20}MR^2\omega^2$. **1767**. $K=\frac{M}{5}R^2\omega^2=5.8\times10^7$ J. **1768**. $p=\frac{bh^2}{6}$. **1769**. $P=\frac{(a+2b)h^2}{6}\approx11.3\times10^7$ N . **1770**. $P=ab\gamma\pi h$. **1771**. $P=\frac{\pi R^2H}{3}$(总压力的方向垂直自下向上). **1772**. $533\frac{1}{3}$ g. **1773**. ≈419.16 J. **1774**. $M=\frac{hb^2p}{2}$. **1775**. $\frac{GMm}{a(a+l)}$ (G 为引力常数). **1776**. $\frac{\pi pa^4}{8\mu l}$. 解: $Q=\int_0^a v\cdot2\pi rdr=\frac{2\pi p}{4\mu l}\int_0^a(a^2-r^2)rdr=\frac{\pi p}{2\mu l}\left[\frac{a^2r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^a=\frac{\pi pa^4}{8\mu l}$. **1777**. $Q=\int_0^{2b}vadv=\frac{2}{3}p\frac{ab^3}{\mu l}$. (横轴放在矩形大的底边, 纵轴为过底边中点且与它垂直.) **1778**. 解: $S=\int_{v_1}^{v_2}\frac{1}{a}dv$. 另一方面, $\frac{dv}{dt}=a$, 由此得出 $dt=\frac{1}{a}dv$, 因此增速时间 $t=\int_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{a}=S$. **1779**. $M_x=-\int_0^x\frac{Q}{l}(x-t)dt+\frac{Q}{2}x=-\frac{Q}{l}\left[xt-\frac{t^2}{2}\right]_0^x+\frac{Q}{2}x=\frac{Qx}{2}\left(1-\frac{x}{l}\right)$. **1780**. $M_x=-\int_0^x(x-t)ktdt+Ax=\frac{kx}{6}(l^2-x^2)$. **1781**. $Q=0.12TRI_0^2$. 利用焦耳楞次 (Joule-Lenz) 定律.

第六章

1782. $V=\frac{2}{3}(y^2-x^2)x$. **1783**. $S=\frac{2}{3}(x+y)\sqrt{4z^2+3(x-y)^2}$. **1784**. $f\left(\frac{1}{2},3\right)=\frac{5}{3}, f(1,-1)=-2$. **1785**. $\frac{y^2-x^2}{2xy},\frac{x^2-y^2}{2xy},\frac{2xy}{x^2-y^2}$. **1786**. $f(x,x^2)=1+x-x^2$. **1787**. $z=\frac{R^4}{1-R^2}$. **1788**. $f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}$. 提示: 将已给函数写成 $f\left(\frac{y}{x}\right)=\pm\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}$, 且把 $\frac{y}{x}$ 换为 x. **1789**. $f(x,y)=\frac{x^2-xy}{2}$. 引用记号 $x+y=u, x-y=v$. 于是 $x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{u-v}{2}, f(u,v)=\frac{u+v}{2}\cdot\frac{u-v}{2}+\left(\frac{u-v}{2}\right)^2=\frac{u^2-uv}{2}$. 再把变量 u,v 换为 x,y. **1790**. $f(u)=u^2+2u, z=x-1+\sqrt{y}$. 在等式 $x=1+f(\sqrt{x}-1)$ 中令 $\sqrt{x}-1=u$, 那么 $x=(u+1)^2$, 因此, $f(u)=u^2+2u$. **1791**. $f(y)=\sqrt{1+y^2}, z=\frac{x}{|x|}\sqrt{x^2+y^2}$. 当 $x=1$ 时有等式 $\sqrt{1+y^2}=1\cdot f\left(\frac{y}{1}\right)$, 即 $f(y)=\sqrt{1+y^2}$. 于是 $f\left(\frac{y}{x}\right)=\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}, z=x\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\pm\sqrt{x^2+y^2}$. **1792**. a) 中心在坐标原点的单位圆, 包括圆周 $(x^2+y^2\leqslant1)$; b) 第一、第三象限的角平分线 $y=x$; c) 位于直线 $x+y=0$ 上方的半平面 $(x+y>0)$; d) 界于直线 $y=\pm1$ 之间的带形区域, 包括这两条直线 $(-1\leqslant y\leqslant1)$; e) 由直线段 $x=\pm1, y=\pm1$ 所构成的正方形, 包括它的边 $(-1\leqslant x\leqslant1, -1\leqslant y\leqslant1)$; f) 含有 OX 轴且界于两直线 $y=\pm x$ 之间的平面部分, 包括这两直线但除去坐标原点 (当 $x>0$ 时, $-x\leqslant y\leqslant x$; 当 $x<0$ 时, $x\leqslant y\leqslant -x$); g) 两个带形区域: $x\geqslant2, -2\leqslant y\leqslant2$ 与 $x\leqslant-2, -2\leqslant y\leqslant2$; h) 界于两圆周 $x^2+y^2=a^2$ 与 $x^2+y^2=2a^2$ 之间的圆环, 包括边界; i) 带形区域 $2n\pi\leqslant x\leqslant(2n+1)\pi, y\geqslant0$ 与 $(2n+1)\pi\leqslant x\leqslant(2n+2)\pi, y\leqslant0$, 其中 n 为整数; j) 位于抛物线 $y=-x^2$ 上方的平面部分 $(x^2+y>0)$; k) 整个 XOY 面; l) 除去坐标原点的整个 XOY 面; m) 位于抛物线 $y^2=x$ 上方且在 OY 轴右侧的平面部分, 包括 OY 轴上的点, 但除去抛物线上的点 $(x\geqslant0, y>\sqrt{x})$; n) 除去两条直线 $x=1$ 与 $y=0$ 上的点的整个平面; o) 同心圆环族 $2\pi k\leqslant x^2+y^2\leqslant\pi(2k+1)$ $(k=0,1,2,\cdots)$. **1793**. a) 第一象限 (包括边界); b) 第一、第三、第六与第八卦限 (除去边界); c) 由平面 $x=\pm1, y=\pm1, z=\pm1$ 所围成的立方体, 包括它的边界; d) 中心在坐标原点、半径为 1 且包括球面的球体. **1794**. a) 平面, 等位线是平行于直线 $x+y=0$ 的直线; b) 旋转抛物面, 等位线是中心在坐标原点的同心圆; c) 双曲抛物面, 等位线是等轴双曲线; d) 二次锥面, 等位线是等轴双曲线; e) 母线平行于直线 $x+y+1=0$ 的抛物柱面, 等位线是平行直线; f) 含四棱锥的侧面, 等位线是正方形的周界; g) 等位线是 $y=Cx^2$; h) 等位线是抛物线 $y=C\sqrt{x}$, i) 等位线是 $C(x^2+y^2)=2x$. **1795**. a) 抛物线 $y=C-x^2$ $(C>0)$; b) 双曲线 $xy=C$ $(|C|\leqslant1)$; c) 圆周 $x^2+y^2=C^2$;

d) 直线 $y=ax+C$; e) 直线 $y=Cx$ $(x\neq 0)$. **1796**. a) 平行于平面 $x+y+z=0$ 的平面; b) 中心在原点的同心球面; c) 当 $u>0$ 时, 绕 OZ 轴旋转的单叶双曲面; 当 $u<0$ 时, 绕 OZ 轴旋转的双叶双曲面; 两曲面族用圆锥 $x^2+y^2-z^2=0$ $(u=0)$ 分开. **1797**. a) 0; b) 0; c) 2; d) e^k; e) 极限不存在; f) 极限不存在. 提示: 在第 b) 题中引进极坐标. 在第 e)、f) 题中考察 x 和 y 沿直线 $y=kx$ 变化, 从而证明已给表达式随着选取的 k 可以趋于不同的极限. **1798**. 连续. **1799**. a) 间断点 $x=0,y=0$; b) 直线 $x=y$ 上所有的点 (间断线); c) 间断线是圆周 $x^2+y^2=1$; d) 间断线是坐标轴. **1800**. 令 $y=y_1=$ 常数, 可得处处连续的函数 $\varphi_1(x)=\frac{2xy_1}{x^2+y_1^2}$, 这是因为当 $y_1\neq 0$ 时, 分母 $x^2+y_1^2\neq 0$, 而当 $y_1=0$ 时, $\varphi_1(x)\equiv 0$. 类似地, 当 $x=x_1=$ 常数时, 函数 $\varphi_2(y)=\frac{2x_1y}{x_1^2+y^2}$ 处处连续. 作为变量 x,y 总体的函数, z 有间断点 $(0,0)$, 这是因为 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} z$ 不存在. 事实上, 引入极坐标 $(x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi)$, 可得 $z=\sin 2\varphi$. 由此可见: 如果 $x\to 0$ 和 $y\to 0$ 而 $\varphi=$ 常数 $(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$, 则 $z\to\sin 2\varphi$. 因为函数 z 的这些极限值依赖于方向 φ, 所以当 $x\to 0$ 和 $y\to 0$ 时 z 没有极限. **1801**. $\frac{\partial z}{\partial x}=3(x^2-ay), \frac{\partial z}{\partial y}=3(y^2-ax)$. **1802**. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2y}{(x+y)^2}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x}{(x+y)^2}$. **1803**. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}, \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}$. **1804**. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$. **1805**. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$. **1806**. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}(x+\sqrt{x^2+y^2})}$. **1807**. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$. **1808**. $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}, \frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$. **1809**. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}e^{\sin\frac{y}{x}}\cos\frac{y}{x}, \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}e^{\sin\frac{y}{x}}\cos\frac{y}{x}$. **1810**. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{xy^2\sqrt{2x^2-2y^2}}{|y|(x^4-y^4)}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{yx^2\sqrt{2x^2-2y^2}}{|y|(x^4-y^4)}$. **1811**. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{y}}\cot\frac{x+a}{\sqrt{y}}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x+a}{2y\sqrt{y}}\cot\frac{x+a}{\sqrt{y}}$. **1812**. $\frac{\partial u}{\partial x}=yz(xy)^{z-1}, \frac{\partial u}{\partial y}=xz(xy)^{z-1}, \frac{\partial u}{\partial z}=(xy)^z\ln(xy)$. **1813**. $\frac{\partial u}{\partial x}=yz^{xy}\ln z, \frac{\partial u}{\partial y}=xz^{xy}\ln z, \frac{\partial u}{\partial z}=xyz^{xy-1}$. **1814**. $f'_x(2,1)=\frac{1}{2}, f'_y(2,1)=0$. **1815**. $f'_x(1,2,0)=1, f'_y(1,2,0)=\frac{1}{2}, f'_z(1,2,0)=\frac{1}{2}$. **1820**. $-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$. **1821**. r. **1826**. $z=\arctan\frac{y}{x}+\varphi(x)$. **1827**. $z=\frac{x^2}{2}+y^2\ln x+\sin y-\frac{1}{2}$. **1828**. 1) $\tan\alpha=4, \tan\beta=\infty, \tan\gamma=\frac{1}{4}$; 2) $\tan\alpha=\infty, \tan\beta=4, \tan\gamma=\frac{1}{4}$. **1829**. $\frac{\partial S}{\partial a}=\frac{1}{2}h, \frac{\partial S}{\partial b}=\frac{1}{2}h, \frac{\partial S}{\partial h}=\frac{1}{2}(a+b)$. **1830**. 提示: 验证函数在整个 OX 轴与 OY 轴上等于零, 并用它来确定偏导数, 可得 $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$. **1831**. $\Delta f=4\Delta x+\Delta y+2\Delta x^2+2\Delta x\Delta y+\Delta x^2\Delta y, df=4dx+dy$. a) $\Delta f-df=8$; b) $\Delta f-df=0.062$. **1833**. $dz=3(x^2-y)dx+3(y^2-x)dy$. **1834**. $dz=2xy^3dx+3x^2y^2dy$. **1835**. $dz=\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}(ydx-xdy)$. **1836**. $dz=\sin 2xdx-\sin 2ydy$. **1837**. $dz=y^2x^{y-1}dx+x^y(1+y\ln x)dy$. **1838**. $dz=\frac{2}{x^2+y^2}(xdx+ydy)$. **1839**. $df=\frac{1}{x+y}\left(dx-\frac{x}{y}dy\right)$. **1840**. $dz=0$. **1841**. $dz=\frac{2}{x\sin\frac{2y}{x}}\left(dy-\frac{y}{x}dx\right)$. **1842**. $df(1,1)=dx-2dy$. **1843**. $du=yzdx+zxdy+xydz$. **1844**. $du=\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **1845**. $du=\left(xy+\frac{x}{y}\right)^{z-1}\left[\left(y+\frac{1}{y}\right)zdx+\left(1-\frac{1}{y^2}\right)xzdy+\left(xy+\frac{x}{y}\right)\ln\left(xy+\frac{x}{y}\right)dz\right]$. **1846**. $du=\frac{z^2}{x^2y^2+z^4}\left(ydx+xdy-\frac{2xy}{z}dz\right)$. **1847**. $df(3,4,5)=\frac{1}{25}(5dz-4dy-3dx)$. **1848**. $dl=0.062$ cm, $\Delta l=0.065$ cm. **1849**. 75 cm^3 (关于内部尺寸). **1850**. $\frac{1}{8}$ cm. 令扇形面积的微分等于零, 由此求出半径的微分. **1851**. a) 1.00; b) 4.998; c) 0.273. **1853**. 精确到 4 m (较准确是精确到 4.25 m). **1854**. $\pi\frac{\alpha g-\beta l}{g\sqrt{lg}}$. **1855**. $d\alpha=\frac{1}{\rho}(dy\cos\alpha-dx\sin\alpha)$. **1856**. $\frac{dz}{dt}=\frac{e^t(t\ln t-1)}{t\ln^2 t}$. **1857**. $\frac{du}{dt}=\frac{t}{\sqrt{y}}\cot\frac{x}{\sqrt{y}}\left(6-\frac{x}{2y^2}\right)$. **1858**. $\frac{du}{dt}=2t\ln t\tan t+\frac{(t^2+1)\tan t}{t}+\frac{(t^2+1)\ln t}{\cos^2 t}$. **1859**. $\frac{du}{dt}=0$. **1860**. $\frac{dz}{dx}=(\sin x)^{\cos x}(\cos x\cot x-\sin x\ln\sin x)$. **1861**. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{dz}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$. **1862**. $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}, \frac{dz}{dx}=x^y\left[\varphi_1(x)\ln x+\frac{y}{x}\right]$. **1863**. $\frac{\partial z}{\partial x}=2xf'_u(u,v)+ye^{xy}f'_v(u,v), \frac{\partial z}{\partial y}=-2yf'_u(u,v)+xe^{xy}f'_v(u,v)$. **1864**. $\frac{\partial z}{\partial u}=0, \frac{\partial z}{\partial v}=1$. **1865**. $\frac{\partial z}{\partial x}=y\left(1-\frac{1}{x^2}\right)f'\big(xy+$

$\frac{y}{x}\big), \frac{\partial z}{\partial y} = \big(x+\frac{1}{x}\big)f'\big(xy+\frac{y}{x}\big)$. **1867.** $\frac{du}{dx} = f'_x(x,y,z)+\varphi'(x)f'_y(x,y,z)+f'_z(x,y,z)[\psi'_x(x,y)+\psi'_y(x,y)\varphi'(x)]$. **1873.** 周长以速度 2 m/s 增加, 面积以 70 m ²/s 增加. **1874.** $\frac{1+2t^2+3t^4}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$. **1875.** $20\sqrt{5-2\sqrt{2}}$ km/h. **1876.** $-\frac{9\sqrt{3}}{2}$. **1877.** 1. **1878.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **1879.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **1880.** $\frac{68}{13}$. **1881.** $\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3}$. **1882.** a) $(2,0)$; b) $(0,0),(1,1)$; c) $(7,2,1)$. **1884.** $9\mathbf{i}-3\mathbf{j}$. **1885.** $\frac{1}{4}(5\mathbf{i}-3\mathbf{j})$. **1886.** $6\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$. **1887.** $|\text{grad}u| = 6. \cos\alpha = \frac{2}{3}, \cos\beta = -\frac{2}{3}, \cos\gamma = \frac{1}{3}$. **1888.** $\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}$. **1889.** $\tan\varphi \approx 8.944, \varphi \approx 83°37'$. 由于在点 (2, 1, 8) 处, 向量 grad z 与向量 $\mathbf{k}$ 位于同一平面,所以 $|\text{grad}z|$ 在所考虑点处确定了曲面最大坡度倾角的正切. **1891.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{abcy^2}{(b^2x^2+a^2y^2)^{3/2}}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\frac{abcxy}{(b^2x^2+a^2y^2)^{3/2}}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{abcx^2}{(b^2x^2+a^2y^2)^{3/2}}$. **1892.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(y-x^2)}{(x^2+y)^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\frac{2x}{(x^2+y)^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{(x^2+y)^2}$. **1893.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{xy}{(2xy+y^2)^{3/2}}$. **1894.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 0$. **1895.** $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{r^2-x^2}{r^3}$. **1896.** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x} = 1$. **1897.** $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z} = \alpha\beta\gamma x^{\alpha-1}y^{\beta-1}z^{\gamma-1}$. **1898.** $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2} = -x^2y\cos(xy)-2x\sin(xy)$. **1899.** $f''_{xx}(0,0) = m(m-1), f''_{xy}(0,0) = mn, f''_{yy}(0,0) = n(n-1)$. **1902.** 验证: 利用微分法则确定偏导数 $f'_x(x,y) = y\big[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\big]$ (当 $x^2+y^2 \neq 0$ 时), $f'_x(0,0) = 0$, 因此对 $x = 0$ 及任意的 y 有 $f'_x(0,y) = -y$. 由此得出 $f''_{xy}(0,y) = -1$, 特别是 $f''_{xy}(0,0) = -1$. 类似地求出 $f''_{yx}(0,0) = 1$. **1903.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f'_u(u,v)+4x^2f''_{uu}(u,v)+4xyf''_{uv}(u,v)+y^2f''_{vv}(u,v), \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = f'_v(u,v)+4xyf''_{uu}(u,v)+2(x^2+y^2)f''_{uv}(u,v)+xyf''_{vv}(u,v), \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2f'_u(u,v)+4y^2f''_{uu}(u.v)+4xyf''_{uv}(u,v)+x^2f''_{vv}(u,v)$. **1904.** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_{xx}+2f''_{xz}\varphi'_x+f''_{zz}(\varphi'_x)^2+f'_z\varphi''_{xx}$. **1905.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{uu}(\varphi'_x)^2+2f''_{uv}\varphi'_x\psi'_x+f''_{vv}(\psi'_x)^2+f'_u\varphi''_{xx}+f'_v\psi''_{xx}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = f''_{uu}\varphi'_x\psi'_y+f''_{uv}(\varphi'_x\psi'_y+\psi'_x\varphi'_y)+f''_{vv}\psi'_x\psi'_y+f'_u\varphi''_{xy}+f'_v\psi''_{xy}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{uu}(\varphi'_y)^2+2f''_{uv}\varphi'_y\psi'_y+f''_{vv}(\psi'_y)^2+f'_u\varphi''_{yy}+f'_v\psi''_{yy}$. **1914.** $u(x,y) = \varphi(x)+\psi(y)$. **1915.** $u(x,y) = x\varphi(y)+\psi(y)$. **1916.** $d^2z = e^{xy}[(ydx+xdy)^2+2dxdy]$. **1917.** $d^2u = 2(xdydz+ydxdz+zdxdy)$. **1918.** $d^2z = 4\varphi''(t)\cdot(xdx+ydy)^2+2\varphi'(t)(dx^2+dy^2)$. **1919.** $dz = \big(\frac{x}{y}\big)^{xy}xy\big(y\ln\frac{ex}{y}dx+x\ln\frac{x}{ey}dy\big), d^2z = \big(\frac{x}{y}\big)^{xy}\big[\big(y^2\ln^2\frac{ex}{y}+\frac{y}{x}\big)dx^2+2\big(xy\ln\frac{ex}{y}\ln\frac{x}{ey}+\ln\frac{x}{y}\big)dxdy+\big(x^2\ln^2\frac{x}{ey}-\frac{x}{y}\big)dy^2\big]$. **1920.** $d^2z = a^2f''_{uu}(u,v)dx^2+2abf''_{uv}(u,v)dxdy+b^2f''_{vv}(u,v)dy^2$. **1921.** $d^2z = (ye^xf'_v+e^{2y}f''_{uu}+2ye^{x+y}f''_{uv}+y^2e^{2x}f''_{vv})dx^2+2(e^yf'_u+e^xf'_v+xe^{2y}f''_{uu}+e^{x+y}(1+xy)f''_{uv}+ye^{2x}f''_{vv})dxdy+(xe^yf'_u+x^2e^{2y}f''_{uu}+2xe^{x+y}f''_{uv}+e^{2x}f''_{vv})dy^2$. **1922.** $d^3z = e^x(\cos ydx^3-3\sin ydx^2dy-3\cos ydxdy^2+\sin ydy^3)$. **1923.** $d^3z = -y\cos xdx^3-3\sin xdx^2dy-3\cos ydxdy^2+x\sin ydy^3$. **1924.** $df(1,2) = 0, d^2f(1,2) = 6dx^2+2dxdy+4.5dy^2$. **1925.** $d^2f(0,0,0) = 2dx^2+4dy^2+6dz^2-4dxdy+8dxdz+4dydz$. **1926.** $xy+C$. **1927.** $x^3y-\frac{y^3}{3}+\sin x+C$. **1928.** $\frac{x}{x+y}+\ln|x+y|+C$. **1929.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+2\arctan\frac{x}{y}+C$. **1930.** $\frac{x}{y}+C$. **1931.** $\sqrt{x^2+y^2}+C$. **1932.** $a = -1, b = -1, z = \frac{x-y}{x^2+y^2}+C$. **1933.** $x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz+C$. **1934.** $x^3+2xy^2+3xz+y^2-yz-2z+C$. **1935.** $x^2yz-3xy^2z+4x^2y^2+2x+y+3z+C$. **1936.** $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+C$. **1937.** $\sqrt{x^2+y^2+z^2}+C$. **1938.** $\lambda = -1$. 写出表达式 $Xdx+Ydy$ 的全微分条件. **1939.** $f'_x = f'_y$. **1940.** $u = \int_0^{xy}f(z)dz+C$. **1941.** $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}, \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}, \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{3b^6x}{a^4y^5}$. **1942.** 用来确定 y 的方程是一对直线方程. **1943.** $\frac{dy}{dx} = \frac{y^x\ln y}{1-xy^{x-1}}$. **1944.** $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-1}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{(1-y)^3}$. **1945.** $\big(\frac{dy}{dx}\big)_{x=1} = 3$ 或者 $-1, \big(\frac{d^2y}{dx^2}\big)_{x=1} = 8$ 或者 -8. **1946.** $\frac{dy}{dx} = \frac{x+ay}{ax-y}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(a^2+1)(x^2+y^2)}{(ax-y)^3}$. **1947.** $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2y}{x^2}$. **1948.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2-yz}{xy-z^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{6y^2-3xz-2}{3(xy-z^2)}$. **1949.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z\sin x-\cos y}{\cos x-y\sin z}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x\sin y-\cos z}{\cos x-y\sin z}$. **1950.** $\frac{\partial z}{\partial x} = -1, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}$.

1951. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c^2x}{a^2z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c^2y}{b^2z},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{c^4(b^2-y^2)}{a^2b^2z^3},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{c^4(a^2-x^2)}{a^2b^2z^3}$. **1953**. $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{\psi'_y}\begin{vmatrix}\varphi'_x & \varphi'_y\\ \psi'_x & \psi'_y\end{vmatrix}$. **1954**. $dz=-\frac{x}{z}dx-\frac{y}{z}dy, d^2z=\frac{y^2-a^2}{z^3}dx^2-2\frac{xy}{z^3}dxdy+\frac{x^2-a^2}{z^3}dy^2$. **1955**. $dz=0, d^2z=\frac{4}{15}(dx^2+dy^2)$. **1956**. $dz=\frac{z}{1-z}(dx+dy), d^2z=\frac{z}{(1-z)^3}(dx^2+2dxdy+dy^2)$. **1961**. $\frac{dy}{dx}=\infty,\frac{dz}{dx}=\frac{1}{5},\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{4}{25}$. **1962**. $dy=\frac{y(z-x)}{x(y-z)}dx, dz=\frac{z(x-y)}{x(y-z)}dx, d^2y=-d^2z=-\frac{a}{x^3(y-z)^3}\times[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]dx^2$. **1963**. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=1,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\frac{\partial v}{\partial x}=-1,\frac{\partial v}{\partial y}=0,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=2,\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=1,\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$. **1964**. $du=\frac{y}{1+y}dx+\frac{v}{1+y}dy, dv=\frac{1}{1+y}dx-\frac{v}{1+y}dy, d^2u=-d^2v=\frac{2}{(1+y)^2}dxdy-\frac{2v}{(1+y)^2}dy^2$. **1965**. $du=\frac{\psi'_v dx-\varphi'_v dy}{\begin{vmatrix}\varphi'_u & \varphi'_v\\ \psi'_u & \psi'_v\end{vmatrix}}, dv=\frac{-\psi'_u dx+\varphi'_u dy}{\begin{vmatrix}\varphi'_u & \varphi'_v\\ \psi'_u & \psi'_v\end{vmatrix}}$. **1966**. a) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c\sin v}{u},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{c\cos v}{u}$; b) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}(v+u),\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}(v-u)$; c) $dz=\frac{1}{2e^{2u}}\times[e^{u-v}(v+u)dx+e^{u+v}(v-u)dy]$. **1967**. $\frac{\partial z}{\partial x}=F'_r(r,\varphi)\cos\varphi-F'_\varphi(r,\varphi)\frac{\sin\varphi}{r},\frac{\partial z}{\partial y}=F'_r(r,\varphi)\sin\varphi+F'_\varphi(r,\varphi)\frac{\cos\varphi}{r}$. **1968**. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c}{a}\cos\varphi\cot\psi,\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c}{b}\sin\varphi\cot\psi$. **1969**. $\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+y=0$. **1970**. $\frac{d^2y}{dt^2}=0$. **1971**. a) $\frac{d^2x}{dy^2}-2y\frac{dx}{dy}=0$; b) $\frac{d^3x}{dy^3}=0$. **1972**. $\tan\mu=\frac{r}{r'}$. **1973**. $\frac{\left|r^2+2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\varphi^2}\right|}{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{3/2}}$. **1974**. $\frac{\partial z}{\partial u}=0$. **1975**. $u\frac{\partial z}{\partial u}-z=0$. **1976**. $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=0$. **1977**. $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{1}{2u}\frac{\partial z}{\partial v}$. **1978**. $\frac{\partial\omega}{\partial v}=0$. **1979**. $\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}=0$. **1980**. $\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}=\frac{1}{2}$. **1981**. a) $2x-4y-z-5=0,\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-5}{-1}$; b) $3x+4y-6z=0,\frac{x-4}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{-6}$; c) $x\cos\alpha+y\sin\alpha-R=0,\frac{x-R\cos\alpha}{\cos\alpha}=\frac{y-R\sin\alpha}{\sin\alpha}=\frac{z-R}{0}$. **1982**. $\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\pm\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. **1983**. $3x+4y+12z-169=0$. **1985**. $x+4y+6z=\pm21$. **1986**. $x\pm y\pm z=\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **1987**. 在点 $(1,\pm1,0)$ 处的切平面平行于 XOZ 平面, 在点 $(0,0,0)$ 与 $(2,0,0)$ 处的切平面平行于 YOZ 平面. 曲面上不存在切平面平行于 XOY 平面的点. **1991**. $\frac{\pi}{3}$. **1994**. 在 XOY 面上的投影: $\begin{cases}z=0,\\ x^2+y^2-xy-1=0.\end{cases}$ 在 YOZ 面上的投影: $\begin{cases}x=0,\\ \frac{3y^2}{4}+z^2-1=0.\end{cases}$ 在 XOZ 面上的投影: $\begin{cases}y=0,\\ \frac{3x^2}{4}+z^2-1=0.\end{cases}$ 提示: 曲面与它关于任何一个平面的投影柱面相切的曲线是这样一些点的几何轨迹, 在这些点处给定曲面的切平面垂直于投影平面. **1996**. $f(x+h,y+k)=ax^2+2bxy+cy^2+2(ax+by)h+2(bx+cy)k+ah^2+2bhk+ck^2$. **1997**. $f(x,y)=1-(x+2)^2+2(x+2)(y-1)+3(y-1)^2$. **1998**. $\Delta f(x,y)=2h+k+h^2+2hk+h^2k$. **1999**. $f(x,y,z)=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+2(x-1)(y-1)-(y-1)(z-1)$. **2000**. $f(x+h,y+k,z+l)=f(x,y,z)+2[h(x-y-z)+k(y-x-z)+l(z-x-y)]+f(h,k,l)$. **2001**. $y+xy+\frac{3x^2y-y^3}{3!}$. **2002**. $1-\frac{x^2+y^2}{2!}+\frac{x^4+6x^2y^2+y^4}{4!}$. **2003**. $1+(y-1)+(x-1)(y-1)$. **2004**. $1+[(x-1)+(y+1)]+\frac{[(x-1)+(y+1)]^2}{2!}+\frac{[(x-1)+(y+1)]^3}{3!}$. **2005**. a) $\arctan\frac{1+\alpha}{1-\beta}\approx\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-\frac{1}{4}(\alpha^2-\beta^2)$; b) $\sqrt{\frac{(1+\alpha)^m+(1+\beta)^n}{2}}\approx1+\frac{1}{2}(m\alpha+n\beta)+\frac{1}{32}[(3m^2-4m)\alpha^2-3mn\alpha\beta+(3n^2-4n)\beta^2]$. **2006**. a) 1.0081; b) 0.902. 对下列函数应用泰勒公式: a) $f(x,y)=\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$ 在点 $(1,1)$ 的邻域内; b) $f(x,y)=y^x$ 在点 $(2,1)$ 的邻域内. **2007**. $z=1+2(x-1)-(y-1)-8(x-1)^2+10(x-1)(y-1)-3(y-1)^2+\cdots$. **2008**. 当 $x=1,y=0$ 时 $z_{\min}=0$. **2009**. 无极值. **2010**. 当 $x=1,y=0$ 时 $z_{\min}=-1$. **2011**. 当 $x=3,y=2$

时 $z_{\max}=108$. **2012.** 当 $x=\sqrt{2}, y=-\sqrt{2}$ 与 $x=-\sqrt{2}, y=\sqrt{2}$ 时 $z_{\min}=-8$. 当 $x=y=0$ 时无极值. **2013.** 在点 $x=\frac{a}{\sqrt{3}}, y=\frac{b}{\sqrt{3}}$ 与点 $x=-\frac{a}{\sqrt{3}}, y=-\frac{b}{\sqrt{3}}$ 处 $z_{\max}=\frac{ab}{3\sqrt{3}}$; 在点 $x=\frac{a}{\sqrt{3}}, y=-\frac{b}{\sqrt{3}}$ 与点 $x=-\frac{a}{\sqrt{3}}, y=\frac{b}{\sqrt{3}}$ 处 $z_{\min}=-\frac{ab}{3\sqrt{3}}$. **2014.** 当 $x=y=0$ 时 $z_{\max}=1$. **2015.** 当 $x=y=0$ 时 $z_{\min}=0$; 在圆周 $x^2+y^2=1$ 上的点非严格的极大值 $z=\frac{1}{e}$. **2016.** 当 $x=1, y=-1$ 时 $z_{\max}=\sqrt{3}$. **2016.1.** 当 $x=4, y=2$ 时 $z_{\min}=6$. **2016.2.** 当 $x=-4, y=-2$ 时 $z_{\max}=8e^{-2}$; 当 $x=0, y=0$ 时无极值. **2017.** 当 $x=-\frac{2}{3}, y=-\frac{1}{3}, z=1$ 时 $u_{\min}=-\frac{4}{3}$. **2018.** 当 $x=\frac{1}{2}, y=1, z=1$ 时 $u_{\min}=4$. **2019.** 方程定出两个函数, 其中一个函数当 $x=1, y=-2$ 时有极大值 ($z_{\max}=8$), 另一个函数当 $x=1, y=-2$ 时有极小值 ($z_{\min}=-2$); 在圆周 $(x-1)^2+(y+2)^2=25$ 上的点处, 每个函数有边界极值 $z=3$. 答案中所提到的函数显然由等式 $z=3\pm\sqrt{25-(x-1)^2-(y+2)^2}$ 确定. 因此, 这两个函数不仅在圆 $(x-1)^2+(y+2)^2=25$ 内部有定义, 而且在周界上取值 $z=3$. 这个值对第一个函数是最小值, 对第二个函数是最大值. **2020.** 由方程定出的一个函数当 $x=-1, y=2$ 时有极大值 ($z_{\max}=-2$), 另一个函数当 $x=-1, y=2$ 时有极小值 ($z_{\min}=1$); 两个函数在曲线 $4x^3-4y^2-12x+16y-33=0$ 上的点处有边界极值. **2021.** 当 $x=y=\frac{1}{2}$ 时 $z_{\max}=\frac{1}{4}$. **2022.** 当 $x=1, y=2$ 时 $z_{\max}=5$; 当 $x=-1, y=-2$ 时 $z_{\min}=-5$. **2023.** 当 $x=\frac{18}{13}, y=\frac{12}{13}$ 时 $z_{\min}=\frac{36}{13}$. **2024.** 当 $x=\frac{7\pi}{8}+k\pi, y=\frac{9\pi}{8}+k\pi$ 时 $z_{\max}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$; 当 $x=\frac{3\pi}{8}+k\pi, y=\frac{5\pi}{8}+k\pi$ 时 $z_{\min}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$. **2025.** 当 $x=-1, y=2, z=-2$ 时 $u_{\min}=-9$; 当 $x=1, y=-2, z=2$ 时 $u_{\max}=9$. **2026.** 当 $x=\pm a, y=z=0$ 时 $u_{\max}=a$; 当 $x=y=0, z=\pm c$ 时 $u_{\min}=c$. **2027.** 当 $x=2, y=4, z=6$ 时 $u_{\max}=2\cdot4^2\cdot6^3$. **2028.** 在点 $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right),\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right),\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$ 处 $u_{\max}=4\frac{4}{27}$; 在点 $(2,2,1),(2,1,2),(1,2,2)$ 处 $u_{\min}=4$. **2030.** a) 当 $x=0, y=1$ 时最大值 $z=3$; b) 当 $x=1, y=0$ 时最大值 $z=2$. **2031.** a) 当 $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, y=\sqrt{\frac{1}{3}}$ 时最大值 $z=\frac{2}{3\sqrt{3}}$; 当 $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, y=-\sqrt{\frac{1}{3}}$ 时最小值 $z=-\frac{2}{3\sqrt{3}}$; b) 当 $x=\pm1, y=0$ 时最大值 $z=1$; 当 $x=0, y=\pm1$ 时最小值 $z=-1$. **2032.** 当 $x=y=\frac{\pi}{3}$ 时最大值 $z=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (内部极大值); 当 $x=y=0$ 时最小值 $z=0$ (边界极小值). **2033.** 当 $x=2, y=-1$ 时最大值 $z=13$ (边界极大值); 当 $x=y=1$ 时最小值 $z=-1$ (内部极小值) 以及当 $x=0, y=-1$ 时最小值 $z=-1$ (边界极小值). **2034.** 立方体. **2035.** $\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$. **2036.** 等边三角形. **2037.** 立方体. **2038.** $a=\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a}$. **2039.** $M\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$. **2040.** 三角形的边长: $\frac{3}{4}p, \frac{3}{4}p$ 和 $\frac{p}{2}$. **2041.** $x=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}, y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}$. **2042.** $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3$. **2043.** 平行六面体的尺寸: $\frac{2a}{\sqrt{3}}, \frac{2b}{\sqrt{3}}, \frac{2c}{\sqrt{3}}$, 其中 a, b, c 是椭球的半轴长度. **2044.** $x=y=2\delta+\sqrt[3]{2V}, z=\frac{x}{2}$. **2045.** $x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}, y=\pm\frac{b}{\sqrt{2}}$. **2046.** 长轴 $2a=6$, 短轴 $2b=2$. 椭圆上的点 (x,y) 到它的中心 (坐标原点) 距离的平方等于 x^2+y^2. 问题归结为求函数 x^2+y^2 在条件 $5x^2+8xy+5y^2=9$ 之下的极值. **2047.** 圆柱底面的半径为 $\frac{R}{2}\sqrt{2+\frac{2}{\sqrt{5}}}$, 高为 $R\sqrt{2-\frac{2}{\sqrt{5}}}$, 其中 R 是球的半径. **2048.** 水渠应该连接抛物线上的点 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ 与直线上的点 $\left(\frac{11}{8},-\frac{5}{8}\right)$, 它的长度为 $\frac{7\sqrt{2}}{8}$. **2049.** $\frac{1}{14}\sqrt{2730}$. **2050.** $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{v_1}{v_2}$. 显然, 光线必须在 A_1 与 B_1 之间的某点 M 处从一个介质转入另一个介质, 并且 $AM=\frac{a}{\cos\alpha}, BM=\frac{b}{\cos\beta}, A_1M=a\tan\alpha, B_1M=b\tan\beta$. 光线运动的时间等于 $\frac{a}{v_1\cos\alpha}+\frac{b}{v_2\cos\beta}$. 问题归结为求函数 $f(\alpha,\beta)=\frac{a}{v_1\cos\alpha}+\frac{b}{v_2\cos\beta}$ 在条件 $a\tan\alpha+b\tan\beta=c$ 之下的极小值. **2051.** $\alpha=\beta$. **2052.** $I_1:I_2:I_3=\frac{1}{R_1}:\frac{1}{R_2}:\frac{1}{R_3}$. 求出函数 $f(I_1,I_2,I_3)=I_1^2R_1+I_2^2R_2+I_3^2R_3$ 在条件 $I_1+I_2+I_3=1$ 之下的极小值. **2053.** 孤

立点 $(0,0)$. **2054**. 第二类回归点 $(0,0)$. **2055**. 自切点 $(0,0)$. **2056**. 孤立点 $(0,0)$. **2057**. 结点 $(0,0)$. **2058**. 第一类尖点 $(0,0)$. **2059**. 结点 $(0,0)$. **2060**. 结点 $(0,0)$. **2061**. 坐标原点当 $a>b$ 时是孤立点, 当 $a=b$ 时是第一类尖点, 当 $a<b$ 时是结点. **2062**. 如果数量 a,b,c 彼此不相等, 则曲线没有奇点. 如果 $a=b<c$, 则 $A(a,0)$ 是孤立点; 如果 $a<b=c$, 则 $B(b,0)$ 是结点; 如果 $a=b=c$, 则 $A(a,0)$ 是第一类尖点. **2063**. $y=\pm x$. **2064**. $y^2=2px$. **2065**. $y=\pm R$. **2066**. $x^{2/3}+y^{2/3}=l^{2/3}$. **2067**. $xy=\frac{1}{2}S$. **2068**. 一对共轭的等轴双曲线. 如果取椭圆的对称轴作为坐标轴, 则双曲线的方程为 $xy=\pm\frac{S}{2\pi}$. **2069**. a) 判别曲线 $y=0$ 是已给曲线族的拐点的几何轨迹与包络; b) 判别曲线 $y=0$ 是曲线族的尖点的几何轨迹与包络; c) 判别曲线 $y=0$ 是尖点的几何轨迹, 但不是包络; d) 判别曲线与两直线: $x=0$ (结点的几何轨迹), $x=a$ (包络) 重合. **2070**. $y=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{gx^2}{2v_0^2}$. **2071**. $7\frac{1}{3}$. **2072**. $\sqrt{9+4\pi^2}$. **2073**. $\sqrt{3}(e^t-1)$. **2074**. 42. **2075**. 5. **2076**. x_0+z_0. **2077**. $11+\frac{\ln 10}{9}$. **2079**. a) 直线; b) 抛物线; c) 椭圆; d) 双曲线. **2080**. a) $\frac{da}{dt}\mathbf{a}^0$; b) $a\frac{d\mathbf{a}^0}{dt}$; c) $\frac{da}{dt}\mathbf{a}^0+a\frac{d\mathbf{a}^0}{dt}$. **2081**. $\frac{d}{dt}(\mathbf{abc})=\left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\mathbf{bc}\right)+\left(\mathbf{a}\frac{d\mathbf{b}}{dt}\mathbf{c}\right)+\left(\mathbf{ab}\frac{d\mathbf{c}}{dt}\right)$. **2082**. $4t(t^2+1)$. **2083**. $x=3\cos t, y=4\sin t$ (椭圆). 当 $t=0$ 时, $\mathbf{v}=4\mathbf{j}, \mathbf{w}=-3\mathbf{i}$; 当 $t=\frac{\pi}{4}$ 时, $\mathbf{v}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}+2\sqrt{2}\mathbf{j}, \mathbf{w}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}-2\sqrt{2}\mathbf{j}$; 当 $t=\frac{\pi}{2}$ 时, $\mathbf{v}=-3\mathbf{i}, \mathbf{w}=-4\mathbf{j}$. **2084**. $x=2\cos t, y=2\sin t, z=3t$ (螺旋线). 对任意 $t, \mathbf{v}=-2\mathbf{i}\sin t+2\mathbf{j}\cos t+3\mathbf{k}, v=\sqrt{13}, \mathbf{w}=-2\mathbf{i}\cos t-2\mathbf{j}\sin t, w=2$; 当 $t=0$ 时, $\mathbf{v}=2\mathbf{j}+3\mathbf{k}, \mathbf{w}=-2\mathbf{i}$; 当 $t=\frac{\pi}{2}$ 时, $\mathbf{v}=-2\mathbf{i}+3\mathbf{k}, \mathbf{w}=-2\mathbf{j}$. **2085**. $x=\cos\alpha\cos\omega t, y=\sin\alpha\cos\omega t, z=\sin\omega t$ (圆周). $\mathbf{v}=-\omega\mathbf{i}\cos\alpha\sin\omega t-\omega\mathbf{j}\sin\alpha\sin\omega t+\omega\mathbf{k}\cos\omega t, v=|\mathbf{w}|.\mathbf{w}=-\omega^2\mathbf{i}\cos\alpha\cos\omega t-\omega^2\mathbf{j}\sin\alpha\cos\omega t-\omega^2\mathbf{k}\sin\omega t, w=\omega^2$. **2086**. $v=\sqrt{v_{0x}^2+v_{0y}^2+(v_{0z}-gt)^2}, w_x=w_y=0, w_z=-g, w=g$. **2088**. $\omega\sqrt{a^2+h^2}$, 其中 $\omega=\frac{d\theta}{dt}$ 是螺丝钉的旋转角速度. **2089**. $\sqrt{a^2\omega^2+v_0^2-2a\omega v_0\sin\omega t}$. **2090**. $\boldsymbol{\tau}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{i}+\mathbf{k}), \mathbf{v}=-\mathbf{i}, \boldsymbol{\beta}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{i}-\mathbf{k})$. **2091**. $\boldsymbol{\tau}=\frac{1}{\sqrt{3}}[(\cos t-\sin t)\mathbf{i}+(\sin t+\cos t)\mathbf{j}+\mathbf{k}], \mathbf{v}=-\frac{1}{\sqrt{2}}[(\sin t+\cos t)\mathbf{i}+(\sin t-\cos t)\mathbf{j}]$, $\cos(\widehat{\boldsymbol{\tau}, z})=\frac{\sqrt{3}}{3}, \cos(\widehat{\mathbf{v}, z})=0$. **2092**. $\boldsymbol{\tau}=\frac{\mathbf{i}+4\mathbf{j}+2\mathbf{k}}{\sqrt{21}}, \mathbf{v}=\frac{-4\mathbf{i}+5\mathbf{j}-8\mathbf{k}}{\sqrt{105}}, \boldsymbol{\beta}=\frac{-2\mathbf{i}+\mathbf{k}}{\sqrt{5}}$. **2093**. $\frac{x-a\cos t}{-a\sin t}=\frac{y-a\sin t}{a\cos t}=\frac{z-bt}{0}$ (切线), $\frac{x-a\cos t}{b\sin t}=\frac{y-a\sin t}{-b\cos t}=\frac{z-bt}{a}$ (次法线), $\frac{x-a\cos t}{\cos t}=\frac{y-a\sin t}{\sin t}=\frac{z-bt}{0}$ (主法线). 切线的方向余弦: $\cos\alpha=-\frac{a\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos\beta=\frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos\gamma=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 主法线的方向余弦: $\cos\alpha_1=\cos t, \cos\beta_1=\sin t, \cos\gamma_1=0$. **2094**. $2x-z=0$ (法平面), $y-1=0$ (密切面), $x+2z-5=0$ (从切面). **2095**. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-8}{12}$ (切线), $x+4y+12z-114=0$ (法平面), $12x-6y+z-8=0$ (密切面). **2096**. $\frac{x-\frac{t^4}{4}}{1}=\frac{y-\frac{t^3}{3}}{t}=\frac{z-\frac{t^2}{2}}{1}$ (切线), $\frac{x-\frac{t^4}{4}}{t^3+2t}=\frac{y-\frac{t^3}{3}}{1-t^4}=\frac{z-\frac{t^2}{2}}{-2t^3-t}$ (主法线), $\frac{x-\frac{t^4}{4}}{1}=\frac{y-\frac{t^3}{3}}{-2t}=\frac{z-\frac{t^2}{2}}{t^2}$ (次法线), $M_1\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right), M_2\left(4,-\frac{8}{3},2\right)$. **2097**. $\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-2}{2}$ (切线), $x+y=0$ (密切面), $\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-2}{-1}$ (主法线), $\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{0}$ (次法线), $\cos\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\beta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\gamma_2=0$. **2098**. a) $\frac{x-\frac{R}{2}}{2}=\frac{y-\frac{R}{2}}{0}=\frac{z-\frac{\sqrt{2}R}{2}}{-\sqrt{2}}$ (切线), $x\sqrt{2}-z=0$ (法平面); b) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{4}$ (切线), $x+y+4z-10=0$ (法平面); c) $\frac{x-2}{2\sqrt{3}}=\frac{y-2\sqrt{3}}{1}=\frac{z-3}{-2\sqrt{3}}$ (切线), $2\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}z=0$ (法平面). **2099**. $x+y=0$. **2100**. $x-y-z\sqrt{2}=0$. **2101**. a) $4x-y-z-9=0$; b) $9x-6y+2z-18=0$; c) $b^2x_0^3x-a^2y_0^3y+(a^2-b^2)z_0^3z=a^2b^2(a^2-b^2)$. **2102**. $6x-8y-z+3=0$ (密切面), $\frac{x-1}{31}=\frac{y-1}{26}=\frac{z-1}{-22}$ (主法线), $\frac{x-1}{-6}=\frac{y-1}{8}=\frac{z-1}{1}$ (次法线). **2103**. $bx-z=0$ (密

切面), $\begin{cases} x=0, \\ z=0 \end{cases}$ (主法线), $\begin{cases} x+bz=0, \\ y=0 \end{cases}$ (次法线), $\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{i}+b\mathbf{k}}{\sqrt{1+b^2}}, \boldsymbol{\beta} = \frac{-b\mathbf{i}+\mathbf{k}}{\sqrt{1+b^2}}, \mathbf{v} = \mathbf{j}$. **2106**. $2x+3y+19z-27=0$. **2107**. a) $\sqrt{2}$; b) $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **2108**. a) $K = \frac{e^{-t}\sqrt{2}}{3}, T = \frac{e^{-t}}{3}$; b) $K = T = \frac{1}{2a\operatorname{ch}^2 t}$. **2109**. a) $R = \rho = \frac{(y+a)^2}{a}$; b) $R = \rho = \frac{(p^4+2x^4)^3}{8p^4x^3}$. **2111**. $\frac{av^2}{a^2+b^2}$. **2112**. 当 $t=0$ 时, $K=2, w_\tau=0, w_n=2$; 当 $t=1$ 时, $K=\frac{1}{7}\sqrt{\frac{19}{14}}$. $w_\tau = \frac{22}{\sqrt{14}}, w_n = 2\sqrt{\frac{19}{14}}$.

第七章

2113. $4\frac{2}{3}$. **2114**. $\ln\frac{25}{24}$. **2115**. $\frac{\pi}{12}$. **2116**. $\frac{9}{4}$. **2117**. 50.4. **2118**. $\frac{\pi a^2}{2}$. **2119**. 2.4. **2120**. $\frac{\pi}{6}$. **2121**. $x=\frac{y^2}{4}-1, x=2-y; y=-6, y=2$. **2122**. $y=x^2, y=x+9; x=1, x=3$. **2123**. $y=x, y=10-x; y=0, y=4$. **2124**. $y=\frac{x}{3}, y=2x; x=1, x=3$. **2125**. $y=0, y=\sqrt{25-x^2}; x=0, x=3$. **2126**. $y=x^2, y=x+2; x=-1, x=2$. **2127**. $\int_0^1 dy\int_0^2 f(x,y)dx = \int_0^2 dx\int_0^1 f(x,y)dy$. **2128**. $\int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)dx = \int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy$. **2129**. $\int_0^1 dy\int_0^{2-y} f(x,y)dx = \int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy + \int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy$. **2130**. $\int_1^2 dx\int_{2x}^{2x+3} f(x,y)dy = \int_2^4 dy\int_1^{y/2} f(x,y)dx + \int_4^5 dy\int_1^2 f(x,y)dx + \int_5^7 dy\int_{(y-3)/2}^2 f(x,y)dx$. **2131**. $\int_0^1 dy\int_{-y}^y f(x,y)dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy\int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx = \int_{-1}^0 dx\int_{-x}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy + \int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$. **2132**. $\int_{-1}^1 dx\int_{2x^2}^2 f(x,y)dy = \int_0^2 dy\int_{-\sqrt{y/2}}^{\sqrt{y/2}} f(x,y)dx$. **2133**. $\int_{-2}^{-1} dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy + \int_{-1}^1 dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int_1^2 dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy = \int_{-2}^{-1} dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx + \int_{-1}^1 dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int_{-1}^1 dy\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx + \int_1^2 dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$. **2134**. $\int_{-3}^{-2} dx\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dy + \int_{-2}^2 dx\int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x,y)dy + \int_2^3 dx\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dy = \int_{-\sqrt{5}}^{-1} dy\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{-\sqrt{y^2-1}} f(x,y)dx + \int_{-\sqrt{5}}^{-1} dy\int_{\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)dx + \int_{-1}^1 dy\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)dx + \int_1^{\sqrt{5}} dy\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{-\sqrt{y^2-1}} f(x,y)dx + \int_1^{\sqrt{5}} dy\int_{\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)dx$. **2135**. a) $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_0^{1-y} f(x,y)dx$; b) $\int_{-a}^a dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy = \int_{-a}^a dy\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx$; c) $\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)dy = \int_{-1/2}^{1/2} dy\int_{(1-\sqrt{1-4y^2})/2}^{(1+\sqrt{1-4y^2})/2} f(x,y)dx$; d) $\int_{-1}^1 dx\int_x^1 f(x,y)dy = \int_{-1}^1 dy\int_{-1}^y f(x,y)dx$; e) $\int_0^a dy\int_y^{y+2a} f(x,y)dx = \int_0^a dx\int_0^x f(x,y)dy + \int_a^{2a} dx\int_0^a f(x,y)dy + \int_{2a}^{3a} dx\int_{x-2a}^a f(x,y)dy$. **2136**. $\int_0^{48} dy\int_{y/12}^{\sqrt{y}/\sqrt{3}} f(x,y)dx$. **2137**. $\int_0^2 dy\int_{y/3}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} f(x,y)dx + \int_2^3 dy\int_{y/3}^1 f(x,y)dx$. **2138**. $\int_0^{a/2} dy\int_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx + \int_{a/2}^a dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx$. **2139**. $\int_0^{a\sqrt{3}/2} dy\int_{a/2}^a f(x,y)dx + \int_{a\sqrt{3}/2}^a dy\int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^a f(x,y)dx$. **2140**. $\int_0^a dy\int_{y^2/(4a)}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx + \int_0^a dy\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)dx + \int_a^{2\sqrt{2}a} dy\int_{y^2/(4a)}^{2a} f(x,y)dx$. **2141**. $\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy + \int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy$. **2142**. $\int_0^{1/2} dx\int_0^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy + \int_{1/2}^{\sqrt{2}} dx\int_0^1 f(x,y)dy + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx\int_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)dy$. **2143**. $\int_0^{R\sqrt{2}/2} dy\int_y^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y)dx$. **2144**. $\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dx$. **2145**. $\frac{1}{6}$. **2146**. $\frac{1}{6}$. **2147**. $\frac{\pi}{2}a$. **2148**. $\frac{\pi}{6}$. **2149**. 6. **2150**. $\frac{1}{2}$. **2151**. $\ln 2$. **2152**. a) $\frac{4}{3}$; b) $\frac{15\pi-16}{150}$; c) $2\frac{2}{5}$. **2153**. $\frac{8\sqrt{2}}{21}p^5$. **2154**. $\int_1^3 dx\int_0^{\sqrt{1-(x-2)^2}} xydy =$

$\frac{4}{3}$. **2155.** $\frac{8}{3}a\sqrt{2a}$. **2156.** $\frac{5}{2}\pi R^3$. 提示: $\iint_{(S)} ydxdy = \int_0^{2\pi R} dx \int_0^{y=f(x)} ydy = \int_0^{2\pi} R(1-\cos t)dt \int_0^{R(1-\cos t)} ydy$, 其中最后的积分是由前一积分经代换 $x = R(t-\sin t)$ 而得到. **2157.** $\frac{R^4}{80}$. **2158.** $\frac{1}{6}$. **2159.** $a^2 + \frac{R^2}{2}$. **2160.** $\int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{1/\cos\varphi} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)dr + \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{1/\sin\varphi} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)dr$. **2161.** $\int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{1/\cos\varphi} rf(r)dr$. **2162.** $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int_0^{1/\sin\varphi} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)dr$. **2163.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan\varphi)d\varphi \int_0^{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} rdr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(\tan\varphi)d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} rdr + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} f(\tan\varphi)d\varphi \int_0^{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} rdr$. **2164.** $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)dr + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)dr$. **2165.** $\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} r^2 \sin\varphi dr = \frac{a^3}{12}$. **2166.** $\frac{3}{2}\pi a^4$. **2167.** $\frac{1}{3}\pi a^3$. **2168.** $(\frac{22}{9} + \frac{\pi}{2})a^3$. **2169.** $\frac{1}{6}\pi a^3$. **2170.** $(\frac{\pi}{3} - \frac{16\sqrt{2}-20}{9})\frac{a^3}{2}$. **2171.** $\frac{2}{3}\pi ab$. 提示: 雅克比式 $I = abr$. 积分限$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant 1$. **2172.** $\int_{\alpha/(1+\alpha)}^{\beta/(1+\beta)} dv \int_0^{c/(1-v)} f(u-uv, uv)udu$. 解. 我们有 $x = u(1-v)$ 和 $y = uv$, 因此雅可比行列式 $I = u$. 确定积分限 u 作为 v 的函数: 当 $x = 0$ 时 $u(1-v) = 0$, 得出 $u = 0$ (因为 $1 - v \neq 0$); 当 $x = c$ 时 $u = \frac{c}{1-v}$. v 的变化范围: 因为 $y = ax$, 所以 $uv = \alpha u(1-v)$, 由此得到 $v = \frac{\alpha}{1+\alpha}$; 对 $y = \beta x$ 求得 $v = \frac{\beta}{1+\beta}$. **2173.** $I = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 du \int_{-u}^{u} f(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})dv + \int_1^2 du \int_{u-2}^{2-u} f(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})dv\right] = \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0} dv \int_{-1}^{2+v} f(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})du + \int_0^1 dv \int_v^{2-v} f(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})du\right]$. 经变量变换后正方形边的方程为 $u = v, u+v = 2, u-v = 2, u = -v$. **2174.** $ab\left[\frac{a^2}{h^2} - \frac{b^2}{k^2}\arctan\frac{ak}{bh} + \frac{ab}{hk}\right]$. 曲线方程 $r^4 = r^2(\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi - \frac{b^2}{k^2}\sin^2\varphi)$, 由此得到 r 的下限是 0, 上限是 $r = \sqrt{\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi - \frac{b^2}{k^2}\sin^2\varphi}$. 因为 r 应当是实数, 所以 $\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi - \frac{b^2}{k^2}\sin^2\varphi \geqslant 0$, 由此得出对第一坐标角我们有 $\tan\varphi \leqslant \frac{ak}{bh}$. 由于积分区域关于坐标轴对称的结果, 只需要计算四分之一积分区域, 即限制在第一象限: $\iint_{(S)} dxdy = 4\int_0^{\arctan\frac{ak}{bh}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi - \frac{b^2}{k^2}\sin^2\varphi}} abrdr$.

2175. a) $4\frac{1}{2}$. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx + \int_1^2 dy \int_{y-2}^{\sqrt{2}} dx$; b) $\frac{\pi a^2}{4} - \frac{a^2}{2}$. $\int_0^a dx \int_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy$. **2176.** a) $\frac{9}{2}$; b) $(2+\frac{\pi}{4})a^2$. **2177.** $\frac{7a^2}{120}$. **2178.** $\frac{10}{3}a^2$. **2179.** $\pi(-1 \leqslant x \leqslant 1)$. **2180.** $\frac{16}{3}\sqrt{15}$. **2181.** $3(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2})$. **2182.** $\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$. **2183.** $\frac{5}{4}\pi a^2$. **2184.** 6. **2185.** 10π. 作变量变换 $x - 2y = u, 3x + 4y = v$. **2186.** $\frac{1}{3}(b-a)(\beta-\alpha)$. **2187.** $\frac{1}{3(\beta-\alpha)}\ln\frac{b}{a}$. **2188.** $v = \int_0^1 dy \int_y^1 (1-x)dx = \int_0^1 dx \int_0^x (1-x)dy$. **2193.** $\frac{\pi a^3}{6}$. **2194.** $\frac{3}{4}$. **2195.** $\frac{1}{6}$. **2196.** $\frac{a^3}{3}$. **2197.** $\frac{\pi r^4}{4a}$. **2198.** $\frac{48\sqrt{6}}{5}$. **2199.** $\frac{88}{105}$. **2200.** $\frac{a^3}{18}$. **2201.** $\frac{abc}{3}$. **2202.** $\pi a^3(\alpha-\beta)$. **2203.** $\frac{4}{3}\pi a^3(2\sqrt{2}-1)$. **2204.** $\frac{4}{3}\pi a^3(\sqrt{2}-1)$. **2205.** $\frac{\pi a^3}{3}$. **2206.** $\frac{4}{3}\pi abc$. **2207.** $\frac{1}{3}\pi a^3(6\sqrt{3}-5)$. **2208.** $\frac{32}{9}a^3$. **2209.** $\pi a(1-e^{-R^2})$. **2210.** $\frac{3\pi ab}{2}$. **2211.** $\frac{3\sqrt{3}-2}{2}$. **2212.** $\frac{\sqrt{2}}{3}(2\sqrt{2}-1)$. 作变量变换 $xy = u, \frac{y}{x} = v$. **2213.** $\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$. **2214.** $4(m-n)R^2$. **2215.** $\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$. 在 YOZ 平面积分. **2216.** $4a^2$. **2217.** $8a^2\arcsin\frac{b}{a}$. **2218.** $\frac{1}{3}\pi a^2(3\sqrt{3}-1)$. **2219.** $8a^2$. **2220.1.** $3\pi a^2$. 变换到极坐标. **2.** π. 把曲面投影到坐标平面 XOZ 上. **3.** $a^2\sqrt{2}$. **2221.** $\sigma = \frac{2}{3}\pi a^2[(1+\frac{R^2}{a^2})^{3/2} - 1]$. 变换到极坐标. **2222.** $\sigma = \frac{16}{9}a^3$ 和 $8a^2$. 变换到极坐标. **2223.** $8a^2\arctan\frac{\sqrt{2}}{5}$. 提示: $\sigma = 8\int_0^{a/2} dx \int_0^{a/2} \frac{ady}{a^2-x^2-y^2} = 8a\int_0^{a/2} \arcsin\frac{a}{2\sqrt{a^2-x^2}}dx$. 先分部积分,而后作变换 $x = \frac{a\sqrt{3}}{2\sin t}$, 换算答案. **2224.** $\frac{\pi}{4}(b\sqrt{b^2+c^2} - a\sqrt{a^2+c^2} + c^2\ln\frac{b+\sqrt{b^2+c^2}}{a+\sqrt{a^2+c^2}})$. 变换到极坐标. **2225.** $\frac{2\pi\delta R^2}{3}$. **2226.** $\frac{a^3b}{12}, \frac{a^2b^2}{24}$. **2227.** $\overline{x} = \frac{12-\pi}{3(4-\pi)}, \overline{y} = \frac{\pi}{6(4-\pi)}$. **2228.** $\overline{x} = \frac{5}{6}a, \overline{y} = 0$. **2229.** $\overline{x} = \frac{2a\sin\alpha}{3a}, \overline{y} = 0$. **2230.** $\overline{x} = \frac{2}{5}, \overline{y} = 0$. **2231.** $I_X = 4$. **2232.** a) $I_0 = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$; b) $I_X = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$. **2233.** $I = \frac{2}{3}a^4$. **2234.** $\frac{8}{5}a^4$. 提示: $I = \int_0^a dx \int_{-\sqrt{ax}}^{\sqrt{ax}} (y+a)^2 dy$. **2235.** $16\ln 2 - 9\frac{3}{8}$. 利用直线的法式方程, 求得点 (x,y) 到直线 $x = y$ 的距离为

$d = \frac{|x-y|}{\sqrt{2}}$. **2236.** $I = \frac{1}{40}ka^5[7\sqrt{2} + 3\ln(\sqrt{2}+1)]$, 其中, k 为比例系数. 由于薄片密度与到一个顶点的距离成正比, 因此就将这个顶点取作坐标原点, 坐标轴的方向沿正方形的边, 从而关于 OX 轴的转动惯量即可确定. 变换为极坐标有: $I_X = \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{a\sec\varphi} kr(r\sin\varphi)^2 rdr + \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\csc\varphi} kr(r\sin\varphi)^2 rdr$. **2237.** $I_0 = \frac{35}{16}\pi a^4$. **2238.** $I_0 = \frac{1}{2}\pi a^4$. **2239.** $I_0 = \frac{35}{12}\pi a^4$. 把 t 和 y 作为积分变量 (参阅 2156 题). **2240.** $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} f(x,y,z)dz$. **2241.** $\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^H f(x,y,z)dz$. **2242.** $\int_{-a}^{a} dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{c} f(x,y,z)dz$. **2243.** $\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x,y,z)dz$. **2244.** $\frac{8}{15}(31+12\sqrt{2}-27\sqrt{3})$. **2245.** $\frac{4\pi\sqrt{2}}{3}$. **2246.** $\frac{\pi^2a^2}{8}$. **2247.** $\frac{1}{720}$. **2248.** $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}$. **2249.** $\frac{\pi a^5}{5}(18\sqrt{3} - \frac{97}{6})$. **2250.** $\frac{59}{480}\pi R^5$. **2251.** $\frac{\pi abc^2}{4}$. **2252.** $\frac{4}{5}\pi abc$. **2253.** $\frac{\pi h^2R^2}{4}$. **2254.** πR^3. **2255.** $\frac{8}{9}a^2$. **2256.** $\frac{8}{3}r^3(\pi - \frac{4}{3})$. **2257.** $\frac{4}{15}\pi R^5$. **2258** $\frac{\pi}{10}$. **2259.** $\frac{32}{9}a^2h$. **2260.** $\frac{3}{4}\pi a^3$. 解. $v = 2\int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} dy \int_0^{\frac{x^2+y^2}{2a}} dz = 2\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} rdr \int_0^{r^2/(2a)} dh = 2\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} \frac{r^3dr}{2a} = \frac{1}{a}\int_0^{\pi/2} \frac{(2a\cos\varphi)^4}{4} d\varphi = \frac{3}{4}\pi a^3$. **2261.** $\frac{2\pi a^3\sqrt{2}}{3}$. 变换到球坐标. **2262.** $\frac{19}{6}\pi$. 变换到柱坐标. **2263.** $\frac{a^3}{9}(3\pi - 4)$. **2264.1.** πabc. **2.** $\frac{\pi^2abc}{4\sqrt{2}}$. **3.** $\frac{4\pi}{3}(\sqrt{2}-1)abc$. **2265.** $\frac{abc}{2}(a+b+c)$. **2266.** $\frac{ab}{24}(6c^2 - a^2 - b^2)$. **2267.** $\overline{x} = 0, \overline{y} = 0, \overline{z} = \frac{2}{5}a$. 采用球坐标. **2268.** $\overline{x} = \frac{4}{3}, \overline{y} = 0, \overline{z} = 0$, **2269.** $\frac{\pi a^2}{12}(3a^2+4h^2)$. 取圆柱轴作为 OZ 轴, 圆柱底面作为 XOY 平面, 计算关于 OX 轴的转动惯量. 转化到柱面坐标后, 体积元 $rd\varphi drdz$ 到 OX 轴的距离平方等于 $r^2\sin^2\varphi + z^2$. **2270.** $\frac{\pi\rho ha^2}{60}(3a^2 + 2h^2)$. 取圆锥底面作为 XOY 平面, 圆锥轴作为 OZ 轴, 计算出关于 OX 轴的转动惯量. 变换到柱面坐标, 对锥面上的点有: $r = \frac{a}{h}(h-z)$, 且体积元 $rd\varphi drdz$ 到 OX 轴的距离平方为 $r^2\sin^2\varphi + z^2$. **2271.** $2\pi k\rho h(1-\cos\alpha)$, 其中 k 为比例常数, ρ 是密度. 解. 取圆锥顶点作为原点, 它的轴作为 OZ 轴. 如果采用球面坐标, 则锥的侧面方程为 $\psi = \frac{\pi}{a} - \alpha$, 而底面方程为 $r = \frac{h}{\sin\psi}$. 由对称性得知引力方向沿 OZ 轴, 体积元的质量 $dm = \rho r^2\cos\psi d\varphi d\psi dr$, 其中 ρ 为密度. 这个质量元与位于点 O 的单位质量的引力沿 OZ 轴的分量等于 $\frac{kdm}{r^2}\sin\psi = k\rho\sin\psi\cos\psi d\psi d\varphi dr$. 结果引力为 $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha} d\psi \int_0^{h\csc\psi} k\rho\sin\psi\cos\psi dr$. **2272.** 解. 以球心作为原点, 使 OZ 轴通过质点, 采用柱面坐标 (ρ,φ,z). 令质点的质量为 m, 质点到球心的距离记为 ξ, 设体积元 dv 到质点的距离为 $r = \sqrt{\rho^2+(\xi-z)^2}$. 球的体积元 dv 与质点 m 的引力指向 r 方向, 数量等于 $-k\gamma m\frac{dv}{r^2}$, 其中 $\gamma = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ 是球的密度, $dv = \rho d\varphi d\rho dz$ 是体积元, 这个力在 OZ 轴上的投影为 $dF = -k\gamma m\frac{dv}{r^2}\cos(\widehat{r,z}) = -k\gamma m\frac{\xi-z}{r^3}\rho d\varphi d\rho dz$, 由此得出 $F = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-R}^{R} (\xi-z)dz \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{\rho d\rho}{r^3} = -km\gamma \times \frac{4}{3}\pi R^3\frac{1}{\xi^2}$, 但是因为 $\frac{4}{3}\gamma\pi R^3 = M$, 所以 $F = \frac{kMm}{\xi^2}$. **2273.** $-\int_x^{\infty} y^2e^{-xy^2}dy - e^{-x^3}$. **2275.** a) $\frac{1}{p}$ $(p>0)$; b) 当 $p > a$ 为 $\frac{1}{p-a}$; c) $\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$ $(p>0)$; d) $\frac{p}{p^2+\beta^2}$ $(p>0)$. **2276.** $-\frac{1}{n^2}$. **2277.** $\frac{2}{p^3}$ (将 $\int_0^{\infty} e^{-pt}dt = \frac{1}{p}$ 对 p 求异两次). **2278.** $\ln\frac{\beta}{\alpha}$. **2279.** $\arctan\frac{\beta}{m} - \arctan\frac{\alpha}{m}$. **2280.** $\frac{\pi}{2}\ln|1+\alpha|$. **2281.** $\pi(\sqrt{1-\alpha^2}-1)$. **2282.** $\arctan\frac{\alpha}{\beta}$. **2283.** 1. **2284.** $\frac{1}{2}$. **2285.** $\frac{\pi}{4}$. **2286.** $\frac{\pi}{4a^2}$. 应当变换到极坐标. **2287.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. **2288.** $\frac{\pi^2}{8}$. **2289.** 收敛. 自 S 中除去原点及其 ε–邻域, 亦即研究 $I_\varepsilon = \iint_{(S_\varepsilon)} \ln\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, 其中扣除的区域是以 ε 为半径、以原点为中心的圆. 变换到极坐标, 有 $I_\varepsilon = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_\varepsilon^1 r\ln rdr = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\ln r\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_\varepsilon^1 rdr\right]d\varphi = 2\pi(\frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{\varepsilon}{2}\ln\varepsilon - \frac{1}{4})$. 由此得出 $\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = -\frac{\pi}{2}$. **2290.** 当 $\alpha > 1$ 时收敛. **2291.** 收敛. 作包围直线 $y = x$ 的狭窄带状区域, 且令 $\iint_{(S)} \frac{dxdy}{\sqrt[3]{(x-y)^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^1 dx \int_0^{x-\varepsilon} \frac{dy}{\sqrt[3]{(x-y)^2}} + \lim_{\delta\to 0}\int_0^1 dx \int_{x+\delta}^1 \frac{dy}{\sqrt[3]{(x-y)^2}}$. **2292.** 当 $\alpha > \frac{3}{2}$ 时收敛. **2293.** 0. **2294.** $\ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}$. **2295.** $\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$. **2296.** $\frac{256}{15}a^3$.

2297. $\frac{a^2}{3}[(1+4\pi^2)^{\frac{3}{2}}-1]$. **2298.** $\frac{a^5\sqrt{1+m^2}}{5m}$. **2299.** $a^2\sqrt{2}$. **2300.** $\frac{56\sqrt{7}-1}{54}$. **2301.** $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\arctan\frac{2\pi b}{a}$. **2302.** $2\pi a^2$. **2303.** $\frac{16}{27}(10\sqrt{10}-1)$. 提示: 积分 $\int_C f(x,y)ds$ 在几何上可看成是与 OZ 轴平行的柱面侧面积, 柱面的底面是积分周线, 高是被积函数值, 所以 $S=\int_C xds$, 其中 C 是连接点 $(0,0)$ 和 $(4,6)$ 的抛物线 $y=\frac{3}{8}x^2$ 的弧 OA. **2304.** $a\sqrt{3}$. **2305.** $2(b^2+\frac{a^2b}{\sqrt{a^2-b^2}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}})$. **2306.** $\sqrt{a^2+b^2}(\pi\sqrt{a^2+4\pi b^2}+\frac{a^2}{2b}\ln\frac{2\pi b+\sqrt{a^2+4\pi b^2}}{a})$. **2307.** $(\frac{4}{3}a, \frac{4}{3}a)$. **2308.** $2\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}$. **2309.** $\frac{kMmb}{\sqrt{(a^2+b^2)^3}}$. **2310.** $40\frac{19}{30}$. **2311.** $-2\pi a^2$. **2312.** a) $\frac{4}{3}$; b) 0; c) $\frac{12}{5}$; d) -4; e) 4. **2313.** 4. 在所有的情况下. **2314.** -2π. 利用圆的参数方程. **2315.** $\frac{4}{3}ab^2$. **2316.** $-2\sin 2$. **2317.** 0 **2318.** a) 8; b) 12; c) 2; d) $\frac{3}{2}$; e) $\ln(x+y)$ f) $\int_{x_1}^{x_2}\varphi(x)dx+\int_{y_1}^{y_2}\psi(y)dy$. **2319.** a) 62; b) 1; c) $\frac{1}{4}+\ln 2$; d) $1+\sqrt{2}$. **2320.** $\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1+b^2}$. **2322.** a) $x^2+3xy-2y^2+C$; b) $x^3-x^2y+xy^2-y^3+C$; c) $e^{x-y}(x+y)+C$; d) $\ln|x+y|+C$. **2323.** $-2\pi a(a+b)$. **2324.** $-\pi R^2\cos^2\alpha$. **2325.** $(\frac{1}{6}+\frac{\pi\sqrt{2}}{16})R^3$. **2326.** a) -2; b) $abc-1$; c) $5\sqrt{2}$; d) 0. **2327.** $I=\iint_{(S)}y^2dxdy$. **2328.** $-\frac{4}{3}$. **2329.** $\frac{\pi R^4}{2}$. **2330.** $-\frac{1}{3}$. **2331.** 0. **2332.** a) 0; b) $2n\pi$. 在情况 b) 中对包含在周线 C 和以原点为中心半径充分小的圆周之间区域应用格林公式. **2333.** 如果认定切线方向与周线正的绕行方向一致, 则 $\cos(X,n)=\cos(Y,t)-\frac{dy}{ds}$, 亦即 $\oint_C\cos(X,n)ds=\oint_C\frac{dy}{ds}ds=\oint_C dy=0$. **2334.** $2S$, 其中 S 是边界 C 所围面积. **2335.** -4. 格林公式不能用, 所给积分是广义的, 因为在积分周线与直线 $x+y=0$ 的交点处, 被积函数为 $\frac{0}{0}$ 的形式. **2336.** πab. **2337.** $\frac{3}{8}\pi a^2$. **2338.** $6\pi a^2$. **2339.** $\frac{3}{2}a^2$. 提示: 令 $y=tx$, 其中 t 为参数. **2340.** $\frac{a^2}{60}$. **2341.** $\pi(R+r)(R+2r)$. 当 $R=r$ 时为 $6\pi R^2$. 外摆线方程为 $x=(R+r)\cos t-r\cos\frac{R+r}{r}t, y=(R+r)\sin t-r\sin\frac{R+r}{r}t$, 其中 t 为通过切点的定圆半径的转角. **2342.** $\pi(R-r)(R-2r)$ 当 $r=\frac{R}{4}$ 时为 $\frac{3}{8}\pi R^2$. 内摆线方程由相应的外摆线方程中用 $-r$ 代替 r 得到. **2343.** FR. **2344.** $mg(z_1-z_2)$. **2345.** $\frac{k}{2}(a^2-b^2)$, 其中 k 为比例系数. **2346.** a) 势 $U=-mgz$, 功 $mg(z_1-z_2)$; b) 势 $U=\frac{\mu}{r}$, 功 $-\frac{\mu}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$; c) 势 $U=-\frac{k^2}{2}(x^2+y^2+z^2)$, 功 $\frac{k^2}{2}(R^2-r^2)$. **2347.** $\frac{8}{3}\pi a^4$. **2348.** $\frac{2\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}}{3}$. **2349.** 0. **2350.** $\frac{4}{3}\pi abc$. **2351.** $\frac{\pi a^4}{2}$. **2352.** $\frac{3}{4}$. **2353.** $\frac{25\sqrt{5}+1}{10(5\sqrt{5}-1)}a$. **2354.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}h^4$. **2355.** a) 0; b) $-\iint_{(S)}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)dS$. **2356.** 0. **2357.** 4π. **2358.** $-\pi a^2$. **2359.** $-a^3$ **2360.** $\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$. **2361.** 0. **2362.** $2\iiint_{(V)}(x+y+z)dxdydz$. **2363.** $2\iiint_{(V)}\frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **2364.** $\iiint_{(V)}(\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2U}{\partial z^2})dxdydz$. **2365.** $3a^4$. **2366.** $\frac{a^3}{2}$. **2367.** $\frac{12}{5}\pi a^5$. **2368.** $\frac{\pi a^2b^2}{2}$. **2371.** 球面, 柱面. **2372.** 圆锥. **2374.** 圆周 $x^2+y^2=c_1^2, z=c_2$. **2376.** $\mathrm{grad}U(A)=9\mathbf{i}-3\mathbf{j}-3\mathbf{k}, |\mathrm{grad}U(A)|=\sqrt{99}=3\sqrt{11}; z^2=xy, x=y=z$. **2377.** a) $\frac{\mathbf{r}}{r}$; b) $2\mathbf{r}$; c) $-\frac{\mathbf{r}}{r^3}$; d) $f'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$. **2378.** $\mathrm{grad}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r})=\mathbf{c}$. 等位面为平面, 与向量 $\mathbf{c}$ 垂直. **2379.** $\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{2U}{r}$, 当 $a=b=c$ 时, $\frac{\partial U}{\partial r}=|\mathrm{grad}U|$. **2380.** $\frac{\partial U}{\partial l}=-\frac{\cos(\mathbf{l};\mathbf{r})}{r^2}$; 当 $\mathbf{l}\perp\mathbf{r}$ 时, $\frac{\partial U}{\partial l}=0$. **2382.** $\frac{2}{r}$. **2383.** $\mathrm{div}\mathbf{a}=\frac{2}{r}f(r)+f'(r)$. **2385.** a) $\mathrm{div}\mathbf{r}=3, \mathrm{rot}\mathbf{r}=\mathbf{0}$; b) $\mathrm{div}(r\mathbf{c})=\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{c}}{r}, \mathrm{rot}(r\mathbf{c})=\frac{\mathbf{r}\times\mathbf{c}}{r}$; c) $\mathrm{div}(f(r)\mathbf{c})=\frac{f'(r)}{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{c}), \mathrm{rot}(f(r)\mathbf{c})=-\frac{f'(r)}{r}\mathbf{r}\times\mathbf{c}$. **2386.** $\mathrm{div}\mathbf{v}=0, \mathrm{rot}\mathbf{v}=2\mathbf{w}$, 其中 $\mathbf{w}=w\mathbf{k}$. **2387.** $2\omega\mathbf{n}^0$, 其中 $\mathbf{n}^0$ 是平行于旋转轴的单位向量. **2388.** $\mathrm{divgrad}U=\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2U}{\partial z^2}, \mathrm{rotgrad}U=\mathbf{0}$. **2391.** $3\pi R^2H$. **2392.** a) $\frac{1}{10}\pi R^2H(3R^2-4H^2)$; b) $\frac{3}{10}\pi R^2H(R^2+2H^2)$. **2393.** 在除坐标原点外的所有点处, $\mathrm{div}\mathbf{F}=0$. 流量等于 $-4\pi m$. 当计算流量时利用奥斯特洛格拉斯基 - 高斯公式. **2394.** $2\pi^2h^2$. **2395.** $-\frac{\pi R^6}{8}$. **2396.** $U=\int_{r_0}^{r_1}rf(r)dr$. **2397.** $\frac{m}{r}$ **2398.** a) 没有:

b) $U = xyz + C$; c) $U = xy + yz + zx + C$. **2400**. 是.

第八章

2401. $\frac{1}{2n-1}$. **2402**. $\frac{1}{2n}$. **2403**. $\frac{n}{2^{n-1}}$. **2404**. $\frac{1}{n^2}$. **2405**. $\frac{n+2}{(n+1)^2}$. **2406**. $\frac{2n}{3n+2}$. **2407**. $\frac{1}{n(n+1)}$. **2408**. $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}$. **2409**. $(-1)^{n+1}$. **2410**. $n^{(-1)^{n+1}}$. **2416**. 发散. **2417**. 收敛. **2418**. 发散. **2419**. 发散. **2420**. 发散. **2421**. 发散. **2422**. 发散. **2423**. 发散. **2424**. 发散. **2425**. 收敛. **2426**. 收敛. **2427**. 收敛. **2428**. 收敛. **2429**. 收敛. **2430**. 收敛. **2431**. 收敛. **2432**. 收敛. **2433**. 收敛. **2434**. 发散. **2435**. 发散. **2436**. 收敛. **2437**. 发散. **2438**. 收敛. **2439**. 收敛. **2440**. 收敛. **2441**. 发散. **2442**. 收敛. **2443**. 收敛. **2444**. 收敛. **2445**. 收敛. **2446**. 收敛. **2447**. 收敛. **2448**. 收敛. **2449**. 收敛. **2450**. 发散. **2451**. 收敛. **2452**. 发散. **2453**. 收敛. **2454**. 发散. **2455**. 发散. **2456**. 收敛. **2457**. 发散. **2458**. 收敛. **2459**. 发散. **2460**. 收敛. **2461**. 发散. **2462**. 收敛. **2463**. 发散. **2464**. 收敛. **2465**. 收敛. **2466**. 收敛. **2467**. 发散. **2468**. 发散. 提示: $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. **2470**. 条件收敛. **2471**. 条件收敛. **2472**. 绝对收敛. **2473**. 发散. **2474**. 条件收敛. **2475**. 绝对收敛. **2476**. 条件收敛. **2477**. 绝对收敛. **2478**. 绝对收敛. **2479**. 发散. **2480**. 绝对收敛. **2481**. 条件收敛. **2482**. 绝对收敛. **2484**. a) 发散; b) 绝对收敛; c) 发散; d) 条件收敛. 提示: 在问题 a) 和 d) 中, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(a_{2k-1} + a_{2k})$ 发散, 而在问题 b) 和 c)中, 分别研究级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$. **2485**. 发散. **2486**. 绝对收敛. **2487**. 绝对收敛. **2488**. 条件收敛. **2489**. 发散. **2490**. 绝对收敛. **2491**. 绝对收敛. **2492**. 绝对收敛. **2493**. 是. **2494**. 不是. **2495**. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{3^n}$, 收敛. **2496**. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n-1)}$, 收敛. **2497**. 发散. **2499**. 收敛. **2500**. 收敛. **2501**. $|R_4| < \frac{1}{120}, |R_5| < \frac{1}{720}, R_4 < 0, R_5 > 0$. **2502**. $R_n < \frac{a_n}{2n+1} = \frac{1}{2^n(2n+1)n!}$. 提示: 级数的余项可利用超过这余项的几何级数之和来估计: $R_n = a_n[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1} + (\frac{1}{2})^2\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots] < a_n[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1} + (\frac{1}{2})^2\frac{1}{(n+1)^2} + \cdots]$. **2503**. $R_n < \frac{n+2}{(n+1)(n+1)!}, R_{10} < 3\cdot 10^{-8}$. **2504**. $\frac{1}{n+1} < R_n < \frac{1}{n}$. 解. $R_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots > \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + \cdots = \frac{1}{n+1}, R_n < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots = \frac{1}{n}$. **2505**. 可容易求出给定级数的余项精确值: $R_n = \frac{1}{15}(n+\frac{16}{15})(\frac{1}{4})^{2n-2}$. 解. $R_n = (n+1)(\frac{1}{4})^{2n} + (n+2)(\frac{1}{4})^{2n+2} + \cdots$. 乘 $(\frac{1}{4})^2$: $\frac{1}{16}R_n = (n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+2} + (n+2)\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+4} + \cdots$. 计算后得 $\frac{16}{15}R_n = n\left(\frac{1}{4}\right)^{2n} + (\frac{1}{4})^{2n} + (\frac{1}{4})^{2n+2} + (\frac{1}{4})^{2n+4} + \cdots = n\left(\frac{1}{4}\right)^{2n} + \frac{(\frac{1}{4})^{2n}}{1-\frac{1}{16}} = (n+\frac{16}{15})(\frac{1}{4})^{2n}$. 由此求得上面给出的 R_n 值. 令 $n = 0$ 得级数的和 $S = (\frac{16}{15})^2$. **2506**. 99, 999. **2507**. 2, 3, 5. **2508**. $S = 1$. 提示: $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ **2509**. 当 $x > 0$ 时 $S = 1$; 当 $x < 0$ 时 $S = -1$; 当 $x = 0$ 时 $S = 0$. **2510**. 当 $x > 1$ 时绝对收敛; 当 $x \leqslant 1$ 时发散. **2511**. 当 $x > 1$ 时绝对收敛; 当 $0 < x \leqslant 1$ 时非绝对收敛; 当 $x \leqslant 0$ 时发散. **2512**. 当 $x > e$ 时绝对收敛; 当 $1 < x \leqslant e$ 时非绝对收敛; 当 $x \leqslant 1$ 时发散. **2513**. $-\infty < x < \infty$. **2514**. $-\infty < x < \infty$. **2515**. 当 $x > 0$ 时绝对收敛; 当 $x \leqslant 0$ 时发散. 解. 1) $|a_n| \leqslant \frac{1}{e^{nx}}$, 且当 $x > 0$ 时, 以 $\frac{1}{e^{nx}}$ 为通项的级数收敛;2) 当 $x \leqslant 0$ 时, $\frac{1}{e^{nx}} \geqslant 1$, 且当 $n \to \infty$ 时 $\cos nx$ 不趋于零, 由于从 $\cos nx \to 0$ 即可得出 $\cos 2nx \to -1$, 因此当 $x \leqslant 0$ 时不满足收敛的必要条件. **2516**. 当 $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时绝对收敛, 在其他点处发散. **2517**. 处处发散. **2518**. 当 $x \neq 0$ 时绝对收敛. **2519**. $x > 1, x \leqslant -1$.

2520. $x>3, x<1$. **2521**. $x \geqslant 1, x \leqslant -1$. **2522**. $x \geqslant 5\frac{1}{3}, x \leqslant 4\frac{2}{3}$. **2523**. $x>1, x<-1$. **2524**. $-1<x<-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}<x<1$. 提示: 对这些 x 的值, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ 与级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k x^k}$ 都收敛. 当 $|x| \geqslant 1$ 与当 $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ 时级数的通项不趋于零. **2525**. $-1<x<0, 0<x<1$. **2526**. $-1<x<1$. **2527**. $-2 \leqslant x<2$. **2528**. $-1<x<1$. **2529**. $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$. **2530**. $-1<x \leqslant 1$. **2531**. $-1<x<1$. **2532**. $-1<x<1$. **2533**. $-\infty<x<\infty$. **2534**. $x=0$. **2535**. $-\infty<x<\infty$. **2536**. $-4<x<4$. **2537**. $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$. **2538**. $-2<x<2$. **2539**. $-e<x<e$. **2540**. $-3 \leqslant x<3$. **2541**. $-1<x<1$. **2542**. $-1<x<1$. 当 $|x| \geqslant 1$ 时级数的发散性是明显的 (但是, 注意到下面的事实是有趣的: 在收敛区间的端点 $x=\pm 1$ 处级数发散, 这不仅可以用收敛的必要条件, 而且可以用达朗贝尔判别法进行说明). 当 $|x|<1$ 时, 有

$$\lim_{n \to \infty}\left[\frac{(n+1)!x^{(n+1)!}}{n!x^{n!}}\right]=\lim_{n \to \infty}\left|(n+1)x^{n!n}\right| \leqslant \lim_{n \to \infty}(n+1)|x|^n=\lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{|x|^{-n}}=0.$$

(最后等式容易利用洛必达法则得到). **2543**. $-1 \leqslant x \leqslant 1$. 利用达朗贝尔判别法不仅可以求出收敛区间, 而且可以研究在收敛区间端点已给级数的收敛性. **2544**. $-1 \leqslant x \leqslant 1$. 利用柯西判别法不仅可以求出收敛区间. 而且可以研究在收敛区间端点已给级数的收敛性. **2545**. $2<x \leqslant 8$. **2546**. $-2 \leqslant x<8$. **2547**. $-2<x<4$. **2548**. $1 \leqslant x \leqslant 3$. **2549**. $4 \leqslant x \leqslant -2$. **2550**. $x=-3$. **2551**. $-7<x<-3$. **2552**. $0 \leqslant x<4$. **2553**. $-\frac{5}{4}<x<\frac{13}{4}$. **2554**. $-e-3<x<e-3$. **2555**. $-2 \leqslant x \leqslant 0$. **2556**. $2<x<4$. **2557**. $1<x \leqslant 3$. **2558**. $-3 \leqslant x \leqslant -1$. **2559**. $1-\frac{1}{e} \leqslant x \leqslant 1+\frac{1}{e}$. 当 $x=1 \pm \frac{1}{e}$ 时级数发散, 这是因为 $\lim_{n \to \infty} \frac{(1+n^{-1})^{n^2}}{e^n}=\frac{1}{\sqrt{e}} \neq 0$. **2560**. $-2<x<0$. **2561**. $1<x \leqslant 3$. **2562**. $1 \leqslant x<5$. **2563**. $2 \leqslant x \leqslant 4$. **2564**. $|z|<1$. **2565**. $|z|<1$. **2566**. $|z-2i|<3$. **2567**. $|z|<\sqrt{2}$. **2568**. $z=0$. **2569**. $|z|<\infty$. **2570**. $|z|<\frac{1}{2}$. **2576**. $-\ln(1-x)$ $(-1 \leqslant x<1)$. **2577**. $\ln(1+x)$ $(-1<x \leqslant 1)$. **2578**. $\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}(|x|<1)$. **2579**. $\arctan x(|x| \leqslant 1)$. **2580**. $\frac{1}{(x-1)^2}$ $(|x|<1)$. **2581**. $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ $(|x|<1)$. **2582**. $\frac{2}{(1-x)^3}$ $(|x|<1)$. **2583**. $\frac{x}{(x-1)^2}$ $(|x|>1)$. **2584**. $\frac{1}{2}(\arctan x-\frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x})$ $(|x|<1)$. **2585**. $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$. 研究当 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时级数 $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots$ 的和 (参看第 2579 题). **2586**. 3. **2587**. $a^x=1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \ln^n a}{n!}$ $(|x|<\infty)$. **2588**. $\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}[1+x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^{\frac{n^2-n}{2}} \frac{x^n}{n!}+\cdots]$. **2589**. $\cos(x+a)=\cos a-x \sin a-\frac{x^2}{2!} \cos a+\frac{x^3}{3!} \sin a+\frac{x^4}{4!} \cos a+\cdots+\frac{x^n}{n!} \sin[\alpha+\frac{(n+1)\pi}{2}]+\cdots(|x|<\infty)$. **2590**. $\sin^2 x=\frac{2x^2}{2!}-\frac{2^3x^4}{4!}+\frac{2^5x^6}{6!}-\cdots+(-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\cdots(|x|<\infty)$. **2591**. $\ln(2+x)=\ln 2+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2 \cdot 2^2}+\frac{x^3}{3 \cdot 2^3}-\cdots+(-1)^{n-1} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}+\cdots(-2<x \leqslant 2)$. 利用关于幂级数的积分定理研究级数的余项. **2592**. $\frac{2x-3}{(x-1)^2}=-\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)x^n(|x|<1)$. **2593**. $\frac{3x-5}{x^2-4x+3}=-\sum_{n=0}^{\infty}(1+\frac{2}{3^{n+1}})x^n(|x|<1)$. **2594**. $xe^{-2x}=x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}x^n}{(n-1)!}(|x|<\infty)$. **2595**. $e^{x^2}=1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n)!}(|x|<\infty)$. **2596**. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(|x|<\infty)$. **2597**. $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}$. **2598**. $1+\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}$ $(|x|<\infty)$. **2599**. $2 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(n+2)3^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(|x|<\infty)$. **2600**. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}(|x|<3)$. **2601**. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2^3}+\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^4}{2^5}+\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^6}{2^7}+\cdots \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots(2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots(2n)} \frac{x^{2n}}{2^{2n+1}}+\cdots$ $(|x|<2)$. **2602**. $2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x|<1)$. **2603**. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^n-1}{n} x^n$ $(-\frac{1}{2}<x \leqslant \frac{1}{2})$. **2604**. $x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{(n-1)n}$ $(|x| \leqslant 1)$. **2605**. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}(|x| \leqslant 1)$. **2606**. $x+\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3}+\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5}+\cdots \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots(2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots(|x| \leqslant 1)$. **2607**. $x-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3}+\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots(2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$ $(|x| \leqslant 1)$.

2608. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{4n-3}x^{2n}}{(2n)!}$ $(|x|<\infty)$. **2609**. $1+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n-1}{n!}x^n$ $(|x|<\infty)$. **2610**. $8+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n+3^{n-1}}{n!}x^n(|x|<\infty)$. **2611**. $2+\frac{x}{2^2\cdot 3\cdot 1!}-\frac{2\cdot x^2}{2^5\cdot 3^2\cdot 2!}+\frac{2\cdot 5\cdot x^3}{2^8\cdot 3^3\cdot 3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-4)x^n}{2^{3n-1}\cdot 3^n\cdot n!}+\cdots$ $(|x|<\infty)$. **2612**. $\frac{1}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}})x^n(|x|<2)$. **2613**. $1+\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(1+3^{2n-1})x^{2n}}{(2n)!}(|x|<\infty)$. **2614**. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{4^{n+1}}$ $(|x|<\sqrt{2})$. **2615**. $\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(1+2^{-n})\frac{x^n}{n}$ $(-1<x\leqslant 1)$. **2616**. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}(|x|<\infty)$. **2617**. $x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot n!}(|x|<\infty)$. **2618**. $\sum_{n=1}^{\infty}(-)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}$ $(|x|\leqslant 1)$. **2619**. $x+\frac{1}{2\cdot 5}x^5+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 9\cdot 2!}x^9+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot(4n+1)\cdot n!}x^{4n+1}+\cdots(|x|<1)$. **2620**. $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\cdots$. **2621**. $x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}-\cdots$. **2622**. $e\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}-\cdots\right)$. **2623**. $1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\cdots$. **2624**. $-(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^6}{45}+\cdots)$. **2625**. $x+x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots$. **2626**. 提示: 从椭圆的参数方程 $x=a\cos t, y=b\sin t$ 出发, 算出椭圆的周长, 再把所得到的表达式展开为 ε 的幂级数. **2628**. $x^3-2x^2-5x-2=-78+59(x+4)-14(x+4)^2+(x+4)^3$ $(|x|<\infty)$. **2629**. $f(x+h)=5x^3-4x^2-3x+2+(15x^2-8x-3)h+(15x-4)h^2+5h^3$ $(|x|<\infty,|h|<\infty)$. **2630**. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$ $(0<x\leqslant 2)$. **2631**. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$ $(0<x<2)$. **2632**. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x+1)^n$ $(-2<x<0)$. **2633**. $\sum_{n=0}^{\infty}(2^{-n-1}-3^{-n-1})(x+4)^n$ $(-6<x<-2)$. **2634**. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+2)^{2n}}{3^{n+1}}(-2-\sqrt{3}<x<-2+\sqrt{3})$. **2635**. $e^{-2}[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}]$ $(|x|<\infty)$. **2636**. $2+\frac{x-4}{2^2}-\frac{1}{4}\frac{(x-4)^2}{2^4}+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 6}\frac{(x-4)^3}{2^6}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 6\cdot 8}\frac{(x-4)^4}{2^8}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{4\cdot 6\cdot 8\cdots(2n)}\frac{(x-4)^n}{2^{2n}}+\cdots$ $(0\leqslant x\leqslant 8)$. **2637**. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-\frac{\pi}{2})^{2n-1}}{(2n-1)!}$ $(|x|<\infty)$. **2638**. $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{n-1}(x-\frac{\pi}{4})^{2n-1}}{(2n-1)!}(|x|<\infty)$. **2639**. $-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}(\frac{1-x}{1+x})^{2n+1}$ $(0<x<\infty)$. 作代换 $\frac{1-x}{1+x}=t$, 并把 $\ln x$ 按 t 的幂次展开. **2640**. $\frac{x}{1+x}+\frac{1}{2}(\frac{x}{1+x})^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}(\frac{x}{1+x})^3+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)}(\frac{x}{1+x})^n+\cdots(-\frac{1}{2}\leqslant x<\infty)$. **2641**. $|R|<\frac{e}{5!}<\frac{1}{40}$. **2642**. $|R|<\frac{1}{11}$. **2643**. $\frac{\pi}{6}\approx\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{(\frac{1}{2})^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{(\frac{1}{2})^5}{5}\approx 0.523$. 为了证明误差不大于 0.001, 必须利用超过这个余项的几何级数来估计余项. **2644**. 两项, 即 $1-\frac{x^2}{2}$. **2645**. 两项, 即 $x-\frac{x^3}{6}$. **2646**. 八项, 即 $1+\sum_{n=1}^{7}\frac{1}{n!}$. **2647**. 99,999. **2648**. 1.92. **2649**. $|R|<0.0003$. **2650**. 2.087. **2651**. $|x|<0.69, |x|<0.39, |x|<0.22$. **2652**. $|x|<0.39, |x|<0.18$. **2653**. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2^3\cdot 3\cdot 3!}\approx 0.4931$. **2654**. 0.7468. **2655**. 0.608. **2656**. 0.621. **2657**. 0.2505. **2658**. 0.026. **2659**. $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-y)^{2n}}{(2n)!}$ $(|x|<\infty,|y|<\infty)$. **2660**. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-y)^{2n}-(x+y)^{2n}}{2\cdot(2n)!}$ $(|x|<\infty,|y|<\infty)$. **2661**. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x^2+y^2)^{2n-1}}{(2n-1)!}$ $(|x|<\infty,|y|<\infty)$. **2662**. $1+2\sum_{n=1}^{\infty}(y-x)^n, |x-y|<1$. 提示: $\frac{1-x+y}{1+x-y}=-1+\frac{2}{1-(y-x)}$. 可利用几何级数. **2663**. $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n+y^n}{n}$ $(-1\leqslant x<1,-1\leqslant y<1)$. 提示: $1-x-y+xy=(1-x)(1-y)$. **2664**. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}+y^{2n+1}}{2n+1}$ $(-1\leqslant x\leqslant 1,-1\leqslant y\leqslant 1)$. 提示: $\arctan\frac{x+y}{1-xy}=\arctan x-\arctan y$ (当 $|x|\leqslant 1, |y|\leqslant 1$ 时). **2665**. $f(x+h,y+k)=ax^2+2bxy+cy^2+2(ax+by)h+2(bx+cy)k+ah^2+2bh+ck^2$. **2666**. $f(1+h,2+k)-f(1,2)=9h-21k+3h^2+3hk-12k^2+h^3-2k^3$. **2667**. $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(x-2)+(y+2)]^n}{n!}$. **2668**. $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[x+(y-\frac{\pi}{2})]^{2n}}{2n!}$. **2669**. $1+x+\frac{x^2-y^2}{2!}+\frac{x^3-3xy^2}{3!}+\cdots$. **2670**. $1+x+xy+\frac{1}{2}x^2y+\cdots$. **2671**. $\frac{c_1+c_2}{2}-\frac{2(c_1-c_2)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}, S(0)=\frac{c_1+c_2}{2}, S(\pm\pi)=\frac{c_1+c_2}{2}$. **2672**. $\frac{b-a}{4}\pi-\frac{2(b-a)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}+(a+b)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(nx)}{n}$, $S(\pm\pi)=\frac{b-a}{2}\pi$. **2673**. $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(nx)}{n^2}, S(\pm\pi)=\pi^2$. **2674**. $\frac{2}{\pi}\mathrm{sh}(a\pi)\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}(a\cos(nx)-n\sin(nx))\right], S(\pm\pi)=\mathrm{ch}(a\pi)$. **2675**. 如果 a 不是整数, $\frac{2\sin(a\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n\sin(nx)}{a^2-n^2}$; 如果 a 是整数, $\sin(ax)$. $S(\pm\pi)=0$. **2676**. 如果 a 不是整数, $\frac{2\sin(a\pi)}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a\cos(nx)}{a^2-n^2}\right]$; 如果 a 是整数, $\cos(ax).S(\pm\pi)=\cos(a\pi)$. **2677**. $\frac{2\,\mathrm{sh}(a\pi)}{\pi}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\sin(nx)}{a^2+n^2}$, $S(\pm\pi) = 0$. **2678**. $\frac{2\,\mathrm{sh}(a\pi)}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a\cos(nx)}{a^2+n^2}\right]$, $S(\pm\pi) = \mathrm{ch}(a\pi)$. **2679**. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$. **2680**. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$. a) $\frac{\pi}{4}$; b) $\frac{\pi}{3}$; c) $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. **2681**. a) $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(nx)}{n}$; b) $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$; $\frac{\pi^2}{8}$. **2682**. a) $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)$, 其中 $b_{2k-1} = \frac{2\pi}{2k-1}-\frac{8}{\pi(2k-1)^3}$, 而 $b_{2k} = -\frac{\pi}{k}$; b) $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(nx)}{n^2}$.1) $\frac{\pi^2}{6}$;2) $\frac{\pi^2}{12}$. **2683**. a) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[1-(-1)^n e^{a\pi}]\frac{n\sin(nx)}{a^2+n^2}$; b) $\frac{e^{a\pi}-1}{a\pi}+\frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(-1)^n e^{a\pi}-1]\cos(nx)}{a^2+n^2}$. **2684**. a) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\frac{n\pi}{2}}{n}\sin(nx)$; b) $\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\cos(nx)$. **2685**. a) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$; b) $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$. **2686**. $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)$, 其中 $b_{2k} = (-1)^{k-1}\frac{1}{2k}, b_{2k+1} = (-1)^k\frac{2}{\pi(2k+1)^2}$. **2687**. $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$. **2688**. $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\sin(nx)}{4n^2-1}$. **2689**. $\frac{2h}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nh)}{nh}\cos(nx)\right]$. **2690**. $\frac{2h}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\sin(nh)}{nh})^2\cos(nx)\right]$. **2691**. $1-\frac{\cos x}{2}+2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos(nx)}{n^2-1}$. **2692**. $\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}\right]$. **2694**. 解. 1) $a_{2n} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(2nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos(2nx)dx+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\cos(2nx)dx$. 如果在第一个积分中作代换 $t = \frac{\pi}{2}-x$, 而在第二个积分作代换 $t = x-\frac{\pi}{2}$, 则利用恒等式的假设 $f(\frac{\pi}{2}+t) = -f(\frac{\pi}{2}-t)$, 容易看出: $a_{2n} = 0$ $(n = 0,1,2,\cdots)$; 2) $b_{2n} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin(2nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin(2nx)dx+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\sin(2nx)dx$. 作与 1) 同样的代换, 考虑到恒等式假设 $f\left(\frac{\pi}{2}+t\right) = f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$, 即可推出 $b_{2n} = 0$ $(n = 0,1,2,\cdots)$. **2695**. $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$. **2696**. $1-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n}$. **2697**. $\mathrm{sh}\,l\left[\frac{1}{l}+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{l\cos\frac{n\pi x}{l}-n\pi\sin\frac{n\pi x}{l}}{l^2+n^2\pi^2}\right]$. **2698**. $\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{n\pi x}{5}}{n}$. **2699**. a) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1}$; b) 1. **2700**. a) $\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{n\pi x}{l}}{n}$; b) $\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n-1)\pi x}{l}}{(2n-1)^2}$. **2701**. a) $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{nx}{2}$, 其中 $b_{2k+1} = \frac{8}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{2k+1}-\frac{4}{(2k+1)^3}\right], b_{2k} = -\frac{4\pi}{k}$; b) $\frac{4\pi^2}{3}-16\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos\frac{nx}{2}}{n^2}$ **2702**. a) $\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2}}{(2n+1^2)}$; b) $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$. **2703**. $\frac{2}{3}-\frac{9}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n\pi x)}{n^2}$.

第九章

2704. 是. **2705**. 不是. **2706**. 是. **2707**. 是. **2708**. 是. **2709**. a) 是; b) 不是. **2710**. 是. **2714**. $y-xy' = 0$. **2715**. $xy'-2y = 0$. **2716**. $y-2xy' = 0$. **2717**. $xdx+ydy = 0$. **2718**. $y' = y$. **2719**. $3y^2-x^2 = 2xyy'$. **2720**. $xyy'(xy^2+1) = 1$. **2721**. $y = xy'\ln\frac{x}{y}$. **2722**. $2xy''+y' = 0$. **2723**. $y''-y'-2y = 0$. **2724**. $y''+4y = 0$. **2725**. $y'''-2y''+y' = 0$. **2726**. $y'' = 0$. **2727**. $y''' = 0$. **2728**. $(1+y'^2)y'''-3y'y''^2 = 0$. **2729**. $y^2-x^2 = 25$. **2730**. $y = xe^{2x}$. **2731**. $y = -\cos x$. **2732**. $y = \frac{1}{6}(-5e^{-x}+9e^{x}-4e^{2x})$. **2738**. 2.593 (精确值 $y = e$). **2739**. 4.780 (精确值 $y = 3(e-1)$). **2740**. 0.946 (精确值 $y = 1$). **2741**. 1.826 (精确值 $y = \sqrt{3}$). **2742**. $\cot^2 y = \tan^2 x+C$. **2743**. $x = \frac{Cy}{\sqrt{1+y^2}}, y = 0$. **2744**. $x^2+y^2 = \ln Cx^2$. **2745**. $y = \frac{a+Cx}{1+ax}$. **2746**. $\tan y = C(1-e^x)^3, x = 0$. **2747**. $y = C\sin x$. **2748**. $2e^{\frac{y^2}{2}} = \sqrt{e}(1+e^x)$. **2749**. $1+y^2 = \frac{2}{1-x^2}$. **2750**. $y = 1$. **2751**. $\arctan(x+y) = x+C$. **2752**. $8x+2y+1 = 2\tan(4x+C)$. **2753**. $x+2y+3\ln|2x+3y-7| = C$. **2754**. $5x+10y+C = 3\ln|10x-5y+6|$. **2755**. $\rho = \frac{C}{1-\cos\varphi}$ 或 $y^2 = 2Cx+C^2$. **2756**. $\ln\rho = \frac{1}{2\cos^2\varphi}-\ln|\cos\varphi|+C$ 或 $\ln|x|-\frac{y^2}{2x^2} = C$. **2757**. 直线 $y = Cx$ 或双曲线 $y = \frac{C}{x}$. 切线段长度等于 $\sqrt{y^2+(\frac{y}{y'})^2}$. **2758**. $y^2-x^2 = C$. **2759**. $y = Ce^{\frac{x}{a}}$. **2760**. $y^2 = 2px$. **2761**. $y = ax^2$. 提示: 按条件

$\frac{\int_0^x xydx}{\int_0^x ydx}=\frac{3}{4}x$. 对 x 求导两次后可得微分方程. **2762.** $y^2=\frac{1}{3}x$. **2763.** $y=\sqrt{4-x^2}+2\ln\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}$ **2764.** 直线束 $y=kx$. **2765.** 相似的椭圆族 $2x^2+y^2=C^2$. **2766.** 双曲线族 $x^2-y^2=C$. **2767.** 圆族 $x^2+(y-b)^2=b^2$. **2768.** $y=x\ln\left|\frac{C}{x}\right|$ **2769.** $y=\frac{C}{x}-\frac{x}{2}$. **2770.** $x=Ce^{\frac{x}{y}}$. **2771.** $(x-C)^2-y^2=C^2, (x-2)^2-y^2=4, y=\pm x$. **2772.** $\sqrt{\frac{x}{y}}+\ln|y|=C$. **2773.** $Y=\frac{C}{2}x^2-\frac{1}{2C}, x=0$. **2774.** $(x^2+y^2)^3(x+y)^2=C$. **2775.** $y=x\sqrt{1-\frac{3}{8}x}$. **2776.** $(x+y-1)^3=C(x-y+3)$. **2777.** $3x+y+2\ln|x+y-1|=C$. **2778** $\ln|4x+8y+5|+8y-4x=C$. **2779.** $x^2=1-2y$. **2780.** 旋转抛物面. 解. 由对称性, 所求的镜面是旋转曲面. 把坐标原点放在光源处, OX 轴与光束方向一致. 如果所求曲面与 XOY 平面的截线上任一点 $M(x,y)$ 处的切线, 与 OX 轴交角为 φ, 而连接坐标原点及点 $M(x,y)$ 的线段与 OX 轴的交角为 α, 则 $\tan\alpha=\tan2\varphi=\frac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi}$. 但 $\tan\alpha=\frac{y}{x}, \tan\varphi=y'$. 所求微分方程为 $y-yy'^2=2xy'$, 其解为 $y^2=2Cx+C^2$. 平面截线是抛物线, 所求的曲面是旋转抛物面. **2781.** $(x-y)^2-Cy=0$. **2782.** $x^2=C(2y+C)$. **2783.** $(2y^2-x^2)^3=Cx^2$. 利用面积等于 $\int_a^x ydx$. **2784.** $y=Cx-x\ln|x|$. **2785.** $y=Cx+x^2$. **2786.** $y=\frac{1}{6}x^4+\frac{C}{x^2}$. **2787.** $x\sqrt{1+y^2}+\cos y=C$. 方程关于 $x, \frac{dx}{dy}$ 是线性的. **2788.** $x=Cy^2-\frac{1}{y}$. **2789.** $y=\frac{e^x}{x}+\frac{ab-e^a}{x}$. **2790.** $y=\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. **2791.** $y=\frac{x}{\cos x}$. **2792.** $y(x^2+Cx)=1$. **2793.** $y^2=x\ln\frac{C}{x}$. **2794.** $x^2=\frac{1}{y+Cy^2}$. **2795.** $y^3(3+Ce^{\cos x})=x$. **2797.** $xy=Cy^2+a^2$. **2798.** $y^2+x+ay=0$. **2799.** $x=y\ln\frac{y}{a}$. **2800.** $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$. **2801.** $x^2+y^2-Cy+a^2=0$. **2802.** $\frac{x^2}{2}+xy+y^2=C$. **2803.** $\frac{x^3}{3}+xy^2+x^2=C$. **2804.** $\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2y^2+2x+\frac{y^3}{3}=C$. **2805.** $x^2+y^2-2\arctan\frac{y}{x}=C$. **2806.** $x^2-y^2=Cy^3$. **2807.** $\frac{x^2}{2}+ye^{\frac{x}{y}}=2$. **2808.** $\ln|x|-\frac{y^2}{x}=C$. **2809.** $\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}=C$. **2810.** $\frac{1}{y}\ln x+\frac{1}{2}y^2=C$. **2811.** $(x\sin y+y\cos y-\sin y)e^x=C$. **2812.** $(x^2C^2+1-2Cy)(x^2+C^2-2Cy)=0$, 奇异积分 $x^2-y^2=0$. **2813.** 通积分 $(y+C)^2=x^3$, 没有奇异积分. **2814.** 通积分 $(\frac{x^2}{2}-y+C)(x-\frac{y^2}{2}+C)=0$, 没有奇异积分. **2815.** 通积分 $y^2+C^2=2Cx$, 奇异积分 $x^2-y^2=0$. **2816.** $y=\frac{1}{2}\cos x\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$. **2817.** $\begin{cases}x=\sin p+\ln p,\\ y=p\sin p+\cos p+p+C.\end{cases}$

2818. $\begin{cases}x=e^p+pe^p+C,\\ y=p^2e^p.\end{cases}$ **2819.** $\begin{cases}x=2p-\frac{2}{p}+C,\\ y=p^2+2\ln p.\end{cases}$ 奇解 $y=0$. **2820.** $4y=x^2+p^2$, $\ln|p-x|=C+\frac{x}{p-x}$. **2821.** $\ln\sqrt{p^2+y^2}+\arctan\frac{p}{y}=C, x=\ln\frac{y^2+p^2}{2p}$. 奇解 $y=e^x$. **2822.** $y=C+\frac{x^2}{C}, y=\pm2x$. **2823.** $\begin{cases}x=\ln|p|-\arcsin p+C,\\ y=p+\sqrt{1-p^2}.\end{cases}$ **2824.** $\begin{cases}x=Ce^{-p}-2p+2,\\ y=C(1+p)e^{-p}-p^2+2.\end{cases}$

2825. $\begin{cases}x=\frac{1}{3}(Cp^{-\frac{1}{2}}-p),\\ y=\frac{1}{6}(2Cp^{\frac{1}{2}}+p^2).\end{cases}$ 提示: 把 x 确定为 p 的函数的微分方程是齐次的. **2826.** $y=Cx+C^2, y=-\frac{x^2}{4}$. **2827.** $y=Cx+C$, 没有奇解. **2828.** $y=Cx+\sqrt{1+C^2}, x^2+y^2=1$. **2829.** $y=Cx+\frac{1}{C}, y^2=4x$. **2830.** $xy=C$. **2831.** 圆及其切线族. **2832.** 星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$. **2833.** a) 齐次方程; $y=xu$; b) 关于 x 是线性的方程; $x=uv$; c) 关于 y 线性方程; $y=uv$; d) 伯努利方程; $y=uv$; e) 可分离变量方程; f) 克莱罗方程; 可化为 $y=xy'\pm\sqrt{y'^3}$; g) 拉格朗日方程; 对 x 求导; h) 伯努利方程; $y=uv$; i) 可化为可分离变量的方程; $u=x+y$; j) 拉格朗日方程; 对 x 求导; k) 关于 x 的伯努利方程; $y=uv$; l) 全微分方程; m) 线性方程; $y=uv$; n) 伯努利方程; $y=uv$. **2834.** a) $\sin\frac{y}{x}=-\ln|x|+C$; b) $x=y\cdot e^{Cy+1}$.

2835. $x^2+y^4=Cy^2$. **2836.** $y=\frac{x}{x^2+C}$. **2837.** $xy(C-\frac{1}{2}\ln^2 x)=1$. **2838.** $y=Cx+C\ln C$, 奇解 $y=-e^{-(x+1)}$. **2839.** $y=Cx+\sqrt{-aC}$, 奇解 $y=\frac{a}{4x}$. **2840.** $3y+\ln\frac{|x^3-1|}{(y+1)^6}=C$. **2841.** $\frac{1}{2}e^{2x}-e^y-\arctan y-\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=C$. **2842.** $y=x^2(1+Ce^{\frac{1}{x}})$. **2843.** $x=y^2(C-e^{-y})$. **2844.** $y=Ce^{-\sin x}+\sin x-1$. **2845.** $y=ax+C\sqrt{|1-x^2|}$. **2846.** $y=\frac{x}{x+1}(x+\ln|x|+C)$. **2847.** $x=Ce^{\sin y}-2a(1+\sin y)$. **2848.** $\frac{x^2}{2}+3x+y+\ln[(x-3)^{10}|y-1|^3]=C$. **2849.** $2\arctan\frac{y-1}{2x}=\ln|Cx|$. **2850.** $x^2=1-\frac{2}{y}+Ce^{-\frac{2}{y}}$. **2851.** $x^3=Ce^y-y-2$. **2852.** $\sqrt{\frac{y}{x}}+\ln|x|=C$. **2853.** $y=x\arcsin(Cx)$. **2854.** $y^2=Ce^{-2x}+\frac{2}{5}\sin x+\frac{4}{5}\cos x$. **2855.** $xy=C(y-1)$. **2856.** $x=Ce^y-\frac{1}{2}(\sin y+\cos y)$. **2857.** $py=C(p-1)$. **2858.** $x^4=Ce^{4y}-y^3-\frac{3}{4}y^2-\frac{3}{8}y-\frac{3}{32}$. **2859.** $(xy+C)(x^2y+C)=0$. **2860.** $\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x}{y}=C$.

2861. $xe^y-y^2=C$. **2862.** $\begin{cases} x=\frac{C}{p^2}-\frac{\sqrt{1+p^2}}{2p}+\frac{1}{2p^2}\ln(p+\sqrt{1+p^2}), \\ y=2px+\sqrt{1+p^2}. \end{cases}$ **2863.** $y=xe^{Cx}$.

2864. $2e^x-y^4=Cy^2$. **2865.** $\ln|y+2|+2\arctan\frac{y+2}{x-3}=C$. **2866.** $y^2+Ce^{-\frac{y^2}{2}}+\frac{1}{x}-2=0$. **2867.** $x^2y=Ce^{\frac{y}{a}}$. **2868.** $x+\frac{x}{y}=C$. **2869.** $y=\frac{C-x^4}{4(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$. **2870.** $y=C\sin x-a$.

2871. $y=\frac{a^2\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C}{x+\sqrt{a^2+x^2}}$. **2872.** $(y-Cx)(y^2-x^2+C)=0$. **2873.** $y=Cx+\frac{1}{C^2}, y=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2x^2}$. **2874.** $x^3+x^2y-xy^2-y^3=C$. **2875.** $p^2+4y^2=Cy^3$. **2876.** $y=x-1$. **2877.** $y=x$. **2878.** $y=2$. **2879.** $y=0$. **2880.** $y=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)$. **2881.** $y=\frac{1}{4}(2x^2+2x+1)$. **2882.** $y=e^{-x}+2x-2$. **2883.** a) $y=x$; b) $y=Cx$, 其中 C 是任意常数, 点 $(0,0)$ 是微分方程的奇点. **2884.** a) $y^2=x$; b) $y^2=2px$, $(0,0)$ 是奇点. **2885.** a) $(x-C)^2+y^2=C^2$; b) 无解; c) $x^2+y^2=x$, $(0,0)$ 是奇点. **2886.** $y=e^{\frac{x}{y}}$. **2887.** $y=(\sqrt{2a}\pm\sqrt{x})^2$. **2888.** $y^2=1-e^{-x}$. **2889.** $r=Ce^{a\varphi}$. 必须变换到极坐标. **2890.** $3y^2-2x=0$. **2891.** $r=k\varphi$. **2892.** $x^2+(y-b)^2=b^2$. **2893.** $y^2+16x=0$. **2894.** 双曲线族 $y^2-x^2=C$ 或圆周族 $x^2+y^2=C^2$. **2895.** $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$. 利用面积等于 $\int_0^x y dx$, 弧长为 $\int_0^x\sqrt{1+y'^2}dx$. **2896.** $x=\frac{a^2}{y}+Cy$. **2897.** $y^2=4C(C+a-x)$. **2898.** 利用重力与离心力的合力垂直于曲面这一点, 取旋转轴为 OY 轴, 并用 ω 表示旋转的角速度, 可得通过轴的平面与所求曲面截线的微分方程 $g\frac{dy}{dx}=\omega^2x$. **2899.** $p=10^5\cdot e^{-0.000167h}$. 垂直空气柱每一高度处的压力, 可以认为只由位于上层的压力所决定. 利用波意尔—马里奥特定律, 即知密度与压力成正比. 所求微分方程为 $dp=-kpdh$. **2900.** $S=\frac{1}{2}klw$. 提示: 方程为 $ds=kw\cdot\frac{l-x}{l}dx$ **2901.** $s=(p+\frac{1}{2}w)kl$. **2902.** $T=a+(T_0-a)e^{-kt}$, k 为常参数. **2903.** 需经过一小时. **2904.** $\omega(t)=100\left(\frac{3}{5}\right)^t$ 圈/分. **2905.** 经过 100 年分解初始数量 Q_0 的 4.2%. 提示. 方程为 $\frac{dQ}{dt}=-kQ$, $Q=Q_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}$. **2906.** $t\approx 35.2$ s. 提示: 方程为 $\pi(h^2-2h)dh=\pi(\frac{1}{10})^2vdt$. **2907.** $\frac{1}{1024}$. 提示: 通过水层的光线强度 I 的变化方程为 $dI=-kIdh$, 由此得出 $I=I_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h}{3}}$, 其中 I_0 为在水面上的光线强度. **2098.** 当 $t\to\infty, v\to\sqrt{\frac{gm}{k}}$ (k 是比例系数). 提示: 方程为 $m\frac{dv}{dt}=mg-kv^2, v=\sqrt{\frac{gm}{k}}\,\mathrm{th}(t\sqrt{\frac{gk}{m}})$. **2909.** 18.1 kg. 提示: 方程为 $\frac{dx}{dt}=k(\frac{1}{3}-\frac{x}{300})$. **2910.** $i=\frac{E}{R^2+L^2\omega^2}[(R\sin\omega t-L\omega\cos\omega t)+L\omega e^{-\frac{R}{L}t}]$. 提示: 方程为 $Ri+L\frac{di}{dt}=E\sin\omega t$ **2911.** $y=x\ln|x|+C_1x+C_2$. **2912.** $1+C_1y^2=(C_2+\frac{C_1x}{\sqrt{2}})^2$. **2913.** $y=\ln|e^{2x}+C_1|-x+C_2$. **2914.** $y=C_1+C_2\ln|x|$. **2915.** $y=C_1e^{C_2x}$ **2916.** $y=\pm\sqrt{C_1x+C_2}$. **2917.** $y=(1+C_1^2)\ln|x+C_1|-C_1x+C_2$. **2918.** 当 $a\neq 0, x-C_1=a\ln|\sin\frac{y-C_2}{a}|$. **2919.** $y=\frac{1}{2}(\ln|x|)^2+C_1\ln|x|+C_2$. **2920.** $x=\frac{1}{C_1}\ln|\frac{y}{y+C_1}|+C_2, Y=C$. **2921.** $y=C_1e^{C_2x}+\frac{1}{C_2}$. **2922.** $y=\pm\frac{1}{2}[x\sqrt{C_1^2-x^2}+C_1^2\arcsin\frac{x}{C_1}]+C_2$.

2923. $y=(C_1e^x+1)x+C_2$. **2924**. $y=(C_1x-C_1^2)e^{\frac{x}{C_1}+1}+C_2, y=\frac{e}{2}x^2+C$ (奇解). **2925**. $y=C_1x(x-C_1)+C_2, y=\frac{x^3}{3}+C$ (奇解). **2926**. $y=\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{2}+C_1x\ln|x|+C_2x+C_3$. **2927**. $y=\sin(C_1+x)+C_2x+C_3$. **2928**. $y=x^3+3x$. **2929**. $y=\frac{1}{2}(x^2+1)$. **2930**. $y=x+1$. **2931**. $y=Cx^2$. **2932**. $y=C_1\frac{1+C_2e^x}{1-C_2e^x}, y=C$. **2933**. $x=C_1+\ln|\frac{y-C_2}{y+C_2}|$. **2934**. $x=C_1-\frac{1}{C_2}\ln|\frac{y}{y+C_2}|$. **2935**. $x=C_1y^2+y\ln y+C_2$. **2936**. $2y^2-4x^2=1$. **2937**. $y=x+1$. **2938**. $y=\frac{x^2-1}{2(e^2-1)}-\frac{e^2-1}{4}\ln|x|$ 或 $y=\frac{1-x^2}{2(e^2+1)}+\frac{e^2+1}{4}\ln|x|$. **2939**. $y=\frac{1}{2}x^2$. **2940**. $y=\frac{1}{2}x^2$. **2941**. $y=2e^x$. **2942**. $x=-\frac{3}{2}(y+2)^{\frac{2}{3}}$. **2943**. $y=e^x$. **2944**. $y^2=\frac{e}{e-1}+\frac{e^{-x}}{1-e}$. **2945**. $y=\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{8}{3}$. **2946**. $y=\frac{3e^{3x}}{2+e^{3x}}$. **2947**. $y=\sec^2 x$. **2948**. $y=\sin x+1$. **2949**. $y=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}$. **2950**. $x=-\frac{1}{2}e^{-y^2}$. **2951**. 无解. **2952**. $y=e^x$. **2953**. $y=2\ln|x|-\frac{2}{x}$. **2954**. $y=\frac{(x+C_1^2+1)^2}{2}+\frac{4}{3}C_1(x+1)^{\frac{3}{2}}+C_2$, 奇解 $y=C$. **2955**. $y=C_1\frac{x^2}{2}+(C_1-C_1^2)x+C_2$, 奇解 $y=\frac{(x+1)^3}{12}+C$. **2956**. $y=\frac{1}{12}(C_1+x)^4+C_2x+C_3$. **2957**. $y=C_1+C_2e^{C_1x}, y=1-e^x, y=-1+e^{-x}$, 奇解 $y=\frac{4}{C-x}$. **2958**. 圆周. **2959**. $(x-C_1)^2-C_2y^2+kC_2^2=0$. **2960**. 悬链线 $y=a\operatorname{ch}\frac{x-x_0}{2}$. 圆周 $(x-x_0)^2+y^2=a^2$. **2961**. 抛物线 $(x-x_0)^2=2ay-a^2$. 摆线 $x-x_0=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$. **2962**. $e^{ay+C_2}=\sec(ax+C_1)$. **2963**. 抛物线. **2964**. $y=\frac{C_1}{2}\frac{H}{q}e^{\frac{q}{H}x}+\frac{1}{2C_1}\frac{H}{q}e^{-\frac{q}{H}x}+C_2$ 或 $y=a\operatorname{ch}\frac{x+C}{a}+C_2$, 其中 H 是恒定的水平张力, 而 $\frac{H}{q}=a$. 提示: 微分方程为 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{q}{H}\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}$. **2965**. 运动方程为 $\frac{d^2s}{dt^2}=g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)$, 运动规律为 $s=\frac{gt^2}{2}(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)$. **2966**. $s=\frac{m}{k}\ln\operatorname{ch}(t\sqrt{g\frac{k}{m}})$. 提示: 运动方程为 $m\frac{d^2s}{dt^2}=mg-k(\frac{ds}{dt})^2$. **2967**. 经过 63 s. 提示: 艇的运动方程为 $300X''=-10X'$. **2968**. a) 不是;b) 是; c) 是; d) 是; e) 不是; f) 不是; g) 不是; h) 是. **2969**. a) $y''+y=0$; b) $y''-2y'+y=0$; c) $x^2y''-2xy'+2y=0$; d) $y'''-3y''+4y'-2y=0$. **2970**. $y=3x-5x^2+2x^3$. **2971**. $y=\frac{1}{x}(C_1\sin x+C_2\cos x)$. 作代换 $y=y_1u$. **2972**. $y=C_1x+C_2\ln x$. **2973**. $y=A+Bx^2+x^3$. **2974**. $y=\frac{x^2}{3}+Ax+\frac{B}{x}$. 齐次方程的特解 $y_1=x, y_2=\frac{1}{x}$. 用常数变异法求得 $C_1=\frac{x}{2}+A, C_2=-\frac{x^3}{6}+B$. **2975**. $y=A+B\sin x+C\cos x+\ln|\sec x+\tan x|+\sin\ln|\cos x|-x\cos x$ **2976**. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$. **2977**. $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{3x}$. **2978**. $y=C_1+C_2e^x$. **2979**. $y=C_1\cos x+C_2\sin x$. **2980**. $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$. **2981**. $y=e^{-2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$. **2982**. $y=e^{-x}(C_1+C_2x)$. **2983**. $y=e^{2x}(C_1e^{x\sqrt{2}}+C_2e^{-x\sqrt{2}})$. **2984**. 如果 $k>0, y=C_1e^{x\sqrt{k}}+C_2e^{-x\sqrt{k}}$; 如果 $k<0, y=C_1\cos\sqrt{-k}x+C_2\sin\sqrt{k}x$ **2985**. $y=e^{-\frac{x}{2}}(C_1e^{\frac{\sqrt{5}}{2}x}+C_2e^{\frac{-\sqrt{5}x}{2}})$. **2986**. $y=e^{\frac{x}{6}}(C_1\cos\frac{\sqrt{11}}{6}x+C_2\sin\frac{\sqrt{11}}{6}x.)$ **2987**. $y=4e^x+e^{4x}$. **2988**. $y=e^{-x}$. **2989**. $y=\sin 2x$. **2990**. $y=1$. **2991**. $y=a\operatorname{ch}\frac{a}{x}$. **2992**. $y=0$. **2993**. $y=C\sin\pi x$ **2994**. a) $xe^{2x}(Ax^2+Bx+C)$; b) $A\cos 2x+B\sin 2x$; c) $A\cos 2x+B\sin 2x+Cx^2e^{2x}$; d) $e^x(A\cos x+B\sin x)$; e) $e^x(Ax^2+Bx+C)+xe^{2x}(Dx+E)$; f) $xe^x[(Ax^2+Bx+C)\cos 2x+(Dx^2+Ex+F)\sin 2x]$. **2995**. $y=(C_1+C_2x)e^{2x}+\frac{1}{8}(2x^2+4x+3)$. **2996**. $y=e^{\frac{x}{2}}(C_1\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}+C_2\sin\frac{x\sqrt{3}}{2})+x^3+3x^2$. **2997**. $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+\frac{1}{9}e^{2x}$. **2998**. $y=C_1e^x+C_2e^{7x}+2$. **2999**. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+\frac{1}{2}xe^x$. **3000**. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}x\sin x$. **3001**. $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}-\frac{2}{5}(3\sin 2x+\cos 2x)$. **3002**. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}+x(\frac{x}{10}-\frac{1}{25})e^{2x}$. **3003**. $y=(C_1+C_2x)e^x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{x^2}{4}e^x-\frac{1}{8}e^{-x}$. **3004**. $y=C_1+C_2e^{-x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{20}(2\cos 2x-\sin 2x)$. **3005**. $y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+\frac{x}{4}e^x\sin 2x$. **3006**. $y=\cos 2x+\frac{1}{3}(\sin x+\sin 2x)$. **3007**. 1) $x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t+\frac{A}{\omega^2-p^2}\sin pt$; 2) $x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t-\frac{A}{2\omega}t\cos\omega t$. **3008**. $y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}-xe^{4x}$. **3009**. $y=C_1+C_2e^{2x}+\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{6}x^3$. **3010**. $y=e^x(C_1+$

$C_2x+x^2)$. **3011**. $y=C_1+C_2e^{2x}+\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{5}{2}x$. **3012**. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{4x}-\frac{1}{9}e^x+\frac{1}{5}(3\cos 2x+\sin 2x)$. **3013**. $y=C_1+C_2e^{-x}+e^x+\frac{2}{5}x^2-5x$. **3014**. $y=C_1+C_2e^x-3xe^x-x-x^2$. **3015**. $y=(C_1+C_2x+\frac{1}{2}x^2)e^{-x}+\frac{1}{4}e^x$. **3016**. $y=e^x(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)+\frac{1}{37}(\sin 3x+6\cos 3x)+\frac{e^x}{9}$. **3017**. $y=(C_1+C_2x+x^2)e^{2x}+\frac{x+1}{8}$. **3018**. $y=C_1+C_2e^{3x}-\frac{1}{10}(\cos x+3\sin x)-\frac{x^2}{6}-\frac{x}{9}$. **3019**. $y=\frac{1}{8}e^{2x}(4x+1)-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}$. **3020**. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}-x\sin x-\cos x$. **3021**. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}-\frac{e^{2x}}{20}(\sin 2x+2\cos 2x)$. **3022**. $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{x}{4}(3\sin 2x+2\cos 2x)+\frac{1}{4}$. **3023**. $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x-2x\cos x)$. **3024**. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+\frac{1}{4}(x^2-x)e^x$. **3025**. $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\frac{1}{4}x\sin x-\frac{1}{16}\cos x+\frac{1}{54}(3x-1)e^{3x}$. **3026**. $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}+\frac{1}{9}(2-3x)+\frac{1}{16}(2x^2-x)e^{3x}$. **3027**. $y=C_1+C_2e^{2x}-2xe^x-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}x^2$. **3028**. $y=(C_1+C_2x+\frac{x^3}{6})e^{2x}$. **3029**. $y=C_1e^{-3x}+C_2e^x-\frac{1}{8}(2x^2+x)e^{-3x}+\frac{1}{16}(2x^2+3x)e^x$. **3030**. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{x}{4}\cos x+\frac{x^2}{4}\sin x-\frac{x}{8}\cos 3x+\frac{3}{32}\sin 3x$. 提示: 把余弦的乘积化为余弦的和. **3031**. $y=C_1e^{-x\sqrt{2}}+C_2e^{x\sqrt{2}}+xe^x\sin x+e^x\cos x$. **3032**. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\cos x\ln|\cot(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})|$. **3033**. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\sin x\ln|\tan\frac{x}{2}|$. **3034**. $y=(C_1+C_2x)e^x+xe^x\ln|x|$. **3035**. $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+xe^{-x}\ln|x|$. **3036**. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x\sin x+\cos x\ln|\cos x|$. **3037**. $y=C_1\cos x+C_2\sin x-x\cos x+\sin x\ln|\sin x|$. **3038**. a) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+(e^x+e^{-x})\arctan e^x$; b)$y=C_1e^{\sqrt{2}x}+C_2e^{-\sqrt{2}x}+ex^2$. **3040**. 运动方程为$m\ (\frac{d^2x}{dt^2})=mg-k(x+a)$, 其中 a 相应于平衡状态; $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. **3041**. $x=\frac{2h\sin 30t-60\sqrt{g}\sin\sqrt{g}t}{g-900}$ cm. 提示: 如果 x 从重物的静止状态起算, 则有 $mx''=mg-k(x_0+x-y-l)$, 其中 x_0 是重物的静止点与悬挂弹簧初始点的距离, l 是弹簧在静止状态的长度. 于是 $k(x_0-l)=mg$, 因此, $mx''=-k(x-y)$, 其中 $y=A\sin\omega t$. **3042**. $m\frac{d^2x}{dt^2}=k(b-x)-k(b+x), x=c\cos(t\sqrt{\frac{2k}{m}})$. **3043**. $6\frac{d^2s}{dt^2}=gs, t=\sqrt{\frac{6}{g}}\ln(6+\sqrt{35})$. **3044**. a) $r=\frac{a}{2}(e^{\omega t}+e^{-\omega t})$; b) $r=\frac{v_0}{2\omega}(e^{\omega t}+e^{-\omega t})$. 提示: 运动的微分方程为 $\frac{d^2r}{dt^2}=\omega^2 r$. **3045**. $y=C_1+C_2e^x+C_3e^{12x}$. **3046**. $y=C_1+C_2e^{-x}+C_3e^x$. **3047**. $y=C_1e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$. **3048**. $y=C_1+C_2x+C_3e^{\sqrt{2}x}+C_4e^{-\sqrt{2}x}$. **3049**. $y=e^x(C_1+C_2x+C_3x^2)$. **3050**. $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^{-x}(C_3\cos x+C_4\sin x)$ **3051**. $y=(C_1+C_2x)\cos 2x+(C_3+C_4x)\sin 2x$ **3052**. $y=C_1+C_2e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}(C_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_4\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$. **3053**. $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+(C_3+C_4x)e^x$. **3054**. $y=C_1e^{ax}+C_2e^{-ax}+C_3\cos ax+C_4\sin ax$. **3055**. $y=(C_1+C_2x)e^{\sqrt{3}x}+(C_3+C_4x)e^{-\sqrt{3}x}$. **3056**. $y=C_1+C_2x+C_3\cos ax+C_4\sin ax$. **3057**. $y=C_1+C_2x+(C_3+C_4x)e^{-x}$. **3058**. $y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x$. **3059**. $y=e^{-x}(C_1+C_2x+\cdots+C_nx^{n-1})$. **3060**. $y=C_1+C_2x+(C_3+C_4x+\frac{x^2}{2})e^x$. **3061**. $y=C_1+C_2x+12x^2+3x^3+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{20}x^5+(C_3+C_4x)e^x$. **3062**. $y=C_1e^x+e^{\frac{-x}{2}}(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)-x^3-5$. **3063**. $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4e^{-x}+\frac{1}{1088}(4\cos 4x-\sin 4x)$. **3064**. $y=C_1e^{-x}+C_2+C_3x+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{12}x^4+e^x(\frac{3}{2}x-\frac{15}{4})$. **3065**. $y=C_1e^{-x}+C_2\cos x+C_3\sin x+e^x(\frac{1}{4}x-\frac{3}{8})$. **3066**. $y=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x+\sec\ x+\cos x\ln|\cos x|-\tan x\sin x+x\sin x$. **3067**. $y=e^{-x}+e^{\frac{-x}{2}}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)+x-2$. **3068**. $y=(C_1+C_2\ln x)\frac{1}{x}, x>0$. **3069**. $y=C_1x^3+C_2\frac{1}{x}$. **3070**. $y=C_1\cos(2\ln x)+C_2\sin(2\ln x)$. **3071**. $y=C_1x+C_2x^2+C_3x^3$. **3072**. $y=C_1+C_2(3x+2)^{-4/3}$. **3073**. $y=C_1x^2+C_2\frac{1}{x}$. **3074**. $y=C_1\cos(\ln x)+C_2\sin(\ln x)$. **3075**. $y=C_1x^3+C_2x^2+\frac{1}{2}x$. **3076**. $y=(x+1)^2[C_1+C_2\ln(x+1)]+(x+1)^3$. **3077**. $y=x(\ln x+\ln^2 x)$. **3078**. $y=C_1\cos x+C_2\sin x, z=C_2\cos x-C_1\sin x$. **3079**. $y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x), z=$

$\frac{1}{5}e^{-x}[(C_2-2C_1)\cos x-(C_1+2C_2)\sin x]$. **3080.** $y=(C_1-C_2-C_1x)e^{-2x}, z=(C_1x+C_2)e^{-2x}$. **3081.** $x=C_1e^t+e^{\frac{-t}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), y=C_1e^t+e^{\frac{-t}{2}}\left(\frac{C_3\sqrt{3}-C_2}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{C_2\sqrt{3}+C_3}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), z=C_1e^t+e^{\frac{-t}{2}}\left(\frac{-C_3\sqrt{3}-C_2}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{C_2\sqrt{3}-C_3}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$. **3082.** $x=C_1e^{-t}+C_2e^{2t}, y=C_3e^{-t}+C_2e^{2t}, z=-(C_1+C_3)e^{-t}+C_2e^{2t}$. **3083.** $y=C_1+C_2e^{2x}-\frac{1}{4}(x^2+x). z=C_2e^{2x}-C_1+\frac{1}{4}(x^2-x-1)$. **3084.** $y=C_1+C_2x+2\sin x, z=-2C_1-C_2(2x+1)-3\sin x-2\cos x$. **3085.** $y=(C_2-2C_1-2C_2x)e^{-x}-6x+14, z=(C_1+C_2x)e^{-x}+5x-9; C_1=9, C_2=4, y=14(1-e^{-x})-2x(3+4e^{-x}), z=-9(1-e^{-x})+x(5+4e^{-x})$. **3086.** $x=10e^{2t}-8e^{3t}-e^t+6t-1, y=-20e^{2t}+8e^{3t}+3e^t+12t+10$. **3087.** $y=\frac{2C_1}{(C_2-x)^2}, z=\frac{C_1}{C_2-x}$. **3088*.** a) $\frac{(x^2+y^2)y}{x^2}=C_1, \frac{z}{y}=C_2$; b) $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}+C_1, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}=C_2$. 积分齐次方程 $\frac{dx}{x-y}=\frac{dy}{x+y}$, 求得首次积分 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}+C_1$. 再利用导数的比例性质, 我们有 $\frac{dz}{z}=\frac{xdx}{x(x-y)}=\frac{ydy}{y(x+y)}=\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$, 由此得出 $\ln z^2=\ln(x^2+y^2)+\ln C_2^2$, 于是得 $\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}=C_2$; c) $x+y+z=0, x^2+y^2+z^2=6$. 提示: 利用导数的比例性质, 有 $\frac{dx}{y-z}=\frac{dy}{z-x}=\frac{dz}{x-y}=\frac{dx+dy+dz}{0}$, 由此得出 $dx+dy+dz=0$, 于是得 $x+y+z=C_1$. 类似地, $\frac{xdx}{x(y-z)}=\frac{ydy}{y(z-x)}=\frac{zdz}{z(x-y)}=\frac{xdx+ydy+zdz}{0}$. $xdx+ydy+zdz=0$, 亦即 $x^2+y^2+z^2=C_2$. 这样一来, 积分曲线就是圆周族 $x+y+z=C_1, x^2+y^2+z^2=C_2$. 由初始条件 $x=1, y=1, z=-2$, 我们就有 $C_1=0, C_2=6$. **3089.** $y=C_1x^2+\frac{C_2}{x}-\frac{x^2}{18}(3\ln^2x-2\ln x), z=1-2C_1x+\frac{C_2}{x^2}+\frac{x}{9}(3\ln^2x+\ln x-1)$. **3090.** $y=C_1e^{x\sqrt{2}}+C_2e^{-x\sqrt{2}}+C_3\cos x+C_4\sin x+e^x-2x, z=-C_1e^{x\sqrt{2}}-C_2e^{-x\sqrt{2}}-\frac{C_3}{4}\cos x-\frac{C_4}{4}\sin x-\frac{1}{2}e^x+x$. **3091.** $x=\frac{v_0m\cos\alpha}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t}), y=\frac{m}{k^2}(k_0v_0\sin\alpha+mg)(1-e^{-\frac{k}{m}t})-\frac{mgt}{k}$. 解. $m\frac{dv_x}{dt}=-kv_x, m\frac{dv_y}{dt}=-kv_y-mg$, 初始条件是: 当 $t=0$ 时, $x_0=y_0=0$, $v_{x_0}=v_0\cos\alpha, v_{y_0}=v_0\sin\alpha$. 积分后得 $v_x=v_0\cos\alpha e^{-\frac{k}{m}t}, kv_y+mg=(kv_0\sin\alpha+mg)e^{-\frac{k}{m}t}$. **3092.** $x=a\cos\frac{k}{\sqrt{m}}t$, $y=\frac{v_0\sqrt{m}}{k}\sin\frac{k}{\sqrt{m}}t, \frac{x^2}{a^2}+\frac{k^2y^2}{mv_0^2}=1$. 提示: 运动的微分方程为 $m\frac{d^2x}{dt^2}=-k^2x, m\frac{d^2y}{dt^2}=-k^2y$. **3093.** $y=-2-2x-x^2$. **3094.** $y=(y_0+\frac{1}{4})e^{2(x-1)}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$. **3095.** $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\frac{9}{32}x^4+\frac{21}{320}x^5+\cdots$. **3096.** $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{7\cdot9}x^7+\frac{2}{7\cdot11\cdot27}x^{11}-\cdots$. **3097.** $y=x+\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^3}{2\cdot3}+\frac{x^4}{3\cdot4}+\cdots$, 当 $-1\leqslant x\leqslant1$ 时, 级数收敛. **3098.** $y=x-\frac{x^2}{(1!)^2\cdot2}+\frac{x^3}{(2!)^2\cdot3}+\frac{x^4}{(3!)^2\cdot4}+\cdots$, 当 $-\infty<x<\infty$, 时级数收敛. 利用待定系数法. **3099.** $y=1-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1\cdot4}{6!}x^3-\frac{1\cdot4\cdot7}{9!}x^9+\cdots$, 当 $-\infty<x<\infty$ 时, 级数收敛. **3100.** $y=\frac{\sin x}{x}$. 利用待定系数法. **3101.** $y=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot4^2}-\frac{x^6}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}+\cdots$, 当 $-\infty<x<\infty$ 时, 级数收敛. 利用待定系数法. **3102.** $x=a\left(1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{2}{4!}t^4-\frac{9}{6!}t^6+\frac{55}{8!}t^8-\cdots\right)$. **3103.** $u=A\cos\frac{a\pi t}{l}\sin\frac{\pi x}{l}$. 利用条件: $u(0,t)=0, u(l,t)=0, u(x,0)=A\sin\frac{\pi x}{l}, \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0$. **3104.** $u=\frac{2l}{\pi^2a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi at}{l}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}$. 利用条件: $u(0,t)=0, u(l,t)=0, u(x,0)=0, \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=1$. **3105.** $u=\frac{8h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$. 利用条件 $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0, u(0,t)=0, u(l,t)=0$, $u(x,0)=\begin{cases}\frac{2hx}{l}, & \text{对于 } 0<x\leqslant\frac{l}{2},\\ 2h(1-\frac{x}{l}), & \text{对于 } \frac{l}{2}<x<l.\end{cases}$ **3106.** $u=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cdot\cos\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)a\pi t}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$, 其中系数 $A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{x}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}dx=\frac{8(-1)^n}{(2n+1)^2\pi^2}$. 提示: 利用条件 $u(0,t)=0, \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0, u(x,0)=\frac{x}{l}, \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0$. **3107.** $u=\frac{400}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}(1-\cos n\pi)\sin\frac{n\pi x}{100}\cdot e^{-\frac{a^2n^2\pi^2t}{100^2}}$. 提示: 利用条件 $u(0,t)=0, u(100,t)=0, u(x,0)=0.01x(100-x)$.

第十章

3108. a) $\leqslant 1''$, $\leqslant 0.0023\%$; b) $\leqslant 1$ mm, $\leqslant 0.26\%$; c) $\leqslant 1$ g; $\leqslant 0.0016\%$. **3109**. a) $\leqslant 0.05$, $\leqslant 0.021\%$; b) $\leqslant 0.0005$, $\leqslant 1.45\%$; c) $\leqslant 0.005$; $\leqslant 0.16\%$. **3110**. a) 2 个数字, 48×10^3 或 49×10^3, 因为数位于 47877 与 48845 之间; b) 2 个数字, 15; c) 1 个数字, 6×10^2. 实际上, 结果应写成 $(5.9\pm0.1)\times10^2$ 形式. **3111**. a) 29.5; b) 1.6×10^2; c) 43.2. **3112**. a) 84.2; b) 18.5 或 18.47 ± 0.01; c) 计算结果中没有有效数字, 这是因为当绝对误差的可能值在百分之一时, 差等于百分之一. **3113***. (1.8 ± 0.3) cm^2. 利用正方形面积的增量公式. **3114**. a) 30.0 ± 0.2; b) 43.7 ± 0.1; c) 0.3 ± 0.1. **3115**. (19.9 ± 0.1) m^2. **3116**. a) 1.1295 ± 0.0002; b) 0.120 ± 0.006; c) 商可以在 48 与 62 之间摆动, 因此, 在商的写法中, 不能认为没有一个十进位数字是有效的. **3117**. 0.480. 最后的数字可以相差 1. **3118**. a) 0.1729; b) 277×10^3; c) 2. **3119**. $(2.05\pm0.01)\times10^3$ cm^2. **3120**. a) 1.648; b) 4.025 ± 0.001; c) 9.006 ± 0.003. **3121**. 4.01×10^3 cm^2, 绝对误差 6.5 cm^2, 相对误差, 0.16%. **3122**. 直角边等于 (13.8 ± 0.2) cm, $\sin\alpha=0.44\pm0.01, \alpha=26^\circ15'\pm35'$. **3123**. (2.7 ± 0.1) g/cm^3. **3124**. 0.27 A. **3125**. 摆长的测量应该精确到 0.3 cm, 数 π 与 g 取三个数字 (按等作用原理). **3126**. 半径与母线测量的相对误差为 1/300. 数 π 取三个数字 (按等作用原理) **3127**. 量 l 的测量精确到 0.2%, 而 s 的测量精确到 0.7% (按等作用原理).

3128.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
1	3	7	−2	−6	14	−23
2	10	5	−8	8	−9	
3	15	−3	0	−1		
4	12	−3	−1			
5	9	−4				
6	5					

3129.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	−4	−12	32	49
3	−16	20	80	48
5	4	100	128	48
7	104	228	176	
9	332	404		
11	736			

3130.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	0	−4	−42	−24	24
1	−4	−46	−66	0	24
2	−50	−112	−66	24	24
3	−162	−178	−42	48	24

续表

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
4	−340	−220	6	72	24
5	−560	−214	78	96	24
6	−774	−136	174	120	24
7	−910	38	294	144	
8	−872	332	438		
9	−540	770			
10	230				

提示: 计算开始五个 y 值, 得 $\Delta^4 y_0 = 24$. 且第四阶有限差的整个一列都重复为 24. 接着, 表的其余部分可通过加法运算 (从右向左移动) 进行补充. **3131**. a) 0.211, 0.389, 0.490, 0.660; b) 0.229, 0.399, 0.491, 0.664. **3132**.0.1822, 0.1993, 0.2165, 0.2334, 0.2503. **3133**. $1+x+x^2+x^3$. **3134**. $y=\frac{1}{96}x^4-\frac{11}{48}x^3+\frac{65}{24}x^2-\frac{85}{12}x+8$. 当 $x=5.5$ 时, $y\approx 22$; 当 $x\approx 5.2$ 时,$y=20$. 当 $y=20$ 在计算 x 时, 取 $y_0=11$. **3135**. 插值多项式 $y=x^2-10x+1$. 当 $x=0, y=1$. **3136**. 158 N (近似). **3137**. a) $y(0.5)=-1, y(2)=11$; b) $y(0.5)=-\frac{15}{16}, y(2)=-3$. **3138**. − 1.325. **3139**. 1.01. **3140**. − 1.86, −0.25, 2.11. **3141**. 2.09. **3142**. 2.45, 0.019. **3143**. 0.31, 4. **3144**. 2.506. **3145**. 0.02. **3146**. 0.24. **3147**. 1.27. **3148**. − 1.88, 0.35, 1.53. **3149**. 1.84. **3150**. 1.31, −0.67. **3151**. 7.13. **3152**. 0.165. **3153**. ± 1.73, 0. **3154**. 1.72. **3155**. 1.38. **3156**. $x=0.83, y=0.56; x=-0.83, y=-0.56$. **3157**. $x=1.67, y=1.22$. **3158**. 4.493. **3159**. ± 1.1997. **3160**. 按梯形公式为 11.625, 按辛普森公式为 11.417. **3161**. − 0.995, −1, 0.005, 0.5%; $\Delta=0.005$. **3162**. 03068, $\Delta=1.3\times10^{-5}$. **3163**. 0.69. **3164**. 0.79. **3165**. 0.84. **3166**. 0.28. **3167**. 0.10. **3168**. 1.61. **3169**. 1.85. **3170**. 0.09. **3171**. 0.67. **3172**. 0.75. **3173**. 0.79. **3174**. 4.93. **3175**. 1.29. 提示: 利用椭圆的参数方程 $x=\cos t, y=0.6222\sin t$, 并把弧长公式化为 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}dt$ 的形式, 其中 ε 是椭圆的偏心率. **3176**. $y_1(x)=\frac{x^3}{3}, y_2(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}, y_3(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}+\frac{2x^{11}}{2079}+\frac{x^{15}}{59535}$. **3177**. $y_1(x)=\frac{x^2}{2}-x+1, y_2(x)=\frac{x^3}{6}+\frac{3x^3}{2}-x+1, y_3(x)=\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{6}+\frac{3x^2}{2}-x+1; z_1(x)=3x-2, z_2(x)=\frac{x^3}{6}-2x^2+3x-2, z_3(x)=\frac{7x^3}{6}-2x^2+3x-2$. **3178**. $y_1(x)=x, y_2(x)=x-\frac{x^3}{6}, y_3(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$. **3179**. $y(1)=3.36$. **3180**. $y(2)=0.80$. **3181**. $y(1)=3.72, z(1)=2.72$. **3182**. 1.80. **3183**. 3.15. **3184**. 0.14. **3185**. $y(0.5)=3.15, z(0.5)=-3.15$. **3186**. $y(0.5)=0.55, z(0.5)=-0.18$. **3187**. 1.16. **3188**. 0.87. **3189**. $x(\pi)=3.58, x'(\pi)=0.79$. **3190**. $429+1793\cos x-1037\sin x-6231\cos 2x+1263\sin 2x-1242\cos 3x-33\sin 3x$. **3191**. $6.49-1.96\cos x+2.14\sin x-1.68\cos 2x+0.53\sin 2x-1.13\cos 3x+0.04\sin 3x$. **3192**. $0.960+0.851\cos x+0.915\sin x+0.542\cos 2x+0.620\sin 2x+0.271\cos 3x+0.100\sin 3x$. **3193**. a) $0.608\sin x+0.076\sin 2x+0.022\sin 3x$; b) $0.338+0.414\cos x+0.111\cos 2x+0.056\cos 3x$.

附　录

I. 希腊字母

Aα —— alpha
Bβ —— beta
Γγ —— gamma
Δδ —— delta
Eε —— epsilon
Zζ —— zeta
Hη —— eta
Θθ —— theta
Iι —— iota
Kχ —— kappa
Λλ —— lambda
Mμ —— mu
Nν —— nu
Ξζ —— xi
Oo —— omicron
Ππ —— pi
Pρ —— rho
Σσ —— sigma
Tτ —— tau
Υυ —— upsilon
Φφ —— phi
Xχ —— chi
Ψψ —— psi
Ωω —— omega

II. 某些常数

量	x	$\lg x$	量	x	$\lg x$
π	3.14159	0.49715	$\sqrt{\pi}$	1.77245	0.24857
2π	6.28318	0.79818	$\sqrt[3]{\pi}$	1.46459	0.16572
$\frac{\pi}{2}$	1.57080	0.19612	e	2.71828	0.43429
$\frac{\pi}{4}$	0.78540	$\bar{1}.89509$	$\frac{1}{e}$	0.36788	1.56571
$\frac{1}{\pi}$	0.31831	$\bar{1}.50285$	e^2	7.38906	0.86859
π^2	9.86960	0.99430	$\sqrt{e}$	1.64872	0.21715

续表

量	x	$\lg x$	量	x	$\lg x$
$\sqrt[3]{e}$	1.39561	0.14476	1 弧度	57°17′45″	
$M=\lg e$	0.43429	$\bar{1}.63778$	arc 1°	0.01745	$\bar{2}.24188$
$\frac{1}{M}=\ln 10$	2.30258	0.36222	g	9.81	0.99167

III. 倒数. 乘方. 方根. 对数

x	$\frac{1}{x}$	x^2	x^3	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{10x}$	$\sqrt[3]{100x}$	$\lg x$ (尾数)	$\ln x$
1.0	1.000	1.000	1.000	1.000	3.162	1.000	2.154	4.642	0.0000	0.0000
1.1	0.909	1.210	1.331	1.049	3.317	1.032	2.224	4.791	0.0414	0.0953
1.2	0.833	1.440	1.728	1.095	3.464	1.063	2.289	4.932	0.0792	0.1823
1.3	0.769	1.690	2.197	1.140	3.606	1.091	2.351	5.066	0.1139	0.2624
1.4	0.714	1.960	2.744	1.183	3.742	1.119	2.410	5.192	0.1461	0.3365
1.5	0.667	2.250	3.375	1.225	3.873	1.145	2.466	5.313	0.1761	0.4055
1.6	0.625	2.560	4.096	1.265	4.000	1.170	2.520	5.429	0.2041	0.4700
1.7	0.588	2.890	4.913	1.304	4.123	1.193	2.571	5.540	0.2304	0.5306
1.8	0.556	3.240	5.832	1.342	4.243	1.216	2.621	5.646	0.2553	0.5878
1.9	0.526	3.610	6.859	1.378	4.359	1.239	2.668	5.749	0.2788	0.6419
2.0	0.500	4.000	8.000	1.414	4.472	1.260	2.714	5.848	0.3010	0.6931
2.1	0.476	4.410	9.261	1.449	4.583	1.281	2.759	5.944	0.3222	0.7419
2.2	0.454	4.840	10.65	1.483	4.690	1.301	2.802	6.037	0.3424	0.7885
2.3	0.435	5.290	12.17	1.517	4.796	1.320	2.844	6.127	0.3617	0.8329
2.4	0.417	5.760	13.82	1.549	4.899	1.339	2.884	6.214	0.3802	0.8755
2.5	0.400	6.250	15.62	1.581	5.000	1.357	2.924	6.300	0.3979	0.9163
2.6	0.385	6.760	17.58	1.612	5.099	1.375	2.962	6.383	0.4150	0.9555
2.7	0.370	7.290	19.68	1.643	5.196	1.392	3.000	6.463	0.4314	0.9933
2.8	0.357	7.840	21.95	1.673	5.292	1.409	3.037	6.542	0.4472	1.0296
2.9	0.345	8.410	24.39	1.703	5.385	1.426	3.072	6.619	0.4624	1.0647
3.0	0.333	9.000	27.00	1.732	5.477	1.442	3.107	6.694	0.4771	1.0986
3.1	0.323	9.610	29.79	1.761	5.568	1.458	3.141	6.768	0.4914	1.1314
3.2	0.312	10.24	32.77	1.789	5.657	1.474	3.175	6.840	0.5051	1.1632
3.3	0.303	10.89	35.94	1.817	5.745	1.489	3.208	6.910	0.5185	1.1939
3.4	0.294	11.56	39.30	1.844	5.831	1.504	3.240	6.980	0.5315	1.2238
3.5	0.286	12.25	42.88	1.871	5.916	1.518	3.271	7.047	0.5441	1.2528
3.6	0.278	12.96	46.66	1.897	6.000	1.533	3.302	7.114	0.5563	1.2809

续表

x	$\frac{1}{x}$	x^2	x^3	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{10x}$	$\sqrt[3]{100x}$	$\lg x$ (尾数)	$\ln x$
3.7	0.270	13.69	50.65	1.924	6.083	1.547	3.332	7.179	0.5682	1.3083
3.8	0.263	14.44	54.87	1.949	6.164	1.560	3.362	7.243	0.5798	1.3350
3.9	0.256	15.21	59.32	1.975	6.245	1.574	3.391	7.306	0.5911	1.3610
4.0	0.250	16.00	64.00	2.000	6.325	1.587	3.420	7.368	0.6021	1.3863
4.1	0.244	16.81	68.92	2.025	6.403	1.601	3.448	7.429	0.6128	1.4110
4.2	0.238	17.64	74.09	2.049	6.481	1.613	3.476	7.489	0.6232	1.4351
4.3	0.233	18.49	79.51	2.074	6.557	1.626	3.503	7.548	0.6335	1.4586
4.4	0.227	19.36	85.18	2.098	6.633	1.639	3.530	7.606	0.6435	1.4816
4.5	0.222	20.25	91.12	2.121	6.708	1.651	3.557	7.663	0.6532	1.5041
4.6	0.217	21.16	97.34	2.145	6.782	1.663	3.583	7.719	0.6628	1.5261
4.7	0.213	22.09	103.8	2.168	6.856	1.675	3.609	7.775	0.6721	1.5476
4.8	0.208	23.04	110.6	2.191	6.928	1.687	3.634	7.830	0.6812	1.5686
4.9	0.204	24.01	117.6	2.214	7.000	1.698	3.659	7.884	0.6902	1.5892
5.0	0.200	25.00	125.0	2.236	7.071	1.710	3.684	7.937	0.6990	1.6094
5.1	0.196	26.01	132.7	2.258	7.141	1.721	3.708	7.990	0.7076	1.6292
5.2	0.192	27.04	140.6	2.280	7.211	1.732	3.733	8.041	0.7160	1.6487
5.3	0.189	28.09	148.9	2.302	7.280	1.744	3.756	8.093	0.7243	1.6677
5.4	0.185	29.16	157.5	2.324	7.348	1.754	3.780	8.143	0.7324	1.6864
5.5	0.182	30.25	166.4	2.345	7.416	1.765	3.803	8.193	0.7404	1.7047
5.6	0.179	31.36	175.6	2.366	7.483	1.776	3.826	8.243	0.7482	1.7228
5.7	0.175	32.49	185.2	2.387	7.550	1.786	3.849	8.291	0.7559	1.7405
5.8	0.172	33.64	195.1	2.408	7.616	1.797	3.871	8.340	0.7634	1.7579
5.9	0.169	34.81	205.4	2.429	7.681	1.807	3.893	8.387	0.7709	1.7750
6.0	0.167	36.00	216.0	2.449	7.746	1.817	3.915	8.434	0.7782	1.7918
6.1	0.164	37.21	227.0	2.470	7.810	1.827	3.936	8.481	0.7853	1.8083
6.2	0.161	38.44	238.3	2.490	7.874	1.837	3.958	8.527	0.7924	1.8245
6.3	0.159	39.69	250.0	2.510	7.937	1.847	3.979	8.573	0.7993	1.8405
6.4	0.156	40.96	262.1	2.530	8.000	1.857	4.000	8.618	0.8062	1.8563
6.5	0.154	42.25	274.6	2.550	8.062	1.866	4.021	8.662	0.8129	1.8718
6.6	0.151	43.56	287.5	2.569	8.124	1.876	4.041	8.707	0.8195	1.8871
6.7	0.149	44.89	300.8	2.588	8.185	1.885	4.062	8.750	0.8261	1.9021
6.8	0.147	46.24	314.4	2.608	8.246	1.895	4.082	8.794	0.8325	1.9169
6.9	0.145	47.61	328.5	2.627	8.307	1.904	4.102	8.837	0.8388	1.9315

续表

x	$\frac{1}{x}$	x^2	x^3	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{10x}$	$\sqrt[3]{100x}$	$\lg x$ (尾数)	$\ln x$
7.0	0.143	49.00	343.0	2.646	8.367	1.913	4.121	8.879	0.8451	1.9459
7.1	0.141	50.41	357.9	2.665	8.426	1.922	4.141	8.921	0.8513	1.9601
7.2	0.139	51.84	373.2	2.683	8.485	1.931	4.160	8.963	0.8573	1.9741
7.3	0.137	53.29	389.0	2.702	8.544	1.940	4.179	9.004	0.8633	1.9879
7.4	0.135	54.76	405.2	2.720	8.602	1.949	4.198	9.045	0.8692	2.0015
7.5	0.133	56.25	421.9	2.739	8.660	1.957	4.217	9.086	0.8751	2.0149
7.6	0.132	57.76	439.0	2.757	8.718	1.966	4.236	9.126	0.8808	2.0281
7.7	0.130	59.29	456.5	2.775	8.775	1.975	4.254	9.166	0.8865	2.0412
7.8	0.128	60.84	474.6	2.793	8.832	1.983	4.273	9.205	0.8921	2.0541
7.9	0.127	62.41	493.0	2.811	8.888	1.992	4.291	9.244	0.8976	2.0669
8.0	0.125	64.00	512.0	2.828	8.944	2.000	4.309	9.283	0.9031	2.0794
8.1	0.123	65.61	531.4	2.846	9.000	2.008	4.327	9.322	0.9085	2.0919
8.2	0.122	67.24	551.4	2.864	9.055	2.017	4.344	9.360	0.9138	2.1041
8.3	0.120	68.89	571.8	2.881	9.110	2.025	4.362	9.398	0.9191	2.1163
8.4	0.119	70.56	592.7	2.898	9.165	2.033	4.380	9.435	0.9243	2.1282
8.5	0.118	72.25	614.1	2.915	9.220	2.041	4.397	9.473	0.9294	2.1401
8.6	0.116	73.96	636.1	2.933	9.274	2.049	4.414	9.510	0.9345	2.1518
8.7	0.115	75.69	658.5	2.950	9.327	2.057	4.431	9.546	0.9395	2.1633
8.8	0.114	77.44	681.5	2.966	9.381	2.065	4.448	9.583	0.9445	2.1748
8.9	0.112	79.21	705.0	2.983	9.434	2.072	4.465	9.619	0.9494	2.1861
9.0	0.111	81.00	729.0	3.000	9.487	2.080	4.481	9.655	0.9542	2.1972
9.1	0.110	82.81	753.6	3.017	9.539	2.088	4.498	9.691	0.9590	2.2083
9.2	0.109	84.64	778.7	3.033	9.592	2.095	4.514	9.726	0.9638	2.2192
9.3	0.108	86.49	804.4	3.050	9.644	2.103	4.531	9.761	0.9685	2.2300
9.4	0.106	88.36	830.6	3.066	9.695	2.110	4.547	9.796	0.9731	2.2407
9.5	0.105	90.25	857.4	3.082	9.747	2.118	4.563	9.830	0.9777	2.2513
9.6	0.104	92.16	884.7	3.098	9.798	2.125	4.579	9.865	0.9823	2.2618
9.7	0.103	94.09	912.7	3.114	9.849	2.133	4.595	9.899	0.9868	2.2721
9.8	0.102	96.04	941.2	3.130	9.899	2.140	4.610	9.933	0.9912	2.2824
9.9	0.101	98.01	970.3	3.146	9.950	2.147	4.626	9.967	0.9956	2.2925
10.0	0.100	100.00	1000.0	3.162	10.000	2.154	4.642	10.000	0.0000	2.3026

IV. 三角函数

$x/°$	x/弧度	$\sin x$	$\tan x$	$\cot x$	$\cos x$		
0	0.0000	0.0000	0.0000	∞	1.0000	1.5708	90
1	0.0175	0.0175	0.0175	57.29	0.9998	1.5533	89
2	0.0349	0.0349	0.0349	28.64	0.9994	1.5359	88
3	0.0524	0.0523	0.0524	19.08	0.9986	1.5184	87
4	0.0698	0.0698	0.0699	14.30	0.9976	1.5010	86
5	0.0873	0.0872	0.0875	11.43	0.9962	1.4835	85
6	0.1047	0.1045	0.1051	9.514	0.9945	1.4661	84
7	0.1222	0.1219	0.1228	8.144	0.9925	1.4486	83
8	0.1396	0.1392	0.1405	7.115	0.9903	1.4312	82
9	0.1571	0.1564	0.1584	6.314	0.9877	1.4137	81
10	0.1745	0.1736	0.1763	5.671	0.9848	1.3963	80
11	0.1920	0.1908	0.1944	5.145	0.9816	1.3788	79
12	0.2094	0.2079	0.2126	4.705	0.9781	1.3614	78
13	0.2269	0.2250	0.2309	4.331	0.9744	1.3439	77
14	0.2443	0.2419	0.2493	4.011	0.9703	1.3265	76
15	0.2618	0.2588	0.2679	3.732	0.9659	1.3090	75
16	0.2793	0.2756	0.2867	3.487	0.9613	1.2915	74
17	0.2967	0.2924	0.3057	3.271	0.9563	1.2741	73
18	0.3142	0.3090	0.3249	3.078	0.9511	1.2566	72
19	0.3316	0.3256	0.3443	2.904	0.9455	1.2392	71
20	0.3491	0.3420	0.3640	2.747	0.9397	1.2217	70
21	0.3665	0.3584	0.3839	2.605	0.9336	1.2043	69
22	0.3840	0.3746	0.4040	2.475	0.9272	1.1868	68
23	0.4014	0.3907	0.4245	2.356	0.9205	1.1694	67
24	0.4189	0.4067	0.4452	2.246	0.9135	1.1519	66
25	0.4363	0.4226	0.4663	2.145	0.9063	1.1345	65
26	0.4538	0.4384	0.4877	2.050	0.8988	1.1170	64
27	0.4712	0.4540	0.5095	1.963	0.8910	1.0996	63
28	0.4887	0.4695	0.5317	1.881	0.8829	1.0821	62
29	0.5061	0.4848	0.5543	1.804	0.8746	1.0647	61
30	0.5236	0.5000	0.5774	1.732	0.8660	1.0472	60
31	0.5411	0.5150	0.6009	1.6643	0.8572	1.0297	59
32	0.5585	0.5299	0.6249	1.6003	0.8480	1.0123	58
33	0.5760	0.5446	0.6494	1.5399	0.8387	0.9948	57
34	0.5934	0.5592	0.6745	1.4826	0.8290	0.9774	56
		$\cos x$	$\cot x$	$\tan x$	$\sin x$	x/弧度	$x/°$

续表

$x/°$	x/弧度	$\sin x$	$\tan x$	$\cot x$	$\cos x$		
35	0.6109	0.5736	0.7002	1.4281	0.8192	0.9599	55
36	0.6283	0.5878	0.7265	1.3764	0.8090	0.9425	54
37	0.6458	0.6018	0.7536	1.3270	0.7986	0.9250	53
38	0.6632	0.6157	0.7813	1.2799	0.7880	0.9076	52
39	0.6807	0.6293	0.8098	1.2349	0.7771	0.8901	51
40	0.6981	0.6428	0.8391	1.1918	0.7660	0.8727	50
41	0.7156	0.6561	0.8693	1.1504	0.7547	0.8552	49
42	0.7330	0.6691	0.9004	1.1106	0.7431	0.8378	48
43	0.7505	0.6820	0.9325	1.0724	0.7314	0.8203	47
44	0.7679	0.6947	0.9657	1.0355	0.7193	0.8029	46
45	0.7854	0.7071	1.0000	1.0000	0.7071	0.7854	45
		$\cos x$	$\cot x$	$\tan x$	$\sin x$	x/弧度	$x/°$

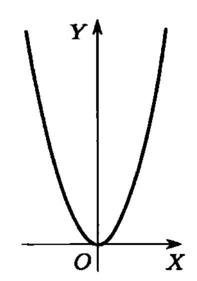
V. 指数函数、双曲函数与三角函数

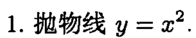
x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	$\sin x$	$\cos x$
0.0	1.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	1.0000
0.1	1.1052	0.9048	0.1002	1.0050	0.0997	0.0998	0.9950
0.2	1.2214	0.8187	0.2013	1.0201	0.1974	0.1987	0.9801
0.3	1.3499	0.7408	0.3045	1.0453	0.2913	0.2955	0.9553
0.4	1.4918	0.6703	0.4108	1.0811	0.3799	0.3894	0.9211
0.5	1.6487	0.6065	0.5211	1.1276	0.4621	0.4794	0.8776
0.6	1.8221	0.5488	0.6367	1.1855	0.5370	0.5646	0.8253
0.7	2.0138	0.4966	0.7586	1.2552	0.6044	0.6442	0.7648
0.8	2.2255	0.4493	0.8881	1.3374	0.6640	0.7174	0.6967
0.9	2.4596	0.4066	1.0265	1.4331	0.7163	0.7833	0.6216
1.0	2.7183	0.3679	1.1752	1.5431	0.7616	0.8415	0.5403
1.1	3.0042	0.3329	1.3356	1.6685	0.8005	0.8912	0.4536
1.2	3.3201	0.3012	1.5095	1.8107	0.8337	0.9320	0.3624
1.3	3.6693	0.2725	1.6984	1.9709	0.8617	0.9636	0.2675
1.4	4.0552	0.2466	1.9043	2.1509	0.8854	0.9854	0.1700
1.5	4.4817	0.2231	2.1293	2.3524	0.9051	0.9975	0.0707
1.6	4.9530	0.2019	2.3756	2.5775	0.9217	0.9996	−0.0292
1.7	5.4739	0.1827	2.6456	2.8283	0.9354	0.9917	−0.1288
1.8	6.0496	0.1653	2.9422	3.1075	0.9468	0.9738	−0.2272

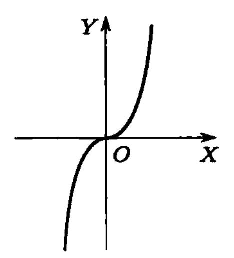
续表

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	$\sin x$	$\cos x$
1.9	6.6859	0.1496	3.2682	3.4177	0.9562	0.9463	−0.3233
2.0	7.3891	0.1353	3.6269	3.7622	0.9640	0.9093	−0.4161
2.1	8.1662	0.1225	4.0219	4.1443	0.9704	0.8632	−0.5048
2.2	9.0250	0.1108	4.4571	4.5679	0.9757	0.8085	−0.5885
2.3	9.9742	0.1003	4.9370	5.0372	0.9801	0.7457	−0.6663
2.4	11.0232	0.0907	5.4662	5.5569	0.9837	0.6755	−0.7374
2.5	12.1825	0.0821	6.0502	6.1323	0.9866	0.5985	−0.8011
2.6	13.4637	0.0743	6.6947	6.7690	0.9890	0.5155	−0.8569
2.7	14.8797	0.0672	7.4063	7.4735	0.9910	0.4274	−0.9041
2.8	16.4446	0.0608	8.1919	8.2527	0.9926	0.3350	−0.9422
2.9	18.1741	0.0550	9.0596	9.1146	0.9940	0.2392	−0.9710
3.0	20.0855	0.0498	10.0179	10.0677	0.9950	0.1411	−0.9900
3.1	22.1979	0.0450	11.0764	11.1215	0.9959	0.0416	−0.9991
3.2	24.5325	0.0408	12.2459	12.2866	0.9967	−0.0584	−0.9983
3.3	27.1126	0.0369	13.5379	13.5748	0.9973	−0.1577	−0.9875
3.4	29.9641	0.0334	14.9654	14.9987	0.9978	−0.2555	−0.9668
3.5	33.1154	0.0302	16.5426	16.5728	0.9982	−0.3508	−0.9365

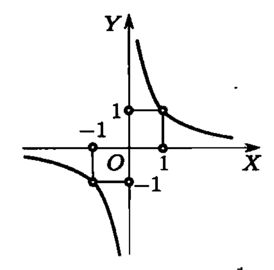
VI. 某 些 曲 线



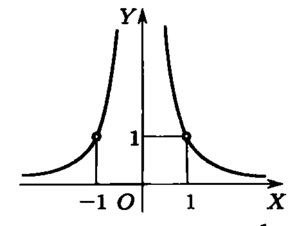

1. 抛物线 $y = x^2$.



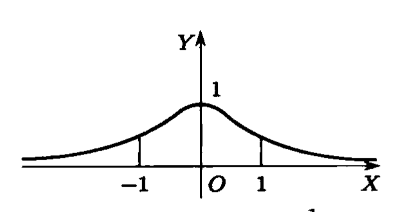
2. 立方抛物线 $y = x^3$.



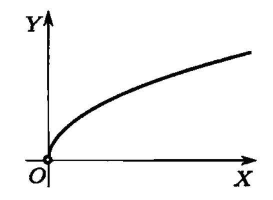
3. 等轴双曲线 $y = \dfrac{1}{x}$.



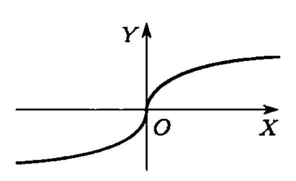
4. 分式函数曲线 $y = \dfrac{1}{x^2}$.



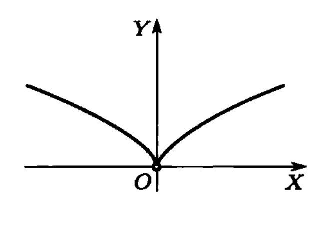
5. 阿涅西箕舌线 $y = \dfrac{1}{1+x^2}$.



6. 抛物线 (上支) $y=\sqrt{x}$.



7. 立方抛物线 $y=\sqrt[3]{x}$.

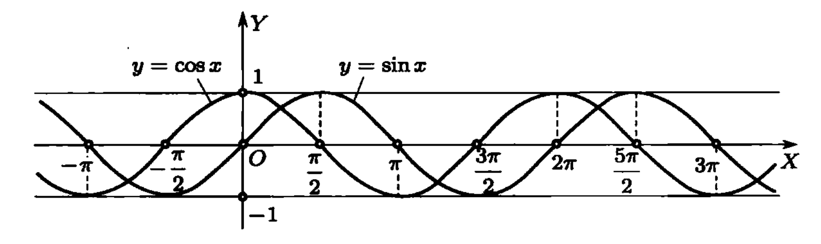


8a. 尼尔抛物线

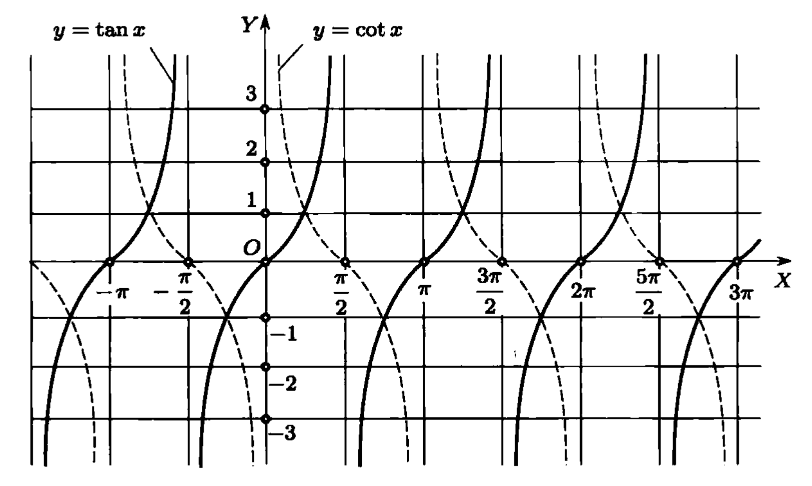
$$y=x^{\frac{2}{3}} \text{ 或 } \begin{cases} y=t^3, \\ y=t^2. \end{cases}$$

8b. 半立方抛物线

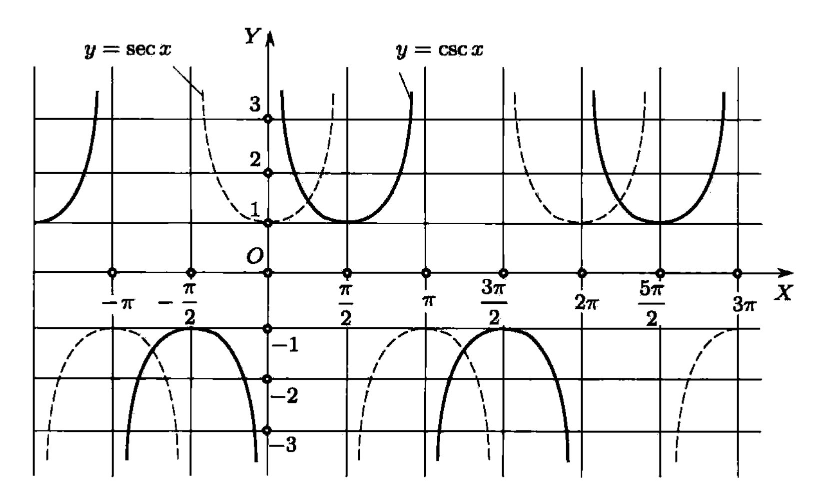
$$y^2=x^3 \text{ 或 } \begin{cases} x=t^2, \\ y=t^3. \end{cases}$$



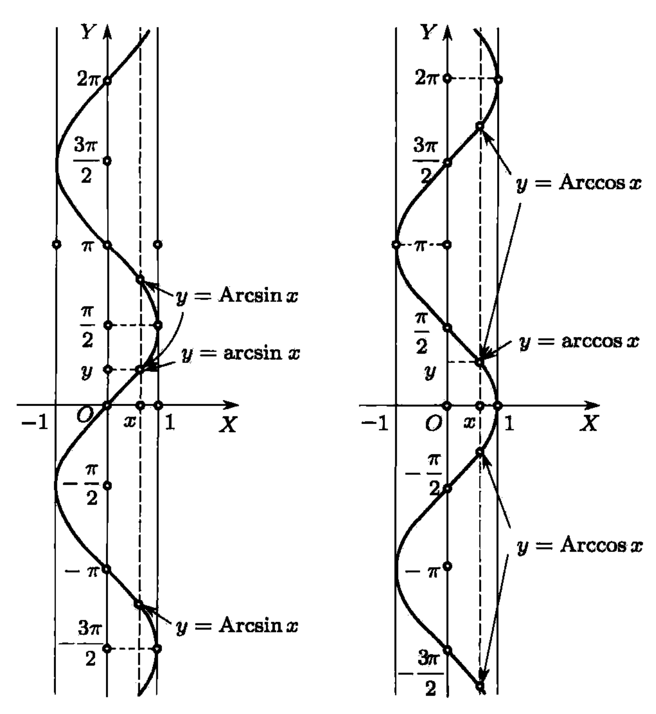
9. 正弦曲线和余弦曲线 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$.



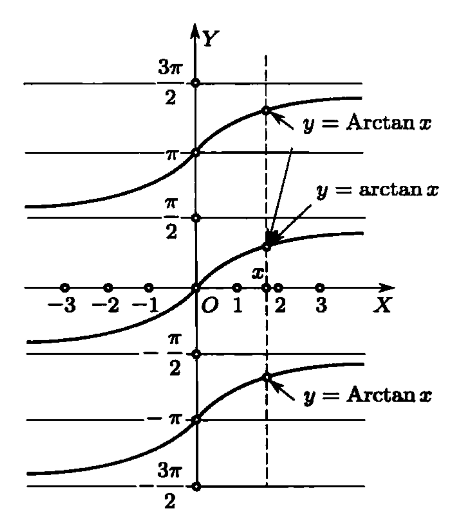
10. 正切曲线和余切曲线 $y=\tan x$ 和 $y=\cot x$.

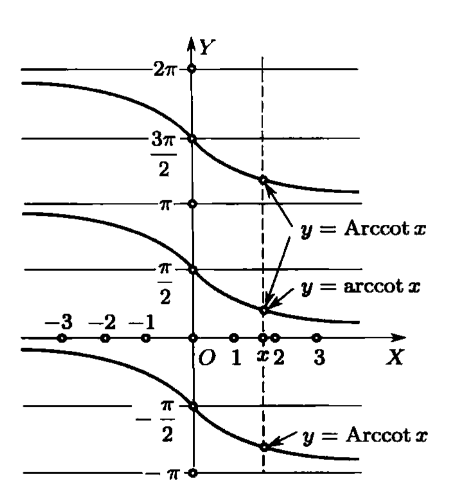


11. 正割曲线和余割曲线 $y=\sec x$ 和 $y=\csc x$.

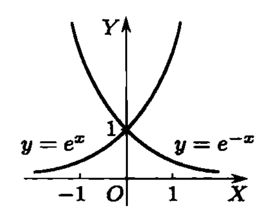


12. 反正弦曲线和反余弦曲线 $y=\mathrm{Arc}\sin x$ 和 $y=\mathrm{Arc}\cos x$.

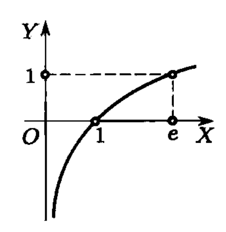




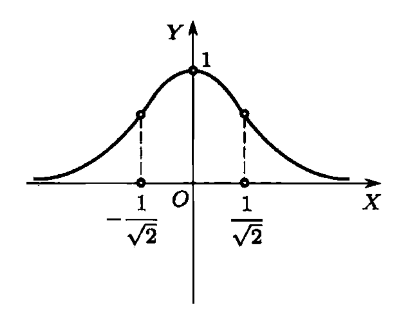
13. 反正切曲线和反余切曲线 $y = \text{Arc}\tan x$ 和 $y = \text{Arc}\cot x$.



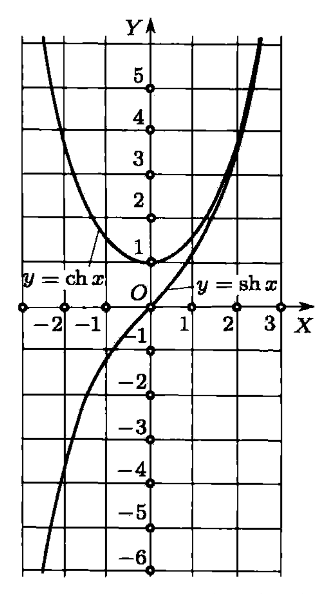
14. 指数曲线 $y = e^x$ 和 $y = e^{-x}$.



15. 对数曲线 $y = \ln x$.



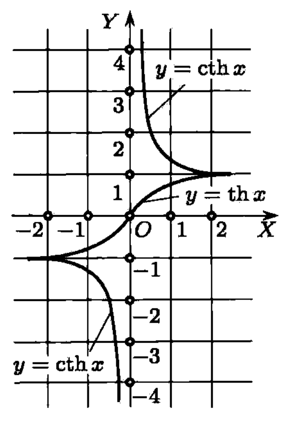
16. 高斯曲线 $y = e^{-x^2}$.



17. 双曲正弦和双曲余弦曲线

$$y=\text{sh}\,x\equiv\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

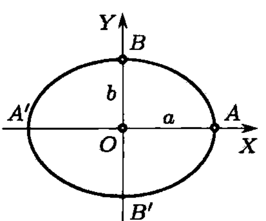
和 $y=\text{ch}\,x\equiv\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ (悬链线).



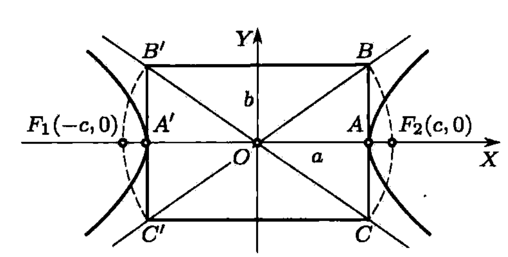
18. 双曲正切和双曲余切曲线

$$y=\text{th}\,x\equiv\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

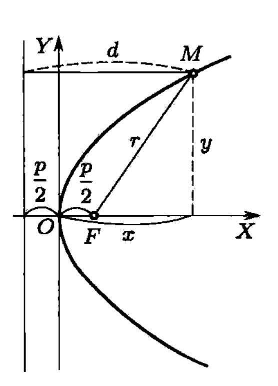
和 $y=\text{cth}\,x\equiv\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.



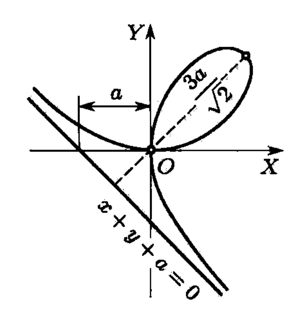
19. 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 或 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t.\end{cases}$



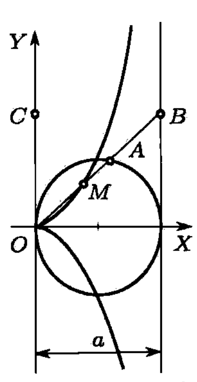
20. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 或 $\begin{cases}x=a\text{ch}\ t,\\ y=b\text{sh}\ t\ (\text{右支}).\end{cases}$



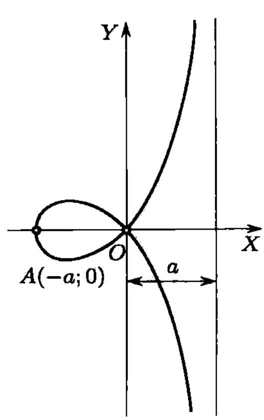
21. 抛物线 $y=2px$.



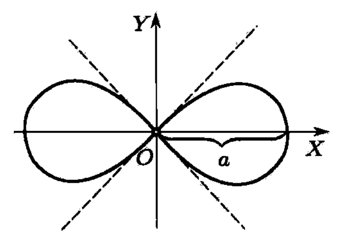
22. 笛卡儿叶形线 $x^3+y^3-3axy=0$ 或 $\begin{cases}x=\dfrac{3at}{1+t^3},\\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}.\end{cases}$



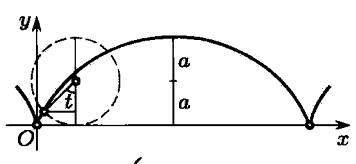
23. 蔓叶线 $y^2 = \dfrac{x^3}{a-x}$ 或 $\begin{cases} x = \dfrac{at^2}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{at^3}{1+t^2}. \end{cases}$



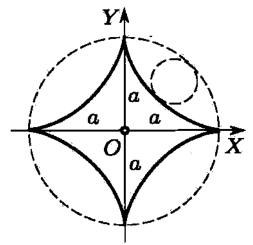
24. 环索线 $y^2 = x^2 \dfrac{a+x}{a-x}$.



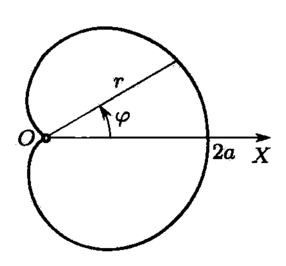
25. 伯努利双纽线 $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ 或 $r^2 = a^2\cos 2\varphi$.



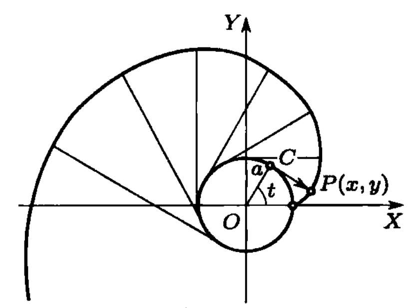
26. 摆线 $\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t). \end{cases}$



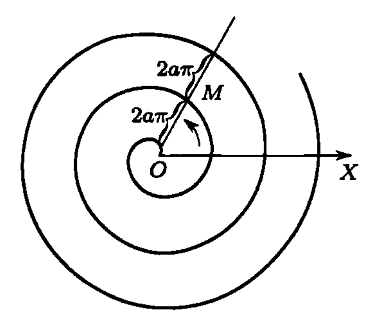
27. 内摆线 (星形线) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$ 或 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.



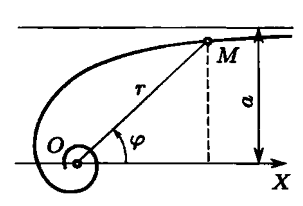
28. 心脏线 $r = a(1+\cos\varphi)$.



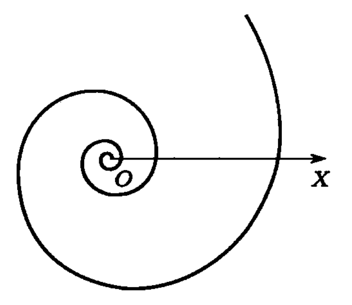
29. 圆的渐开线 $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases}$



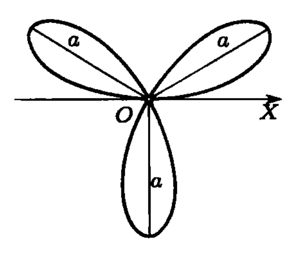
30. 阿基米德螺线 $r = a\varphi$ $(r \geqslant 0)$.



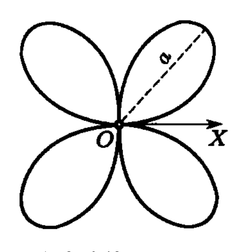
31. 双曲螺线 $r = \dfrac{a}{\varphi}$ $(r > 0)$.



32. 对数螺线 $r = e^{a\varphi}$.



33. 三叶玫瑰线 $r = a\sin 3\varphi$ $(r \geqslant 0)$.



34. 四叶玫瑰线 $r = a|\sin 2\varphi|$.

后　记

本书是苏联著名数学家、数学教育家 Б. П. 吉米多维奇主编的又一本极具影响的习题集, 它适合工科院校高等数学课程, 自 1959 年首次出版以来, 已经修订再版多次. 全书包含三千多道习题和三百多道例题, 几乎涵盖了工科院校高等数学课程 (除解析几何外) 的所有内容, 其内容广泛, 适用面宽, 对数理专业和理工科专业的学生都是一本很好的学习高等数学、打好基础的辅导书, 对讲授高等数学课程的教师也有很好的参考价值.

本习题集俄文版的第十版 (1978 年) 曾由上海科技出版社于 1983 年出版过中译本. 这次高等教育出版社正式获得了 2006 年俄文版的翻译版权, 使本书再次在中国得以传播, 实在是一件极有意义的事情. 在对新版的翻译工作中, 林武忠和倪明康全新翻译了前六章, 并根据俄文新版对房浩鉴 (第七章)、蔡天亮 (第八章)、祝长忠 (第九、十章) 的译文进行了全面校订. 另外, 我们还得到高等教育出版社的许多实际的帮助, 特别是郭思旭编审帮忙审阅了全书的大部分内容, 我们在此表示深切谢意.

最后, 感谢金志华先生对本书所作的贡献.

由于译者水平有限, 错误疏漏在所难免, 希望广大读者多提改进意见.

译　者

2011 年 10 月于上海

相关图书清单

注：书号前缀为 978-7-04-0xxxxx-x

书号	书名	著译者
习题集与配套辅导书		
25439-6	数学分析习题集 (根据 2010 年俄文版翻译)	[俄] Б. П. 吉米多维奇
31004-7	工科数学分析习题集 (根据 2006 年俄文版翻译)	[俄] Б. П. 吉米多维奇
29531-3	吉米多维奇数学分析习题集学习指引(第一册)	沐定夷、谢惠民 编著， 卫瑞霞、吴茂庆 审校
32356-6	吉米多维奇数学分析习题集学习指引(第二册)	谢惠民、沐定夷 编著， 卫瑞霞、吴茂庆 审校
32293-4	吉米多维奇数学分析习题集学习指引(第三册)	谢惠民、沐定夷 编著， 卫瑞霞、吴茂庆 审校
25766-3	偏微分方程习题集 (第 2 版)	[俄] A. C. 沙玛耶夫
22554-9	概率论习题集	[俄] A. H. 施利亚耶夫
28888-9	微分几何与拓扑学习题集 (第 2 版)	[俄] A. C. 米先柯、Ю. П. 索洛维约夫、A. T. 福明柯
18773-1	微分几何例题详解和习题汇编	陈维桓
俄罗斯数学教材选译		
18303-0	微积分学教程 (第一卷) (第 8 版)	[俄] Г. М. 菲赫金哥尔茨
18304-7	微积分学教程 (第二卷) (第 8 版)	[俄] Г. М. 菲赫金哥尔茨
18305-4	微积分学教程 (第三卷) (第 8 版)	[俄] Г. М. 菲赫金哥尔茨
18302-3	数学分析 (第一卷) (第 4 版)	[俄] B. A. 卓里奇
20257-1	数学分析 (第二卷) (第 4 版)	[俄] B. A. 卓里奇
18306-1	数学分析讲义 (第 3 版)	[俄] Г. И. 阿黑波夫、B. A. 萨多夫尼齐、B. H. 丘巴里阔夫
30578-4	复分析导论 (第一卷) (第 4 版)	[俄] Б. B. 沙巴特
22360-6	复分析导论 (第二卷) (第 4 版)	[俄] Б. B. 沙巴特
18407-5	函数论与泛函分析初步 (第 7 版)	[俄] A. H. 柯尔莫戈洛夫、C. B. 佛明
29221-3	实变函数论 (第 5 版)	[俄] И. П. 那汤松
18398-6	复变函数论方法 (第 6 版)	[俄] M. A. 拉夫连季耶夫、Б. B. 沙巴特
18399-3	常微分方程 (第 6 版)	[俄] Л. C. 庞特里亚金
22521-1	偏微分方程讲义 (第 2 版)	[俄] O. A. 奥列尼克

书号	书名	著译者
23063-5	奇异摄动方程解的渐近展开	[俄] А. Б. 瓦西里亚娃、В. Ф. 布图索夫
27249-9	数值方法 (第 5 版)	[俄] Н. С. 巴赫瓦洛夫，Н. П. 热依德科夫，Г. М. 柯别里科夫
20525-1	代数学引论 (第一卷) 基础代数 (第 2 版)	[俄] А. И. 柯斯特利金
21491-8	代数学引论 (第二卷) 线性代数 (第 3 版)	[俄] А. И. 柯斯特利金
22506-8	代数学引论 (第三卷) 基本结构 (第 2 版)	[俄] А. И. 柯斯特利金
18946-9	现代几何学：方法与应用 (第一卷) 曲面几何、变换群与场 (第 5 版)	[俄] Б. А. 杜布洛文、С. П. 诺维可夫、А. Т. 福明柯
21492-5	现代几何学：方法与应用 (第二卷) 流形上的几何与拓扑 (第 5 版)	[俄] Б. А. 杜布洛文、С. П. 诺维可夫、А. Т. 福明柯
21434-5	现代几何学：方法与应用 (第三卷) 同调论引论 (第 2 版)	[俄] Б. А. 杜布洛文、С. П. 诺维可夫、А. Т. 福明柯
18405-1	微分几何与拓扑学简明教程	[俄] А. С. 米先柯、А. Т. 福明柯
22059-9	概率 (第一卷) (第 3 版)	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
22555-6	概率 (第二卷) (第 3 版)	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
22359-0	随机过程论	[俄] А. В. 布林斯基、А. Н. 施利亚耶夫
22634-8	随机金融基础 (第一卷) 事实. 模型	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
23983-6	随机金融基础 (第二卷) 理论	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
18403-7	经典力学的数学方法 (第 4 版)	[俄] В. И. 阿诺尔德
18530-0	理论力学 (第 3 版)	[俄] А. П. 马尔契夫
22155-8	连续介质力学 (第一卷) (第 6 版)	[俄] Л. И. 谢多夫
22633-1	连续介质力学 (第二卷) (第 6 版)	[俄] Л. И. 谢多夫
29223-7	非线性动力学定性理论方法 (第一卷)	[俄] L. P. Shilnikov 等
29464-4	非线性动力学定性理论方法 (第二卷)	[俄] L. P. Shilnikov 等

总 策 划：张小萍
责任编辑：蒋　青
封面设计：王凌波

本书是Б.П.吉米多维奇主编的又一本极具影响的习题集，它适合工科院校高等数学课程，自1959年首次出版以来，已经修订再版多次。本书译自最新的2006年俄文版。

全书包含三千多道习题和三百多道例题，几乎涵盖了工科院校高等数学课程（除解析几何外）的所有内容，并对课程中要求牢固掌握的最重要章节（求极限、微分法、函数作图、积分法、定积分的应用、级数和微分方程的解法）给予了特别关注。除此之外，书中还包括场论、傅里叶方法和近似计算的习题。

本书可作为各类读者（尤其是理工科各专业的学生）学习微积分或高等数学课程的重要参考书。

学科类别：数学



定价 39.00 元
academic.hep.com.cn